0 210763 780006

21-07-63-78
(128.2)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 10 класса

Место проведения г. Ульяновск
город

+1 лист
Зайц

GMT+4
выход: 14:26 – 14:27
Зайц

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

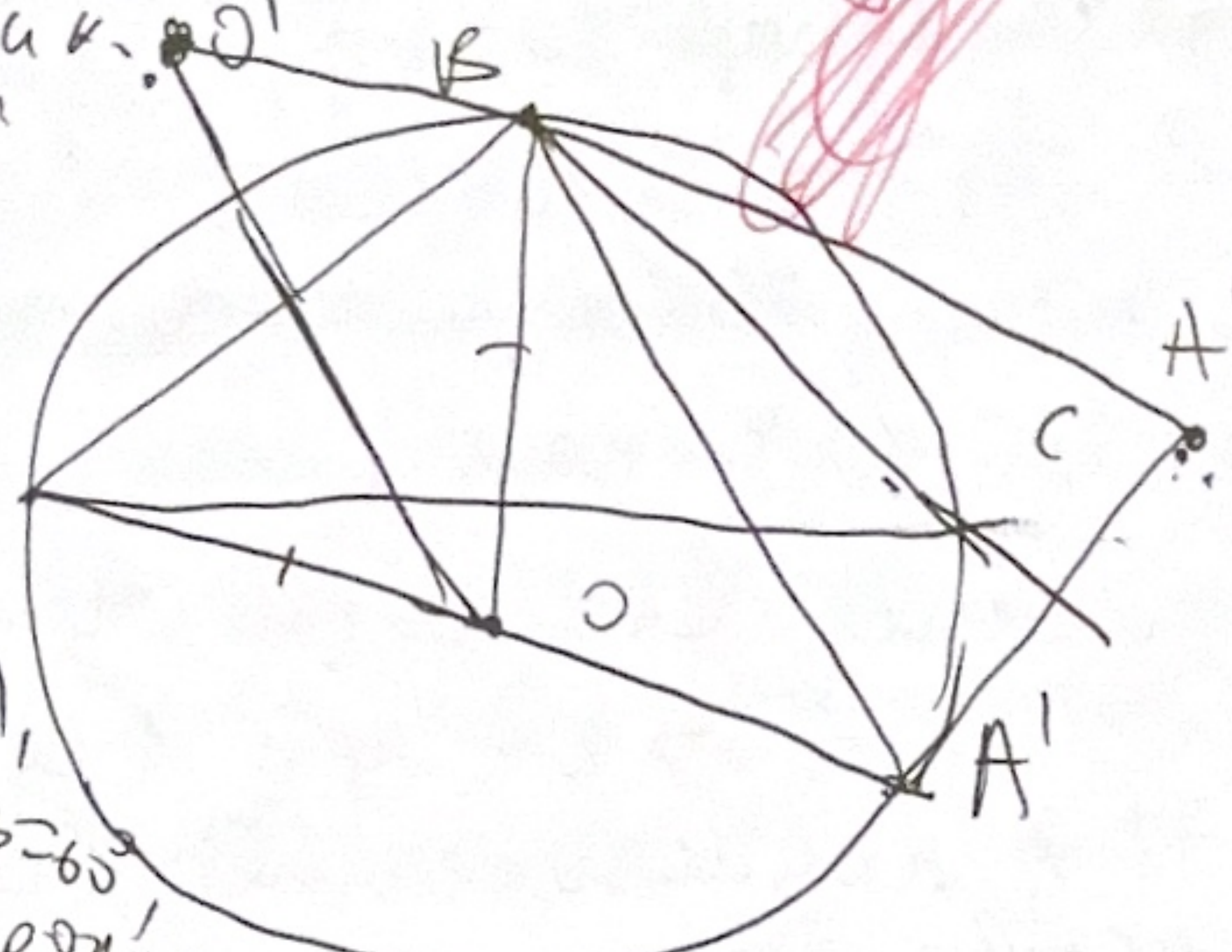
по математике
профиль олимпиады

Зайцева Глеба Александровича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«29» марта 2026 года

Подпись участника

Чистовик.



