0244223280003

24-42-23-28
(123.3)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 10 класс

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по Математике
профиль олимпиады

Заборуева Ильи Петровича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

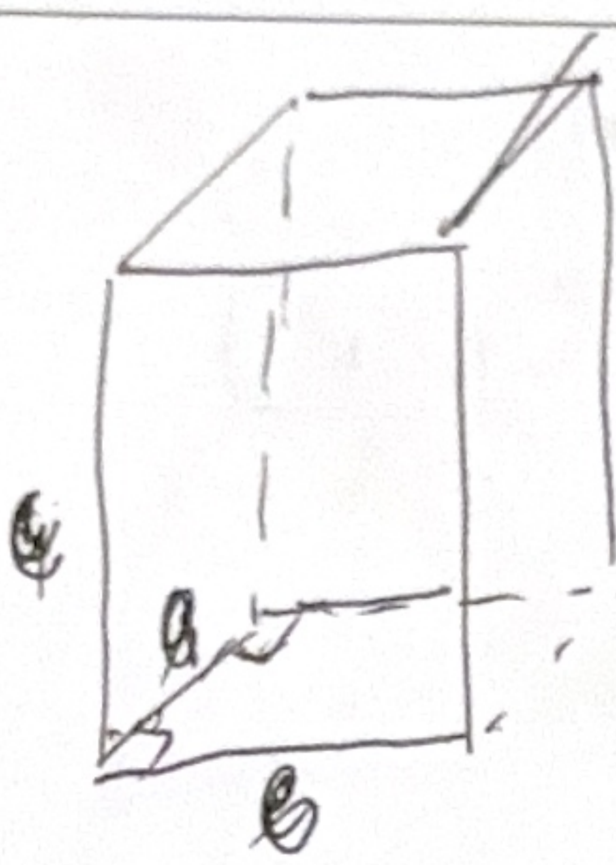
«29» марта 2026 года

Подпись участника

Заборуев

 50 (пятьдесят)

24-42-23-28
(123.3)



№1 Черновик

$$\overbrace{a\cdot b\cdot c}^{:2} + 2(ab+ac+bc) + 4(a+b+c) = 2026$$

$\min(a\cdot b\cdot c)$; $a, b, c \in N$

$$\frac{abc}{2} + ab+ac+bc+2(a+b+c) = 1013$$

Какое-то из a, b, c – четное, пусть a

$$\frac{abc}{2} + ab + ac + bc + 2(a+b+c) = 1013$$

Если bc – четное, то $\frac{abc}{2}$ тоже четн, но сумма $\vdots 2$ не $1013 \Rightarrow$

$\Rightarrow bc$ – нечетн; b – неч; c – неч. ; $a \vdots 4$

a	b	$a+b+\frac{ab}{2}$
4	1	7
8	1	13
12	1	19
16		25

$8+1+4=13$
$12+1+6=19$
$16+1+8=25$
$20+1+10=31$

Выразим c из уравнения

$$\frac{abc}{2} + ab+ac+bc+2a+2b+2c = 1013$$

$$c\left(\frac{ab}{2}+a+b+2\right) = 1013 - 2\left(a+b+\frac{ab}{2}\right)$$

$$c = \frac{1013-2\left(a+b+\frac{ab}{2}\right)}{\frac{ab}{2}+a+b+2} = \frac{1013-2t}{t+2} = \frac{н}{н}$$

$$t(b) = \left(\frac{a}{2}+1\right)b + a$$

$$\frac{1013-14}{9} = \frac{999}{9} = 111$$

$$c = \frac{1013-2t-4+4}{t+2} = \frac{1017}{t+2} - 2$$

a	b	c
4	1	111

~~Ответ: 444~~

1017 | 3
339 | 3
113 | 113
1

$t+2 \to \vdots 3$, $\vdots 9$, $\vdots 113$ — 1 вариант с вч с взаимозачен.

