0 984241 080000

98-42-41-08
(124.24)

1755

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 11 класс 5

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Ломоносов"
наменование олимпиады

по МАТЕМАТИКЕ
профиль олимпиады

Жуковского Николая Михайловича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«29» 03 2026 года

Подпись участника

75 (Семьдесят пять)

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

98-42-41-08 (124.24)

Чистовик

Лист 1/8

№1. $\sqrt{6(1-tg^2x)} = 4\sin x$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4\sin x \geq 0 \\ 6(1-tg^2x) = 16\sin^2 x \geq 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \sin x \geq 0 \\ 6\left(1-\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)\right) = 16(1-\cos^2 x) \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \sin x \geq 0 \\ 6\left(2-\frac{1}{\cos^2 x}\right) - 16(1-\cos^2 x) = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \sin x \geq 0 \\ 12 - \frac{6}{\cos^2 x} - 16 + 16\cos^2 x = 0 \end{cases}$

ОТТ: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad | : \cos^2 x$

(I) $\cos x = 0$

(II) $tg^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$

$\Rightarrow tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$

Проверим (I):

$\cos x = 0$

$\Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

Подставим в исходное:

$6\left(1 - tg^2\frac{\pi}{2}\right)$ ← не определено

$\Rightarrow \varnothing$

$16\cos^2 x - \frac{6}{\cos^2 x} - 4 = 0$

Введем $t = \cos^2 x$, $t > 0$ ($t \neq 0$, т.к. $\frac{6}{\cos^2 x}$ сущ.)

$\Rightarrow 16t - \frac{6}{t} - 4 = 0 \quad | \cdot t$

$16t^2 - 4t - 6 = 0$

$D = 16 + 4\cdot 6\cdot 16 = 16\cdot 25$

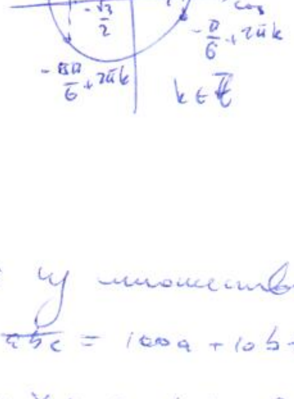
$t = \frac{4 \pm 20}{2\cdot 16} = -\frac{16}{16\cdot 2} \Big/ \frac{24}{16\cdot 2} = -\frac{1}{2} \Big/ \frac{3}{4}$

$t = -\frac{1}{2}$ не подходит т.к. $t > 0$

$\Rightarrow t = \frac{3}{4}$

Обр. замена: $\cos^2 x = \frac{3}{4}$

$\Rightarrow \cos x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$



$\Rightarrow \begin{cases} \sin x \geq 0 \\ \cos x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$

Ответ:

№2. Возьмем x из множества A

Пусть $x = \overline{abc} = 100a + 10b + c$

Сумма цифр x: $sum(x) = a + b + c$

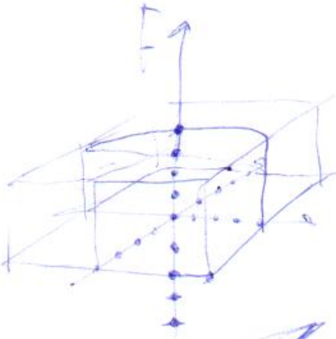
Черновик

№2. $A = \{x\}$

$\frac{x}{\text{sum } x} = 9k$, ~~$n \in \mathbb{Z}$~~, $n \in \mathbb{N}$ $k \in \mathbb{N}$ $a_1 + a_6 + a_{..}$

~~Треугл. число~~ $x = \overline{abc}$ $\frac{100a+10b+c}{a+b+c} = 9k$

$\Rightarrow \frac{\overline{abc}}{a+b+c} = 9k$

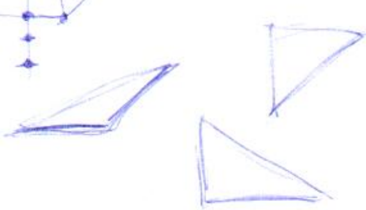


$100a + 10b + c = 9ka + 9kb + 9kc$

$(100-9k)a + (10-9k)b + (1-9k)c$

$\boxed{9 \text{ слев. mod } 9: \ (a+b+c \equiv 0 \mod 9)}$

$a, b, c \in \{0, \dots, 9\}$



① $a+b+c = 9$

⑨ $a+b+c = 18$

④ $a+b+c = 27 \Rightarrow a=b=c=9$

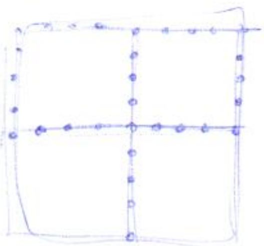
$9 \cdot 3$ „плоскости"