Задача 3: (см *)

т.к. $\angle C = 30^\circ$,
то центральный угол $\angle AOB = 2\angle C = 60^\circ$
а т.к. O – центр. окр(ABC), то $OA = OB$, а т.к. $\angle AOB = 60^\circ$, то $\triangle AOB$ – равносторонний, а значит $\angle ABO = 60^\circ$,
пусть A' – диаметр. противополож. т. A
тогда $\angle ABA' = 90^\circ$, а т.к. $O'-B-A''$ – одна пр., то из симметрии $\angle O'BA = \angle ABO = 60^\circ$,
$\angle A'BA'' = 180^\circ - \angle ABA' - \angle ABO = 30^\circ$
из симметрии, BC – биссект. $\angle A'BA''$, поэтому
$\angle A'BC = 15^\circ$, а тогда $\angle B = \angle ABA' + \angle A'BC = 105^\circ$.

* картинка именно такая так как в других случаях (остроугольного треугольника или $\angle A$ – тупой) точки $O'-B-A''$ не лежат на одной прямой

Ответ: $\angle B = 105^\circ$.

Задача 4: Условие на a: $a > 0$, чтобы $\log_2 a$ был определен, $a \neq 1$, т.к. $\log_2 a \neq 0$

приступим к задаче:
если $a > 1$; $\log_2 a > 0$, тогда

$$\frac{a^{2x} - 3a^{x+1} + 2a^2}{\log_2 a} \geqslant 0$$

$\Updownarrow$

$a^{2x} - 3a^{x+1} + 2a^2 \geqslant 0$, если $t = a^x$, то

$t^2 - 3at + 2a^2 \geqslant 0$, по т. Виета:

$\begin{cases} t_1 + t_2 = 3a \\ t_1 t_2 = 2a^2 \end{cases}$ $\begin{cases} t_1 = a \\ t_2 = 2a \end{cases}$, поэтому решением неравенства являются бесконечное число положительных t.

чистовик

задача 4 (продолж): а именно подходят все $t > 2a$, то есть все x, такие что $a^x > 2a$, ~~...~~ подходят все x начиная с какого-то момента (больше какого-то числа), т.к. $a > 1$, $a^{x-1} > 2$ — при всех $x > \log_a 2 + 1$, а это подмножество всех решений неравенства не может представлять отрезок длиной 2026, ~~...~~ т.к. не ограничено, а значит и у всего уравнения множество решений неограничено, а зн. не представляет собой отрезок длиной 2026.

если $a < 1$: $\log_2 a < 0$, а значит:

$$\frac{a^{2x} - 3a^{x+1} + 2a^2}{\log_2 a} \geq 0 \iff a^{2x} - 3a^{x+1} + 2a^2 \leq 0,$$

пусть $a^x = t$, тогда

$t^2 - 3at + 2a^2 \leq 0$, по т. Виета: $\begin{cases} t_1 + t_2 = 3a \\ t_1 t_2 = 2a^2 \end{cases}$,

$\begin{cases} t_1 = a \\ t_2 = 2a \end{cases}$ (тогда решением неравенства является $t \in [a; 2a]$, то есть

$a \leq a^x \leq 2a$, т.к. $a < 1$, то:

$\log_a a \geq \log_a a^x \geq \log_a 2a$;

$1 \geq x \geq 1 + \log_a 2$, то есть $x \in [1 + \log_a 2; 1]$, и множество всех решений должно представлять отрезок длины 2026, то есть:

$-\log_a 2 = 2026$

$\frac{1}{2} = a^{2026}$, $a = \sqrt[2026]{\frac{1}{2}}$, т.к. $a > 0$

Ответ: $\sqrt[2026]{\frac{1}{2}} = a$

21-07-63-78 (128.2)

чистовик

задача: пусть $a < b < c$ — длина, ширина, высота. ~~тогда рассмотрим случай $a=1$~~. Объём призмы abc, площадь её полной поверхности $2ab + 2bc + 2ca$, сумма всех рёбер: $4a + 4b + 4c$, по условию:

$abc + 2ab + 2bc + 2ca + 4a + 4b + 4c = 2026$.