$2+t = a+b+\frac{ab}{2} \neq 3$; $a \geq 4$

$2+t_1 = 9$; $a=4$; $b=1$

$t=111$; $a=24$, $b=15$

$444+2(4+444+111)+4(1+4+111)$

$424+444=868$

$1118+868=1986$

$1118+908=2026$

$116\cdot 4=464$

$464+444=908$

min: a b c: $24\cdot 15\cdot 7 > 444$

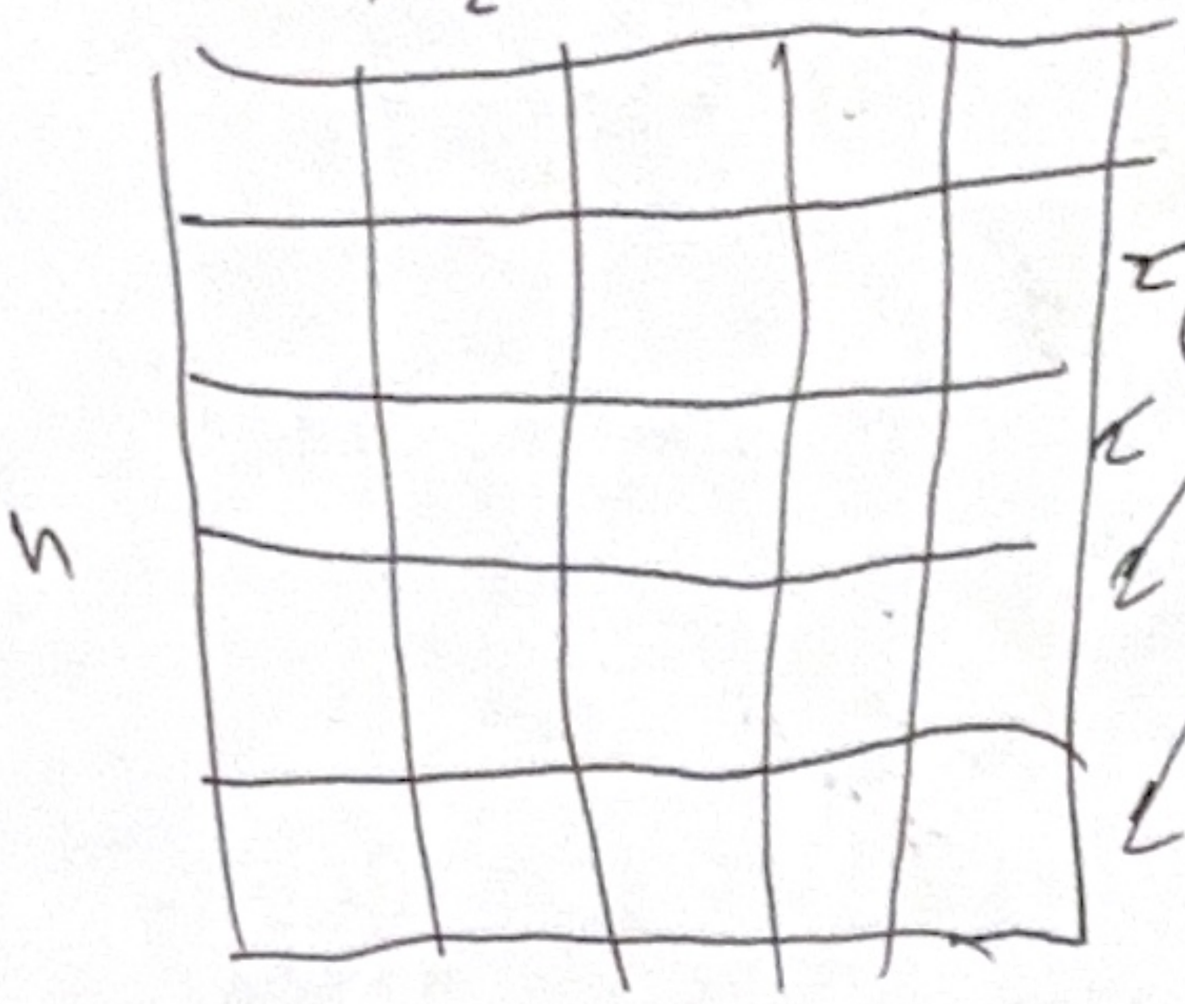