$\overline{999}$

$100a + 10b + c = 9k(a+b+c)$

~~Плоскости:~~ $a+b+c \,\vdots\, 9 \Rightarrow x \,\vdots\, 9$

$\Rightarrow x \,\vdots\, 81$



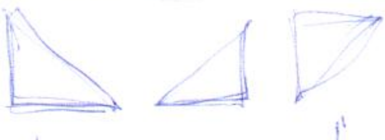
$\Rightarrow x = 81m$

$81 \cdot 2 = \frac{162}{9}$

$81 \cdot 3 = \frac{243}{9}$

$81 \cdot 4 \ \frac{324}{9}$

$81 \cdot 5 = \frac{405}{9} =$



$81 \times 6 = 486$

~~„ПЛ" = 4 „одного случая"~~

Выбрать прям. „4"

$\frac{9 \cdot 9 \cdot 6}{18} =$

$\frac{9 \cdot 9 \cdot 8}{18}$

81×13: $243 + 81 = 1053$

81×12: $162 + 81 = 972$

$\frac{9 \cdot 9 \cdot 12}{18}$

1296×108: $10368 + 12960 = 139968$

$648 + 972 = 1620$

$12 \times 9 = 108$

$(9 \cdot 4)^2 = 81 \cdot 16$ 81×16: $486 + 81 = 1296$

Чистовик   Лист 2/8

№2 (продолжение)

По условию: $\frac{x}{\text{sum}\,x} = 9k$, $k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \frac{100a+10b+c}{a+b+c} = 9k$

$\Rightarrow 100a+10b+c = 9k(a+b+c)$

$\Rightarrow \mod 9:\ 100a+10b+c \equiv 0$

$\Rightarrow a+b+c \equiv 0 \mod 9$, т.к. $100 \equiv 1 \mod 9$, $10 \equiv 1 \mod 9$

X и sum(x) кратны 9.

$\Rightarrow$ X можно представить в виде $9p$

а sum(x) в виде $9q$

$\Rightarrow \frac{x}{\text{sum}\,x} = \frac{9p}{9q} = \frac{p}{q} = 9k \Rightarrow p = 9kq \Rightarrow p \vdots 9$

$\Rightarrow x = 81m$, $m \in \mathbb{N}$ (где $p = 9m$)

$\Rightarrow$ Рассмотрим все числа вида $81m$

× $m=1$	$x=81$	$\varnothing$ (<100)	$\downarrow \frac{x}{\text{sum}\,x} \in \mathbb{Z}$
1) $m=2$	$x=162$	$\text{sum}\,x=9$	$9\cdot 2$
2) $m=3$	$x=\boxed{243}$	$\text{sum}\,x=9$	$9\cdot 3$
3) $m=4$	$x=324$	$\text{sum}\,x=9$	$9\cdot 4$
4) $m=5$	$x=405$	$\text{sum}\,x=9$	$9\cdot 5$
5) $m=6$	$x=486$	$\text{sum}\,x=18$	$9\cdot 3$
× $m=7$	$x=567$	$\text{sum}\,x=18$	$567 \not\vdots\ 18 \Rightarrow \varnothing$
6) $m=8$	$x=\boxed{648}$	$\text{sum}\,x=18$	$9\cdot 4$
× $m=9$	$x=729$	$\text{sum}\,x=18$	$729 \not\vdots\ 18 \Rightarrow \varnothing$
7) $m=10$	$x=810$	$\text{sum}\,x=9$	$9\cdot 10$
× $m=11$	$x=891$	$\text{sum}\,x=18$	$891 \not\vdots\ 18 \Rightarrow \varnothing$
8) $m=12$	$x=\boxed{972}$	$\text{sum}\,x=18$	$9\cdot 6$
$m=13$	$x=1053$	$(>1000) \Rightarrow \varnothing$	

$\Rightarrow 243+648+972 = 1620+243 = 1863$

Ответ: 1863.

№3. F – множество в пространстве.

Рассмотрим произвольный треугольник ABC с прямым углом C.