Рассмотрим 3 случая: первый: $a = 1$:

тогда $2026 = abc + 2ab + 2bc + 2ca + 4a + 4b + 4c \overset{a=1}{=}$

$= 3bc + 6b + 6c + 4 = 3(c+2)(b+2) - 8$

то есть $3(b+2)(c+2) = 2034$

$(b+2)(c+2) = 678 = 2 \cdot 3 \cdot 113$ (разлож на простые множители)

а т.к. $b+2$ и $c+2$ — натуральные числа, то $c+2 > b+2 > 2$, тогда 2 возможных случая:

1. $\begin{cases} b+2 = 3 \\ c+2 = 226 \end{cases}$, но все a, b, c — попарно различные, а в этом случае $a = b = 1$

2. $\begin{cases} b+2 = 6 \\ c+2 = 113 \end{cases}$; $\begin{cases} b = 4 \\ c = 111 \end{cases}$, $abc = 444$

2 случай: $a = 2$:

$2026 = abc + 2ab + 2bc + 2ca + 4a + 4b + 4c = 4bc + 8b + 8c + 8$ ~~...~~, но $2026 = 2024 + 2$ не делится на 4

$4bc + 8b + 8c + 8 = 4(bc + 2b + 2c + 2) \,\vdots\, 4$, значит такой случай невозможен

$a \geq 3$, т.к. $a < b < c$, то $b \geq 4$:

3 случай

$2026 = abc + 2ab + 2bc + 2ca + 4a + 4b + 4c \overset{\text{см}(1)}{\leq}$

$\leq abc + 3bc + 4ac + 12c \overset{\text{см}(2)}{\leq} abc + 2abc + abc = 4abc$

(1): $3bc + 4ac \geq 2ab + 2bc + 2ca$: $bc + 2ac \geq 2ab$ — верно, т.к. $2ac > 2ab$, т.к. $c > b$.

$4a + 4b + 4c \leq 12c$, т.к. $c > a$ и $c > b$.

чистовик

Задача 1 продолж:

(г): $abc \geq 3bc$, т.к. $a \geq 3$.

$abc \geq 4ac$, т.к. $b \geq 4$.

$abc \geq 3 \cdot 4c = 12c$, т.к. $a \geq 3$, $b \geq 4$.

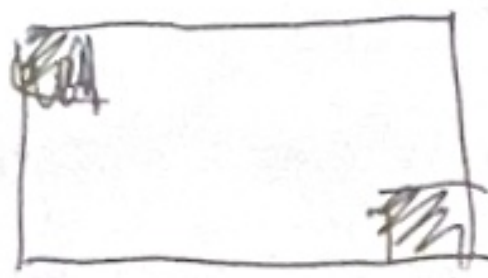
Поэтому в этом случае $4abc \geq 2026$,

$abc \geq \frac{2026}{4} > 500 > 444$

Ответ: 444

Задача 2: (см *)

В каждом прямоугольнике выберем 2 клетки — верхнюю левую угловую, правую нижнюю угловую, как на рисунке;



Тогда по 2 клеткам, можно однозначно восстановить прямоугольник, в котором эти выбраны, ~~эту задача сводится~~ (то есть в котором эти 2 клетки явл. верхн. левым угл. и правой нижн. угл.), поэтому, задача сводится к тому чтобы посчитать число пар клеток таких, что прямоуг. в котором эти выбраны подходит для вырезания под условие задачи:

Всего способов выбрать две клетки из 101^2 клеток всей доски: $C^2_{101^2}$, давайте отождествим 2 клетки с прямоугольником в котором они выбраны, поэтому в решении я буду использовать оба термина: и пара клеток, и прямоугольник.

21-07-63-78 (128.2)

чистовик

Посчитаем число способов, таких, что при вырезании прямоугольника внутри ост. фигуры были дырки внутри:

Дырка появляется в том случае, когда обе выбранные клетки лежат строго внутри фигуры, а не на каёмке (каёмка — объединение двух крайних столбцов и двух крайних строк, как на рис.