~~$24\cdot 10 \geq 444$~~

Ответ: 444

$5^2-(1+2+3+4)=\frac{4+1}{2}\cdot 4$ n

по этому ряду

$n+n-1+n-2+\dots+n-(n-1)$

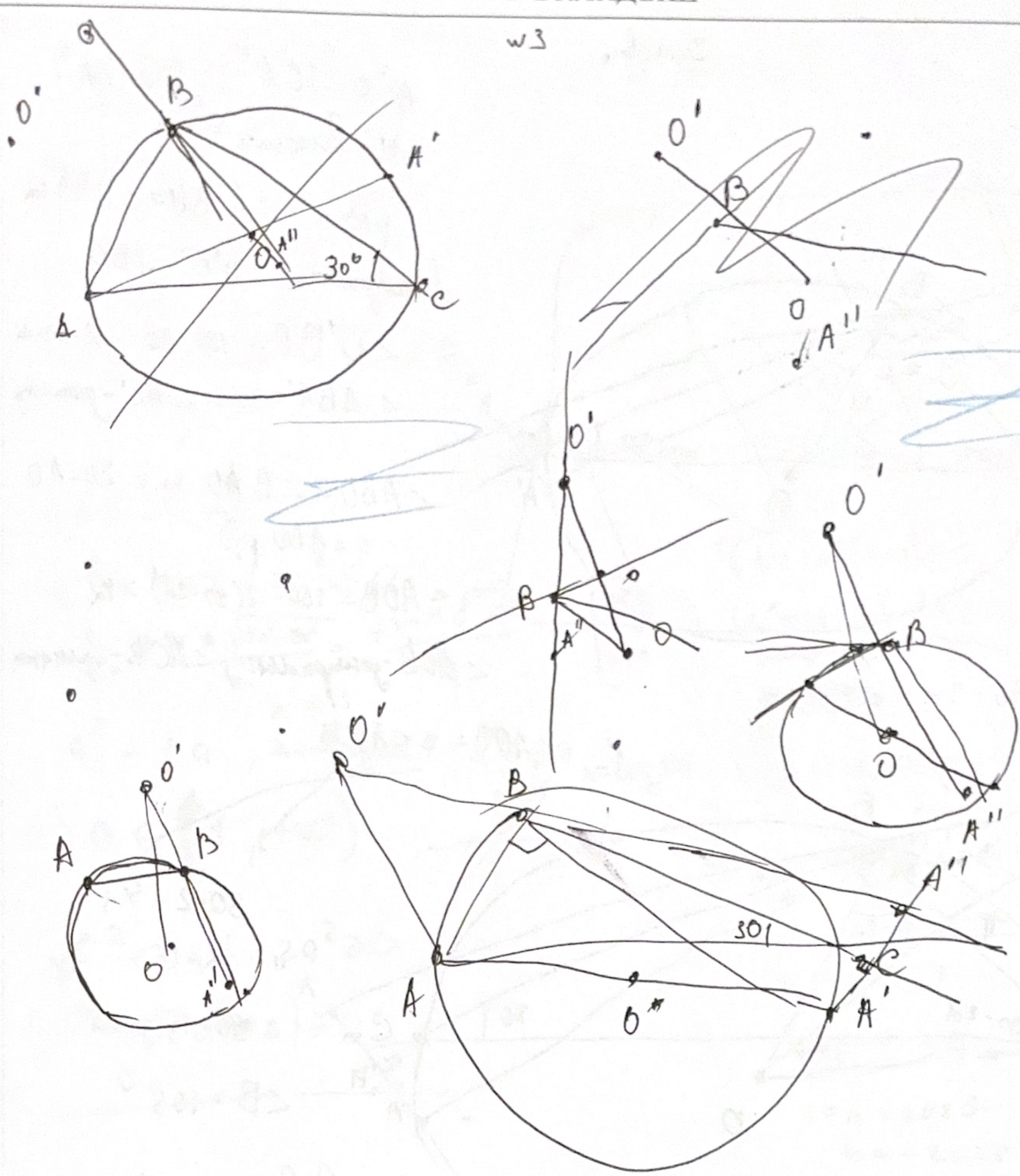


$n^2-(1+2+\dots+n-1)=n^2-\frac{n\cdot(n-1)}{2}$

$2(n^2-1)-\frac{(n-1)(n-2)}{2}$

24-42-23-28
(123.3)