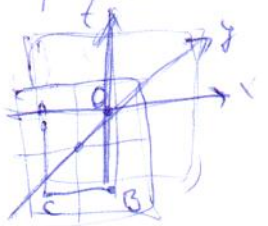
Чистовик Лист 3/8

№3 (Продолжение)

Число точек AC и BC. ~~Есть всего~~ 3 AC и BC параллельных осям. Если параллельны одной, то AC ∥ BC, что ⊘

=> Всего возможно конф. пар. не учитывая очередность точек B и A:
$C_3^2 = 3$ (число способов выбрать 2 из 3 осей)

~~При этом~~ Рассмотрим один из случаев (допустим XZ)

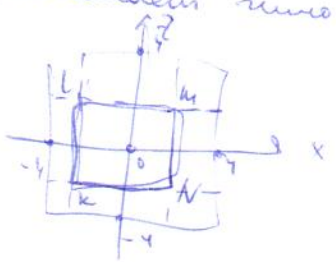


ABC лежит в одной из девяти плоскостей (координата по Y меняется от -4 до 4)

=> Число способов выбрать ABC равно числу способов выбрать его в плоскости умноженному на 9 (в каждой плоскости очевидно число способов одинаково)

При этом общее число способов равно умноженному на 3 от полученного (в осях XY и YZ абсолютно одинаково число как и в XZ, т.к. имеем симметричный куб 4x4x4) => Всего способов = 3 · 9 · „плоскость"

Посчитаем число выборов в плоскости, огр. 4x4



Выберем ~~из~~ прямоугольник KLMN, паралл. стор. OX и OZ

Число способов: $(C_9^2)^2$ (число способов выбрать лев, прав, верхн и нижн. границы из 9 имеющихся для каждой пары)

(При этом нам подходит 4 тр. с вершинами в KLMN => общее число сп.: $4 \cdot (C_9^2)^2$

(остальные случаи очевидно не совпадают по построению выбора)

=> Общее число способов: $3 \cdot 9 \cdot 4 \cdot (C_9^2)^2 = 108 \cdot \left(\frac{9 \cdot 8}{2}\right)^2 =$

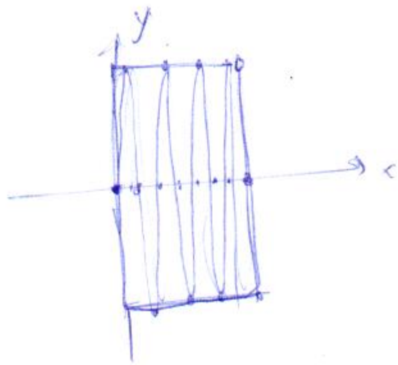
$= 108 \cdot 81 \cdot 16 = 108 \cdot 1296 = 139968$

Ответ: 139968

08-42-41-08 (324.24)

Черновик

№4.

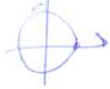


$y = \sin 11\pi x$

$y = \sin 15\pi x$

$y = \sin 17\pi x$

$x = 0$

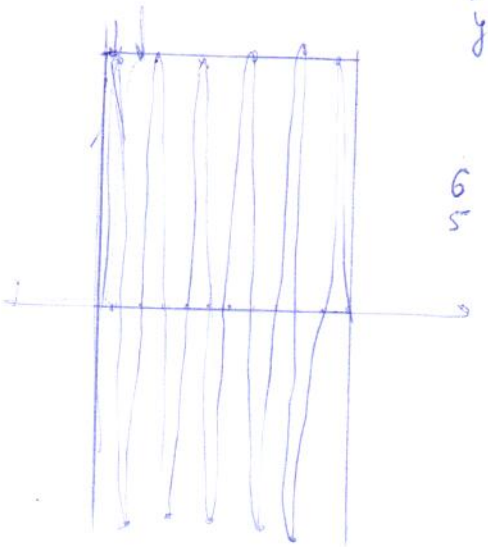


$\sin 11\pi x = 0$

$\Rightarrow 11\pi x = \pi kn$

$11x = kn$

$\Rightarrow x = \frac{kn}{11}$



$\frac{6}{5}$

Период!

$\sin k\pi x = 1$

$\Rightarrow kx\pi = \frac{\pi}{2} + \pi n$

$kx = \frac{1}{2} + n$

$x = \frac{2n+1}{2k}$

$\frac{1}{17}$

$\frac{m_1}{11} = \frac{m_2}{15}$

$15 m_1 = 11 m_2$

$\Rightarrow m_2 \vdots 15$

~~Посчитаем~~

~~Неправильно быть не для!~~

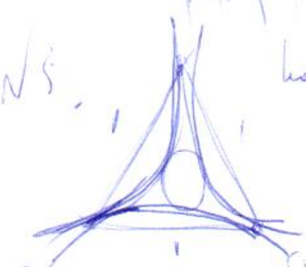
$\frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{\sqrt{3}}{6\cdot 4} = \frac{3\sqrt{3}}{6\cdot 24}$

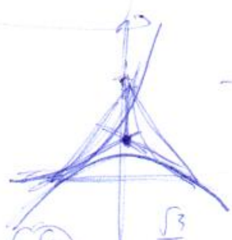
$\frac{3\sqrt{3}}{24} \quad \frac{\sqrt{3}}{6}$

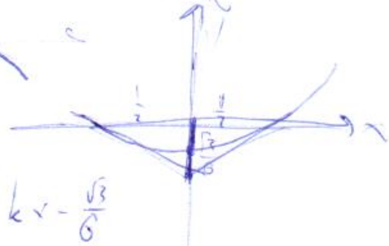
~~Наличие.~~

~~Поворот~~

№5.