w3



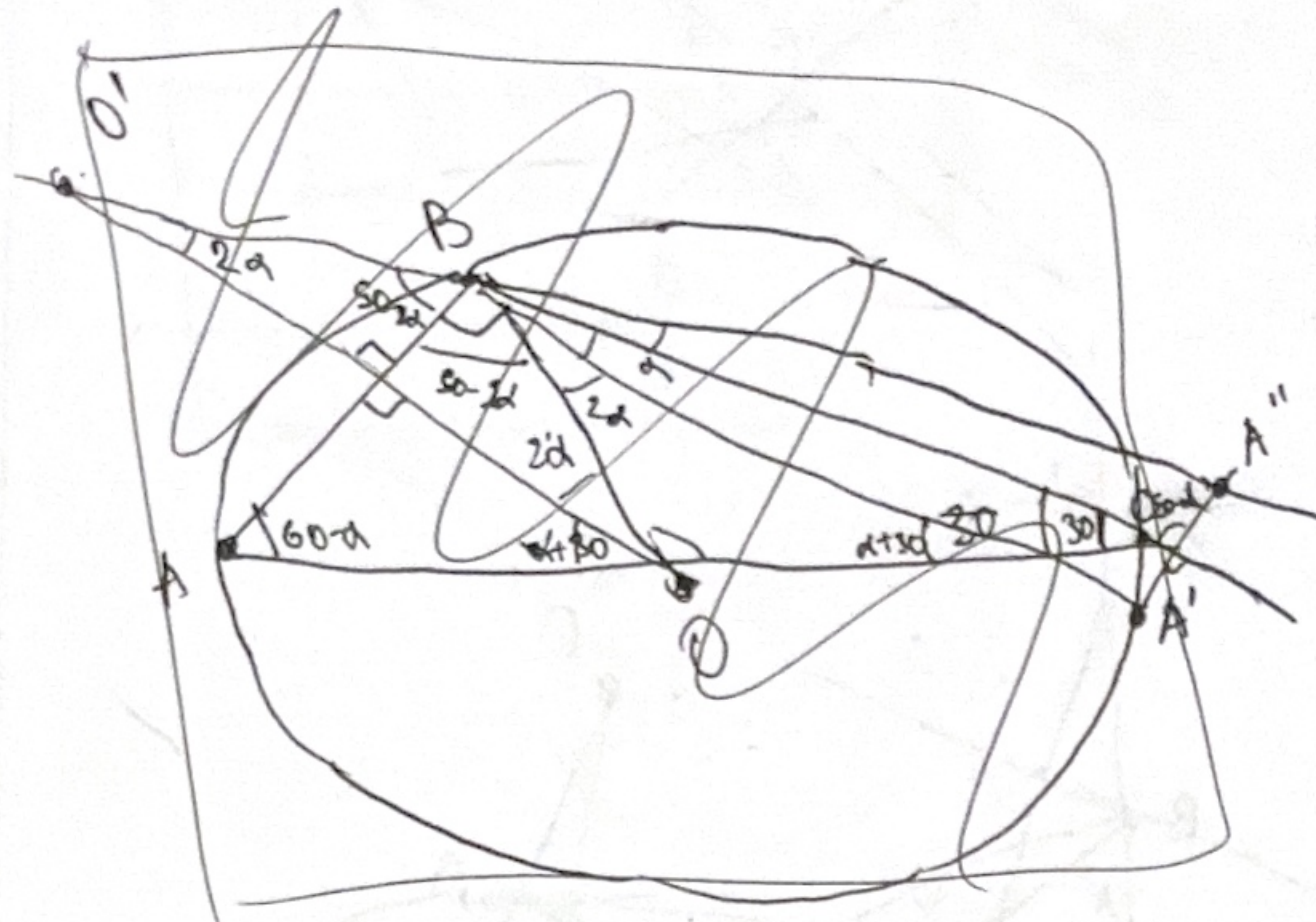
Чистовик

$A'C = CA''$ } $\Rightarrow A'BA''$

BH – высота }

– р/б △ ; $\angle A'BH = \angle HBA'' = \alpha$

Аналогично $\angle O'BT = \angle TBO$



$\angle O'BT = 180 - 90 - 2\alpha = 90 - 2\alpha$

$\angle ABA' = 90$ т.к AA' – диаметр

$\angle ABO = \angle BAO$ т.к $BO = AO$

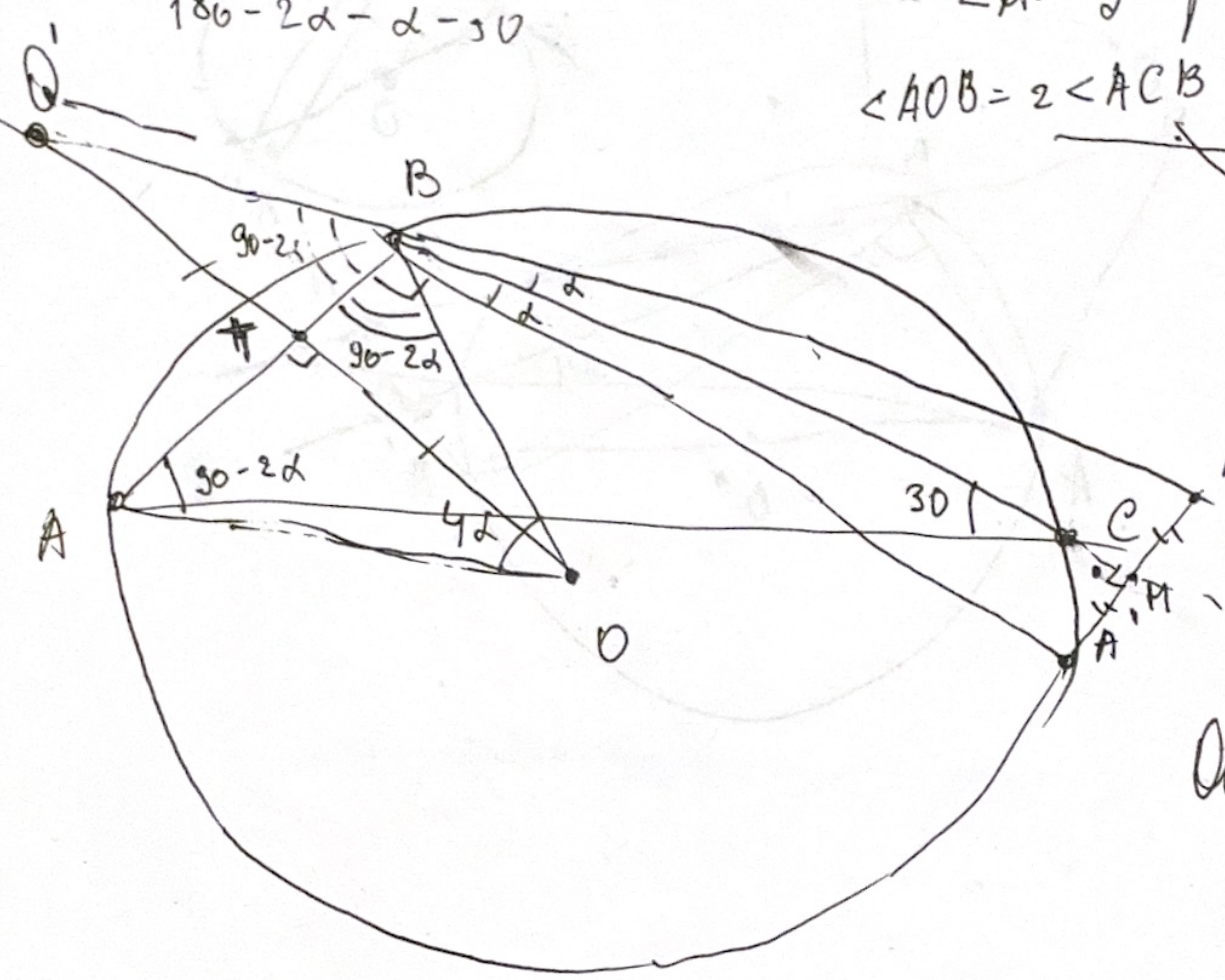
и △ABO р/б

$\angle AOB = 180 - 2(90 - 2\alpha) = 4\alpha$

$\angle AOB$ – центральный, $\angle ACB$ – вписанн.

$186 - 2\alpha - \alpha - 30$

$\angle AOB = 2\angle ACB$



$30 \cdot 2 = 4\alpha$

$\alpha = 15$

$90 + 15 = 105$

$\angle B = 105^\circ$

Ответ: 105°

24-42-23-28 (1233)

чистовик

$$\frac{a^{2x} - 3a^{x+1} + 2a^2}{\log_2 a} \geq 0 \; ; \; x \in [n; n+2026)$$

$\log_2 a \neq 0$

$a > 0 \; ; \; a \neq 1$

$a^x = t$

$$\frac{a^{2x} - 3a^x \cdot a + 2a^2}{\log_2 a} \geq 0$$

1) $a \in (0; 1)$

$t^2 + 3at + 2a^2 \leq 0$

$t = \frac{+3a \pm \sqrt{9a^2 - 8a^2}}{2} = \frac{+3a \pm \sqrt{a^2}}{2} = \left[\begin{array}{l} +2a \\ +a \end{array}\right.$

$(t+2a)(t+a) \leq 0$

$(a^x - 2a)(a^x - a) \leq 0$

$>0 \quad >0 \quad 0$

~~$a \in \varnothing$~~

$a^x = +a \; ;$ ~~$x = \log_a a 1$~~ $x = 1 \; ; \; a^x = 2a$

$x = \log_a 2a = \log_a 2 + \log_a a = \log_a 2 + 1$

2) $a \in (1; +\infty)$

$(x - (\log_a 2 - 1))(x - 1) \leq 0$

$+ \quad - \quad +$

$\log_a 2 + 1 \quad 1 \quad x$

$t^2 + 3at + 2a^2 \geq 0$

$(a^x - 2a)(a^x - a) \geq 0$

$\log_a 2 + 1 = n$

$1 = n + 2026$

$n = -2025$

$\log_a 2 = -2026$

$a^{-2026} = 2$

$a = \sqrt[-2026]{2} = 2^{-\frac{1}{2026}}$

$(x - \log_a 2 - 1)(x - 1) \geq 0$

$+\infty$ не подходит

$+ \quad - \quad +$

$1 \quad \log_a 2 + 1 \quad x$; ~~$a \in (1; +\infty)$~~

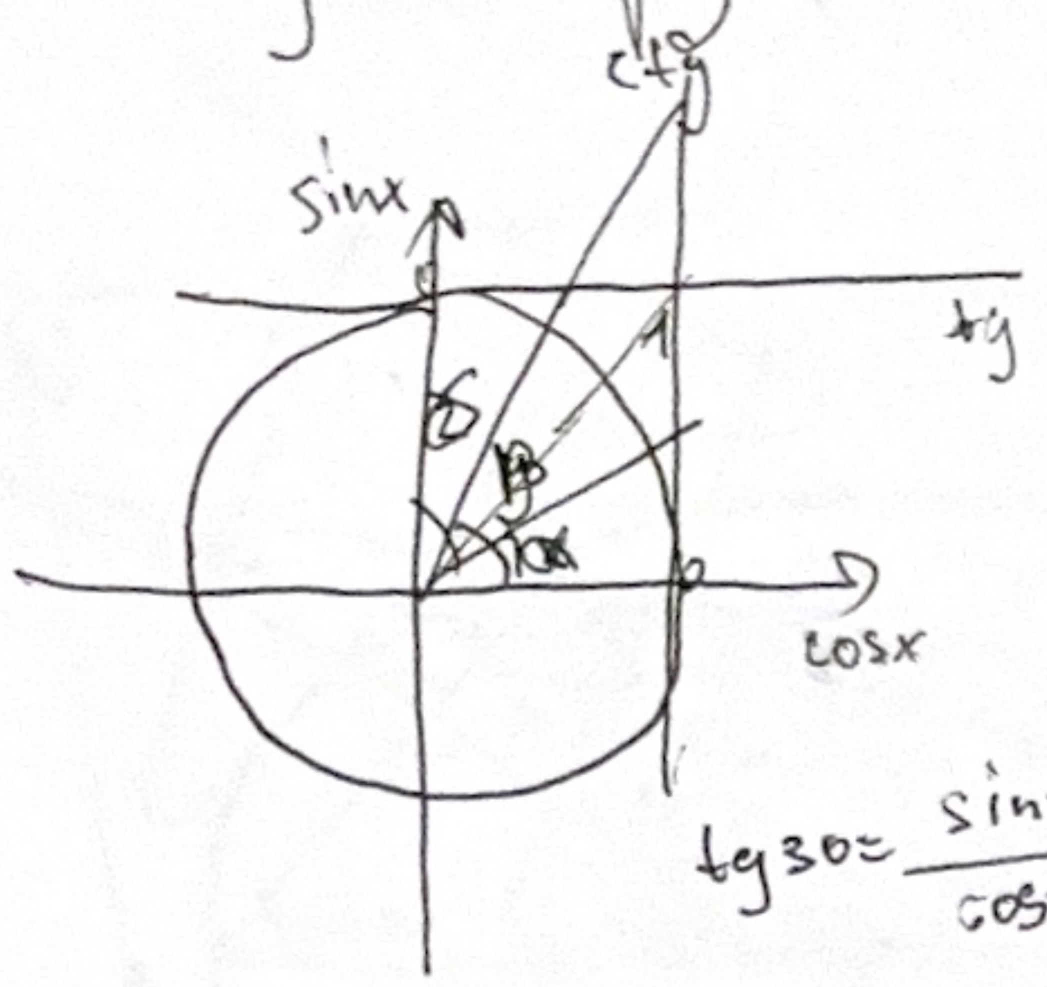
$\log$

Ответ: при ~~$a = \sqrt[-2026]{2}$~~

$a = 2^{-\frac{1}{2026}}$

 чистовик

tg на отрезке от 0 до $\frac{\pi}{2}$ возрастает $\frac{\sin x\uparrow}{\cos x\downarrow}$



$\cancel{\alpha+\beta}$ $\quad \gamma=\frac{\pi}{2}$