$f(x) = cx^2 + a$

$\frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{1}{4} + a = 0 \Rightarrow a = -\frac{\sqrt{3}}{6\cdot 4}$

$cx^2 + a$

$\frac{\sqrt{3}}{6}$

$f'(x) = 2cx$

$2c = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$c = \frac{\sqrt{3}}{6}$

$cx^2 = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{\sqrt{3}}{6} \quad D = 0$

$6cx^2 - 2\sqrt{3}x + \sqrt{3} = 0$

$D = 12 - 24\sqrt{3}c = 0$

~~$12 = 24\sqrt{3}c \Rightarrow c = \frac{1}{2\sqrt{3}}$~~

$y = kx - \frac{\sqrt{3}}{6}$

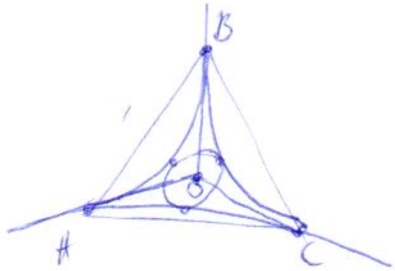
$0 = \frac{k}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}$

$\boxed{y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{\sqrt{3}}{6}} \quad y = cx^2$

Чистовик

Лист 4/8

№5.



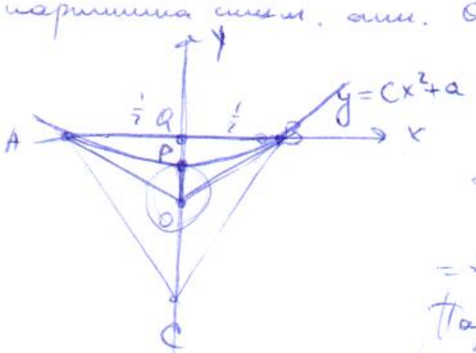
Обозначим вершины ABC

Поскольку по условию „треугольник" симметричный, то у него есть центр при повороте вокруг которого картинка (треугольник) переходит сам в себя.

Проведём общие касательные для парабол в точках A, B и C. В силу симметрии они пересекутся в одной точке. Пусть это точка O (При этом $\angle AOC = \angle BOC = \angle BOA = 360^\circ : 3 = 120^\circ$ опять же в силу симм.) $\Rightarrow$ При повороте вокруг точки O на 120° картинка перейдёт в себя. $AB = BC = AC = 1$ (по условию) $\Rightarrow$ $\triangle ABC$ - р/с ($AO = OC = OB$ как касательные) $\Rightarrow$ O - центр вписанной и описанной ABC (точка, которая при повороте переходит сама в себя)

O - центр искомой окружности ω опять же в силу симм. (окр. ω переходит сама в себя)

Точка пересечения (касания) ω и параболы, проходящей через A и B лежит на продолжении OC за точку O. (картинка симм. отн. OC)



Введём ПДСК в точке Q как центре ($Q = CO \cap AB$)

Пусть $P = CQ \cap$ „парабола AB" $\Rightarrow$ OP - радиус искомой ω

„Парабола AB" имеет вид $y_n = cx^2 + a$

$B\left(\frac{1}{2}; 0\right)$; $Q(0;0)$; ~~OB~~ $OQ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{3}}{6}$

(медиана $2:1$ от верш.)

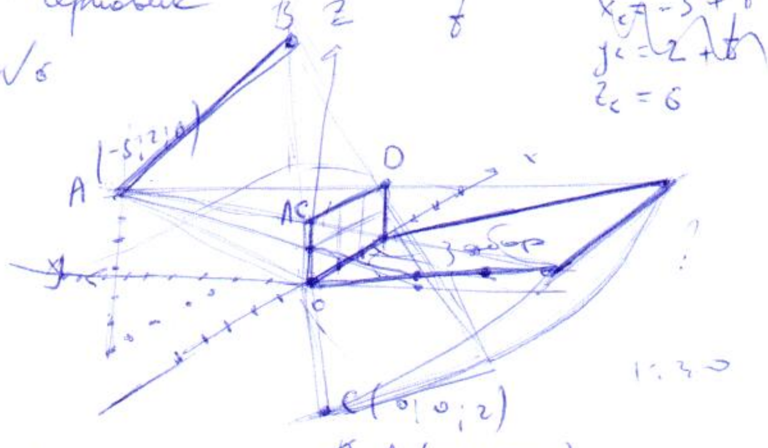
$\Rightarrow O\left(0; -\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$ Ур-ние прямой через O и B.