$tg\,\alpha \cdot tg(\beta-\alpha)\cdot tg(\gamma-\beta-\alpha)$

$$tg(\beta-\alpha)=\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\cos(\beta-\alpha)}=\frac{\sin\beta\cos\alpha-\sin\alpha\cos\beta}{\cos\beta\cos\alpha+\sin\beta\sin\alpha}=$$

$$tg30=\frac{\sin 30}{\cos 30}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt3}{2}}=\frac{\sqrt3}{3}=\frac{tg\beta-tg\alpha}{1+tg\beta\, tg\alpha}$$

$\beta=x+y \quad \alpha=x$

$\gamma=x+y+z$

$$tg\alpha\cdot\frac{tg\beta-tg\alpha}{1+tg\beta\,tg\alpha}\cdot\frac{tg\beta+tg\alpha}{1-tg\beta\,tg\alpha}=tg\alpha\cdot\frac{tg\beta^2-tg\alpha^2}{1-tg^2\beta\,tg^2\alpha}$$

$$\max\left(tg x\cdot\frac{tg^2(x+y)-tg^2x}{1-tg^2(x+y)\,tg^2y}\right); \quad x+y\neq\frac{\pi}{2}, \quad y\neq\frac{\pi}{2}-x$$

$$\max\left(tg x\cdot\frac{tg^2\frac{\pi}{2}-tg^2x}{1-tg^2\frac{\pi}{2}\cdot tg x}\right)$$

$$P=tg(30+\alpha)\,tg(30+\beta)\,tg(30+\gamma)$$

$\alpha+\beta+\gamma=0$

$\alpha=-\beta-\gamma$

$$tg(30-(\beta+\gamma))=\frac{tg30-tg(\beta-\gamma)}{1+tg30\cdot tg(\beta+\gamma)}$$

$$P=\frac{tg30-tg(\beta-\gamma)}{1+tg30\,tg(\beta+\gamma)}\cdot tg(30+\beta)\cdot tg(30+\gamma)=$$

$$=\frac{tg30-\frac{tg\beta-tg\gamma}{1+tg\beta\,tg\gamma}}{1+tg30\frac{tg\beta+tg\gamma}{1-tg\beta\,tg\gamma}}\cdot\frac{tg30+tg\beta}{1+tg30\,tg\beta}\cdot\frac{tg30+tg\gamma}{1+tg30\,tg\gamma}$$

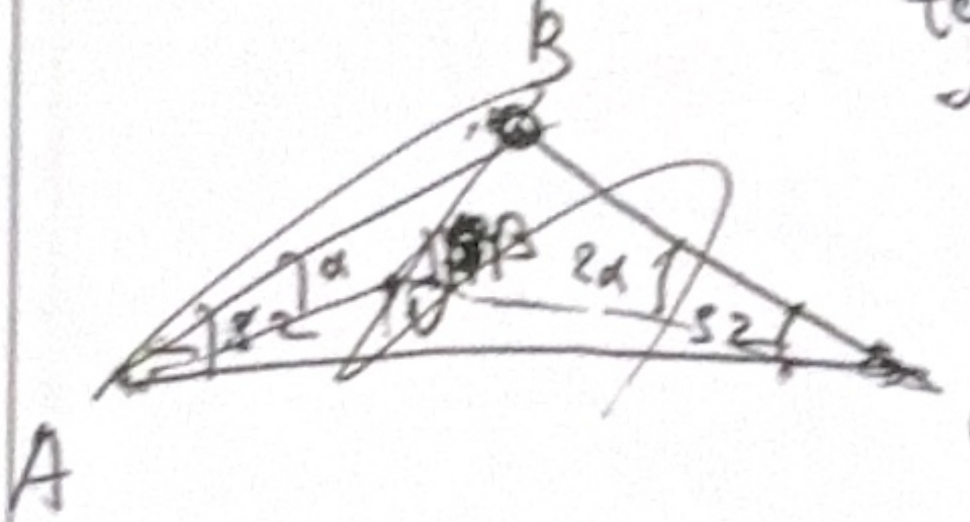
max P при $\alpha,\beta,\gamma=0$, $\max P=tg^3 30=\left(\frac{\sqrt3}{3}\right)^3=\frac{3\sqrt3}{3^3}=\frac{\sqrt3}{9}$

Ответ: $\frac{\sqrt3}{9}$

№6 Чистовик

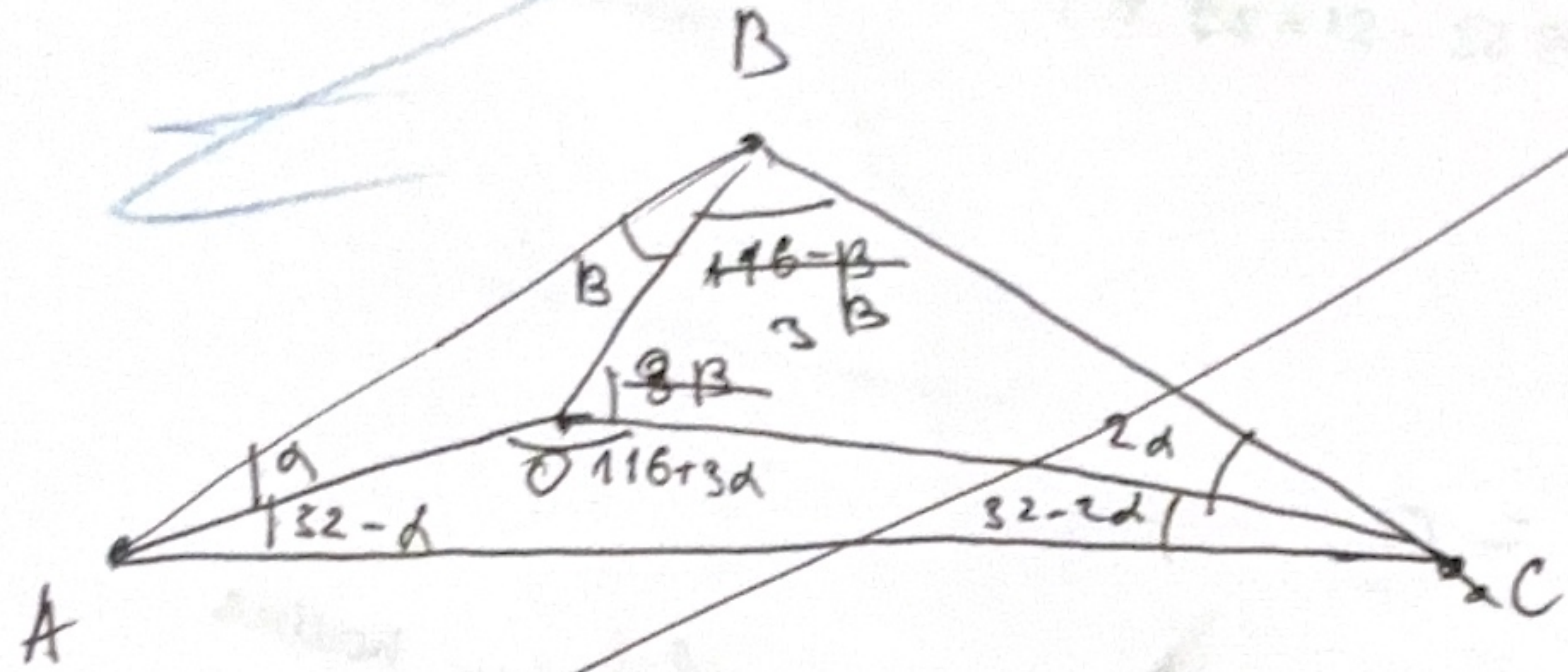
$tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$