$\left(y_k = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)$ - касательная к y_n; $y_n' = 2cx \Rightarrow 2c = \frac{\sqrt{3}}{3}$ (т.к. рав-во коэф. перед x - прямое условие на кас.) $\Rightarrow c = \frac{\sqrt{3}}{6}$

$y_n(B)$: $0 = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{1}{4} + a \Rightarrow a = -\frac{\sqrt{3}}{24} \Rightarrow PQ = |a| = \frac{\sqrt{3}}{24} \Rightarrow OP = OQ - QP =$
$= \frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{\sqrt{3}}{24} = \frac{3\sqrt{3}}{24} = \frac{\sqrt{3}}{8}$ Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{8}$.

Черновик

№6



$x_c = -5 + t$
$y_c = 2 + t$
$z_c = 6$

$(6;4)$

$(-5;2)$

?

?

$1:3:0$

$A(-5;2;6)$

$\{x_0\ y;\ z_0\} = \{5;-2;-4\}$ Ур-ние прямой

$\frac{x}{5} = \frac{y}{-2} = \frac{z-2}{-4}$

$\begin{cases} x = 5t \\ y = -2t \\ z = 2-4t \end{cases}, t \in R$

$z = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{2}$

$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$

$A(-5;2;6)$

$C(0;0;2)$

$y = kx + b$

$\begin{cases} 2 = -5k + b \\ 9 = 6k + b \end{cases}$

$11k = 7$

$k = \frac{7}{11}$

$\vec{AC} = \{5;-2;-4\}$

$\frac{x}{5} = \frac{y}{-2} = \frac{z-2}{-4}$

$C: \left(t;\ \frac{7}{11}t + \frac{57}{11};\ 6\right)$

$2 = -\frac{5 \cdot 7}{11} + b$

$b = \frac{22+35}{11} = \frac{57}{11}$

$\boxed{y = \frac{7}{11}x + \frac{57}{11}}$

$\left(\frac{7}{11}t + \frac{57}{11};\ 6\right)$

$\boxed{t \in (-5;6)}$

$x = -5$

$x = 6$

$\frac{57-35}{2 \cdot 11} = 2$

A

$0;0;2$

C

$\frac{x}{t} = \frac{y}{\left(\frac{7}{11}t + \frac{57}{11}\right)} = \frac{z-2}{4} = m$

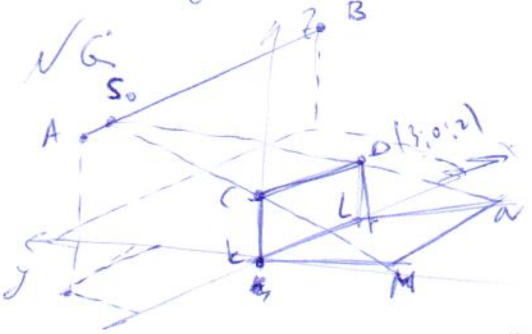
$\begin{cases} x = mt \\ y = \left(\frac{7}{11}t + \frac{57}{11}\right)m \\ z = 2 + 4m \end{cases} \Rightarrow m = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{t}{2} \Rightarrow x \in [2{,}5;-3] \\ y = -\left(\frac{7}{22}t + \frac{57}{22}\right) \quad t = -2x \end{cases}$

Цимовин

Лист 5 / 8

√6



Введём оси xyz.

$A(-5;2;6)$ $D(3;0;2)$

$B(6;9;6)$ $C(0;0;2)$

Уравнение через AB координат x y (парал. $\parallel OXY$)

$y = kx + b$

$\begin{cases} 2 = -5k + b \\ 9 = 6k + b \end{cases} \Rightarrow k = \frac{7}{11};\ b = \frac{57}{11} \Rightarrow y = \frac{7}{11}x + \frac{57}{11}$

$\Rightarrow$ Местоположение светильника описывается координатами $S\left(t;\ \frac{7}{11}t + \frac{57}{11};\ 6\right)$, где $t \in [5; 6]$

Отметим точки C и D (вершины забора)

Для произвольного положения S_0 затенённая область ищется следующим образом.