$ctg2\alpha = \frac{1-tg^2\alpha}{2tg\alpha}$



$180-64 = 116$

$116-\beta+3\beta+2\alpha=180$



$2\beta+2\alpha=64$

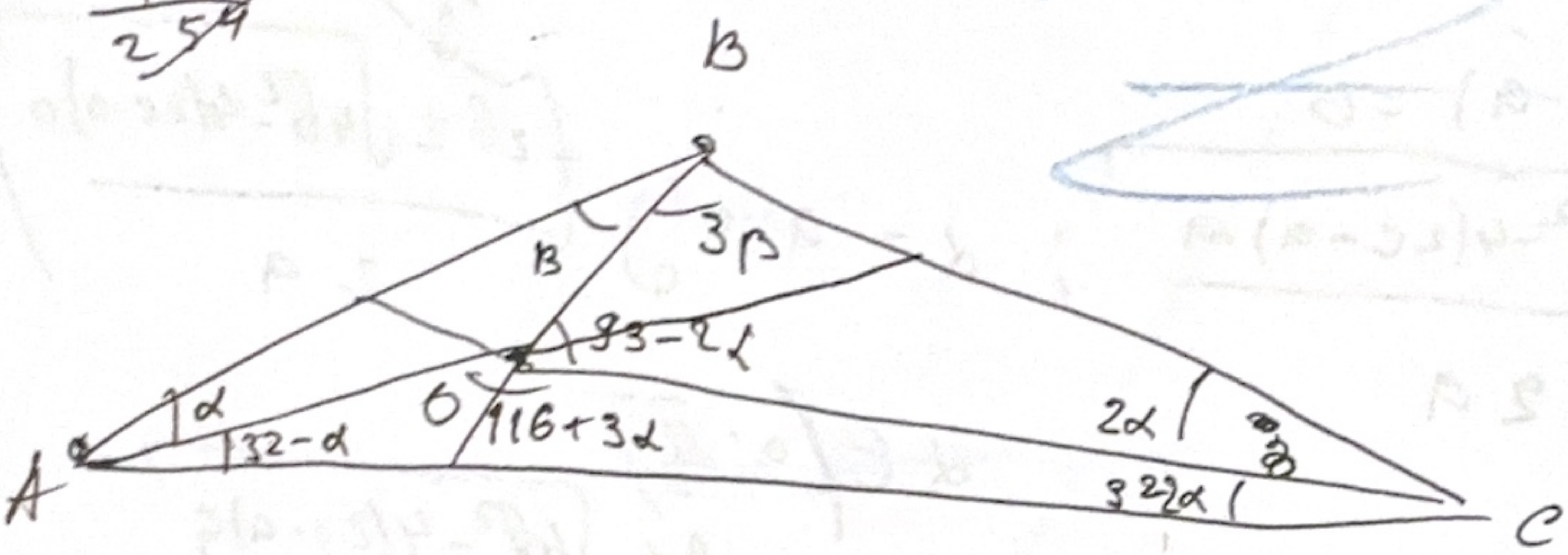
$\alpha+\beta=32$

$180-32=148=\angle BOA=$

$=360-3\beta-116-3\alpha=$

$=254-3(\alpha+\beta)$

$360-116=254$



$29\times3=87$ $180-87=93$

$\angle BOC=180-3\beta-2\alpha=93-2\alpha$

$\angle AOB=360-(93-2\alpha)-(116+3\alpha)=$

$=151-\alpha$

$4\beta=180-64=116$

$\beta=29$

$360-93=267$ $267-116=151$

По теореме чевы:

$$\frac{\sin(32-2\alpha)}{\sin2\alpha}\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin(32-\alpha)}\cdot\frac{\sin3\beta}{\sin\beta}=1$$

$$\frac{\sin32\cdot\cos2\alpha-\sin2\alpha\cdot\cos32}{\sin2\alpha}\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin32\cdot\cos\alpha-\sin\alpha\cdot\cos32}\cdot\frac{\sin87}{\sin29}=1$$

~~$\sin32\cdot\cos2\alpha\cdot\sin87-\sin2\alpha\cdot\cos32$~~

$$(\sin32\cdot ctg2\alpha-\cos32)\cdot\frac{1}{\sin32\cdot ctg\alpha-\cos32}\cdot\frac{\sin87}{\sin29}=1$$

$ctg2\alpha\cdot\sin32\cdot\sin87-\cos32\cdot\sin87=\sin29\cdot\sin32\cdot ctg\alpha-\cos32\cdot\sin29-1=0$

чистовик

$$\frac{1-tg^2\alpha}{2\,tg\alpha}\cdot a-b-c\cdot\frac{1}{tg\alpha}=0\ ;\quad tg\alpha=x\ ;\ \cdot x$$

$a=\sin 32\cdot\sin 87$

$b=\cos 32\cdot\sin 87+\cos 52\cdot\sin 29+1$

$c=\sin 29\cdot\sin 32$

$$\frac{a}{2}\cdot\frac{1-x^2}{\ }-bx-c=0$$

$$a-ax^2-2bx-2c=0$$

$$ax^2+2bx+(2c-a)=0$$

$$x=\frac{-2b\pm\sqrt{4b^2-4(2c-a)\cdot a}}{2a}\ ;\quad \alpha=\operatorname{arctg}\left(\frac{-2b\pm\sqrt{4b^2-4(2c-a)a}}{2a}\right)$$

выразить положе

$\alpha\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$

$$\frac{\angle BAA}{\angle BAO}=\frac{151-\alpha}{\alpha}=\frac{151-\operatorname{arctg}\frac{-2b\pm\sqrt{4b^2-4(2c-a)a}}{2a}}{\operatorname{arctg}\frac{-2b\pm\sqrt{4b^2-4(2c-a)a}}{2a}}$$

Ответ