Проводятся лучи SC и SD до пересечения с OXY в точках M и N соотв. Пусть K и L — осн. забора (см. рис)

CD переходит в MN; CK в MK; DL в NL

$\Rightarrow KLMN$ — искомая затенённая область для S_0.

Параметризуем M и N через t (координата по $z = 0 \Rightarrow$ ищем только x и y)

Уравнение прямой SC.

направляющий $\vec{CS} = \left\{t;\ \frac{7}{11}t + \frac{57}{11};\ 4\right\}$

Уравнение: $\frac{x-0}{t} = \frac{y-0}{\frac{7}{11}t + \frac{57}{11}} = \frac{z-2}{4} = m$, $m \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \begin{cases} x = mt \\ y = \left(\frac{7}{11}t + \frac{57}{11}\right)m, \quad m \in \mathbb{R} \\ z = 2 + 4m \end{cases}$ $z = 0 \Rightarrow m = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{t}{2} \\ y = -\frac{1}{2}\left(\frac{7}{11}t + \frac{57}{11}\right) \end{cases}$ ← точка M.

$t \in [-5; 6] \Rightarrow x \in \cancel{2{,}5;}\ [-3; 2{,}5]$; $t = -2x$

$\Rightarrow y = -\frac{1}{2}\left(\frac{7}{11}(-2x) + \frac{57}{11}\right) = \frac{7}{11}x - \frac{57}{22}$

$\boxed{y = \frac{7}{11}x - \frac{57}{22};\ x \in [-3; 2{,}5]}$ точка M

Чистовик Лист 6/8

№6 (Продолжение)

Уравнение SD

направляющий $\vec{DS} = \{ t-3;\ \frac{7}{11}t + \frac{57}{11};\ 4 \}$

Ур-ние: $\frac{x-3}{t-3} = \frac{y}{\frac{7}{11}t + \frac{57}{11}} = \frac{z-2}{4} = m$ — пар-р

$\Rightarrow \begin{cases} x = 3 + m(t-3) \\ y = (\frac{7}{11}t + \frac{57}{11})m \\ z = 2 + 4m = 0 \Rightarrow m = -\frac{1}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x = 3 + \frac{3-t}{2} = \frac{9-t}{2} \\ y = -\frac{7}{22}t - \frac{57}{11} \end{cases}$ $t \in [-5;6]$ $\Rightarrow x \in [1,5;7]$

$\begin{array}{r} 57 \\ \times 2 \\ \hline 114 \\ +63 \\ \hline 177 \end{array}$

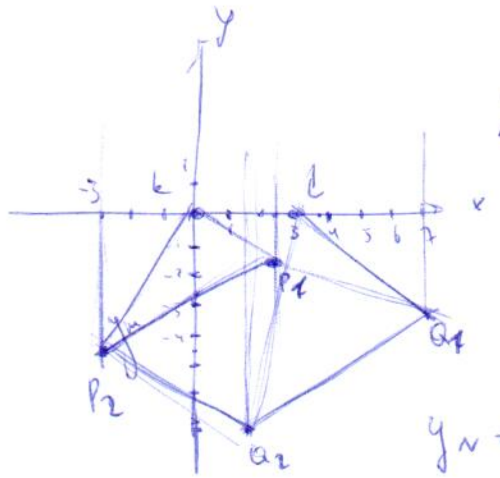
$2x = 9 - t \Rightarrow t = 9 - 2x$

$\Rightarrow y = -\frac{7}{22}(9-2x) - \frac{57}{11} = -\frac{63}{22} + \frac{7}{11}x - \frac{57}{11} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{y = \frac{7}{11}x - \frac{177}{22};\ x \in [1,5;7]}$ — точка N

$\frac{57}{22} = \frac{7}{11}x$

$\frac{57}{14}$



$y_M = \frac{7}{11}x - \frac{57}{22}$, $x \in [-3; 2,5]$

$y_M(-3) = -\frac{21}{11} - \frac{57}{22} =$

$= -\frac{42+57}{22} = -\frac{97}{22}$

$y_M(\frac{5}{2}) = \frac{35}{22} - \frac{57}{22} = -2$

$y_N = y_M - \left(\frac{177-57}{22}\right) = y_M - \frac{120}{22} =$

$= y_M - \frac{60}{11}$

$y_N = \frac{7}{11}x - \frac{177}{22}$ $x \in [\frac{3}{2}; 7]$

$\begin{array}{r} 177 \\ -98 \\ \hline 79 \end{array}$

$y_N(\frac{3}{2}) = \frac{21}{22} - \frac{177}{22} = -\frac{156}{22} = -\frac{78}{11}$

$y_N(7) = \frac{98}{22} - \frac{177}{22} = -\frac{79}{22}$

P_1 и Q_1 — нач. точки M и N KLQ_1P_1 — затемненная вначале

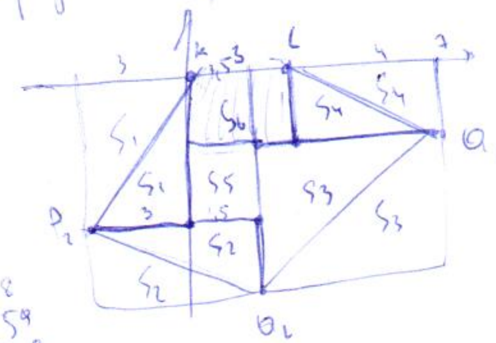
P_2 и Q_2 — конечн. точки M и N KLQ_2P_1 — затемненная вначале

$\Rightarrow$ $KLQ_1Q_2P_2$ — общая затемнённая площадь (любые точки внутри области будут затемнены в разные моменты вр.)

Чистовик

Лист 7/8

№6 (Продолжение)



Разобьём на 6 частей

$S_1 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{97}{22}$

$S_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{2} \cdot \left(\frac{156}{22} - \frac{97}{22} \right)$

$S_4 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{79}{22}$

$S_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{11}{2} \cdot \left(\frac{156}{22} - \frac{79}{22} \right)$

$S = (3+7) \cdot \frac{156}{22} - (S_1 + S_2 + S_3 + S_4) =$

$= 10 \cdot \frac{156}{22} - \frac{1}{2}\left(3 \cdot \frac{97}{22} + \frac{9}{2} \cdot \frac{59}{22} + 4 \cdot \frac{79}{22} + \frac{11}{2} \cdot \frac{77}{22}\right) =$

$= 10 \cdot \frac{156}{22} - \frac{(291 + 531 + 316 + 847)}{2 \cdot 22} =$

$= \frac{(156 \cdot 20 - 822 - 1163)}{22 \cdot 2} = \frac{3120 - 1975}{44} = \frac{1145}{44}$

$97 \cdot 3 = 291$; $59 \cdot 9 = 531$; $79 \cdot 4 = 316$; $77 \cdot 11 = 847$; $291 + 531 = 822$; $316 + 847 = 1163$; $156 \cdot 2 = 312$; $822 + 1163 = 1975$; $3120 - 1975 = 1145$; $1145 \, / \, 11$; $910 \; 156 - 79 = 77$

Ответ: $\frac{1145}{44}$.

№8. $8x^2 \log_a x - \log_x a - 2x \geq 0$

Сущ. логарифмов: $\begin{cases} a > 0 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \\ a \neq 1 \end{cases}$

$\log_a x = 0 \Rightarrow x = 1$, но $x \neq 1$ $\Rightarrow \boxed{\log_a x \neq 0}$

$\log_x a \neq 0$ аналогично

Решим как квадратное относительно x:

$(8 \log_a x) x^2 - 2x - \log_x a \geq 0$

$D = 4 + 4 \cdot 8 \frac{\log_a x}{\log_{x} a} \log_x a = 4 + 32 \cdot \frac{\log_a x}{\log_x a} = 36$

$x = \frac{2 \pm 6}{16 \log_a x}$ $x_1 = \frac{1}{2\log_a x}$; $x_2 = -\frac{1}{4 \log_a x}$

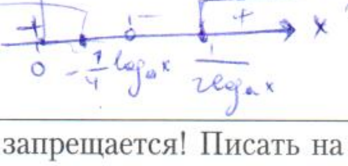
(I) $\log_a x > 0$

~~I.1 $x_1 > x_2$~~ $x_1 \vee x_2$

Рационализация: $(a-1)(x-1) > 0$

$\frac{1}{2\log_a x} \vee -\frac{1}{4 \log_a x}$

$\frac{1}{2\log_a x} > 0 > -\frac{1}{4\log_a x}$

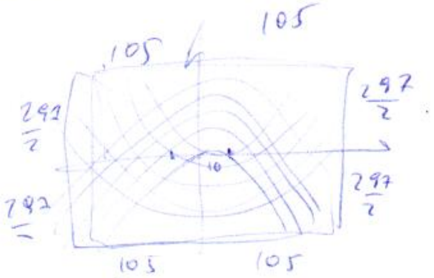


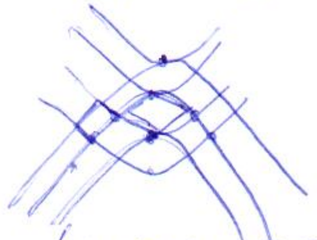
0 и 1 отмечены схематично

~~$x \neq 0$ если нужно~~ ~~$\frac{1}{4\log_a x} \neq 0$~~

Черновик.

1 2 3 4 5 6 7 8





$$8x^2 \log_a x - \log_x a - 2x \geq 0$$

$$\begin{cases} a > 0 & a \neq 1 \\ x > 0 & x \neq 1 \end{cases}$$

$$8x^2 \log_a x -$$

$$(8\log_a x)x^2 - 2x - \frac{1}{\log_a x} \geq 0$$

$$D = 4 + 4\cdot\frac{8\log_a x}{\log_a x} = 36 = 6^2$$

$$x = \frac{2 \pm 6}{16\log_a x}$$

$$x_1 = \frac{8}{16\log_a x} = \frac{1}{2\log_a x}$$

$$x_2 = \frac{-4}{16\log_a x} = -\frac{1}{4\log_a x}$$

$$\begin{cases} a > 1 \\ x > 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a < 1 \\ x < 1 \end{cases}$$

$0 \quad -\frac{\log_x a}{4} \quad \frac{\log_x a}{2}$

$-\frac{\log_x a}{2} \quad -\frac{\log_x a}{4}$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} -\frac{\log_x a}{4} = 0 \\ \frac{\log_x a}{2} = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \log_x a = 0 \Rightarrow \boxed{a = 1} \ ?!\ \varnothing$$

№8 (продолжение) Чистовик Лист 8/8

Иначе будут ~~открыт~~ интервалы и полуинтервалы

$\left(0; -\frac{1}{4\log_a x}\right]$ $\left[\frac{1}{2\log_a x}; +\infty\right)$

Но $\frac{1}{\log_a x} = 0$ не имеет решений $\Rightarrow \varnothing$

(2) $\log_a x >$

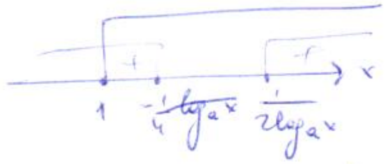
$(a-1)(x-1) > 0$

$\Rightarrow$ (а) $\begin{cases} a > 1 \\ x > 1 \end{cases}$

(б) $\begin{cases} a < 1 \\ x < 1 \end{cases}$

$\Rightarrow x \in (0; 1)$

$\Rightarrow$ полуинтервалы не будет



$\Rightarrow 1 = -\frac{1}{4\log_a x}$ (т.к. нужна точка, а не интервал)

$-4\log_a x = 1$ $\begin{cases} \boxed{\log_a x = -\frac{1}{4}} \\ a > 1 \\ x > 1 \end{cases}$

$\frac{1}{\sqrt[4]{a}} = x$

$\sqrt[4]{a} = m$ если $m < 1$

то $m^4 < 1 \Rightarrow a < 1$, но $a > 1$

$\Rightarrow \sqrt[4]{a} > 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[4]{a}} < 1 \Rightarrow x < 1$, но $x > 1 \Rightarrow \varnothing$

(4) $\log_a x < 0 \Rightarrow (a-1)(x-1) < 0$

$x_2 \vee x_1$

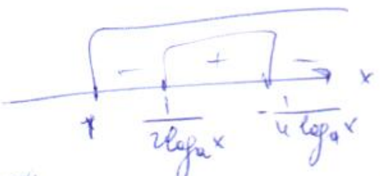
$-\frac{1}{4\log_a x} \vee \frac{1}{2\log_a x}$ | $-\frac{1}{4\log_a x} > 0 > \frac{1}{2\log_a x}$

(а) $\begin{cases} a > 1 \\ x < 1 \end{cases}$

$x \in (0; 1)$

$\Rightarrow$ полуинтервала не будет

(б) $\begin{cases} a < 1 \\ x > 1 \end{cases}$



Полуинтервала нет — т.к. решение отрезок

$\Rightarrow \varnothing$

~~(+) Продолжение: $\frac{1}{\sqrt[4]{a}} = x \Rightarrow \frac{1}{a} = x^4 \Rightarrow a = \frac{1}{x^4}$~~

~~Подставим в исходное~~

~~$8\frac{1}{\sqrt{a}}\log_a a^{-\frac{1}{4}} - \log_{a^{-\frac{1}{4}}} a - \frac{2}{\sqrt[4]{a}} \geq 0$~~

~~$-\frac{2}{\sqrt{a}} + 4 - \frac{2}{\sqrt[4]{a}} \geq 0$~~

~~Пусть $t = \sqrt{a}$ $\Rightarrow -\frac{2}{t^2} + 4 - \frac{2}{t} \geq 0$~~

~~$t > 1$~~

Ответ: $\varnothing$.