(закрашено каёмкой)

Число способов выбрать 2 клетки, ни одна из которых не находится в каёмке: $C^2_{99^2}$, т.к. в кв. 101×101 без каёмки 99^2 клеток.

Посчитаем число выбрать 2 клетки так, что при вырезании квадрат распадается на 2 ~~фиг~~ фигуры:

Если одна из 2 выбранных клеток находится в углу каёмки (4 углов. клетка каёмки) то фигура при таком вырезании не распадается на 2 части поэтому фигура распадается на 2 части, когда обе выбранные клетки находятся либо одновременно на 2 крайних столбцах, либо одновременно на двух крайних строках, но ни одна из них не угловая клетка доски, поэтому таких способов: $2 \cdot 99^2$, т.к. на крайних столбцах и строках без угловых клеток по 99 клеток.

Также выбранный прямоугольник может совпадать с квадратом 101×101, то есть когда 2 выбр. клетки это угловые клетки квадрата, таких способов 2.

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

чистовик

Поэтому число способов выбрать 2 клетки таких, что, при вырезании прямоугольника, который им соответствует, квадрат не распадается на 2 части, у этой фигуры не было дырок внутри, и прямоугольник был размером меньше квадрата:

$C^2_{101^2} - C^2_{99^2} - 2\cdot 99^2 - 2$, а тогда

число способ выбрать 2 прямоугольника $\frac{C^2_{101^2} - C^2_{99^2} - 2\cdot 99^2 - 2}{2}$, т.к. каждому прямоугольнику соответствует 2 пары выбранных клеток.

Ответ: $\frac{101^2(101^2-1)}{4} - \frac{99^2(99^2-1)}{4} - 99^2 - 1$.

*. Начало работы неправильно сформулировано, ~~каждому~~ в каждом прямоугольнике можно выбрать по 2 пары противоположных угловых клеток, но любой паре клеток соответствует ровно 1 прямоугольник, в котором они противоположные угловые клетки, в работе я считаю число пар клеток для которых, ~~и~~ для ~~выб~~ соответствующего им прямоугольника не выполняется условие задачи, и вычитаю это число из всех способ выбрать пару клеток, а затем делю на 2, чтобы найти число прямоугольников, вырезание которых удовлетворяет условию задачи.

чистовик

Задача 5: по ~~формуле~~ приведения

$tg z = tg(\frac{\pi}{2} - x - y) = ctg(x+y) = \frac{1}{tg(x+y)}$,

по формуле тангенс суммы:

$tg(x+y) = \frac{tg(x)+tg(y)}{1-tg(x)tg(y)}$, все формулы верны, т.к. $0<x,y,z<\frac{\pi}{2}$,

поэтому необходимо найти наибольшее значение функции:

$tgx\,tgy\,tgz = \frac{tgx\,tgy}{tg(x+y)} = \frac{tgx\,tgy(1-tgx\,tgy)}{tg(x)+tg(y)}$,

зафиксируем y, тогда $x\in(0;\frac{\pi}{2}-y)$, т.к. $0<x+y<\frac{\pi}{2}$, и по $x+y<\frac{\pi}{2}$ однозначно восст. $z=\frac{\pi}{2}-x-y$.

Как известно, экстремумы функции от x (т.к. y - фиксированный), является одним из корней производной функции на интервале:

$f(x) = \frac{tgx\,tgy(1-tgx\,tgy)}{tg(x)+tg(y)}$, где y - фикс, а x - переменная,

$tgy = t$, тогда $u = tgx\,t(1-tgx\,t) = t\cdot tgx - (tgx\,t)^2$

$u' = \frac{t}{\cos^2 x} - \frac{2tgx\,t\cdot t}{\cos^2 x} = \frac{t-2tgx\,t^2}{\cos^2 x}$

$v = tg(x)+t$; $v' = \frac{1}{\cos^2 x}$

№5: (чистовик).

$$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{\dfrac{t(1-2tg(x)t)(tgx+t) - tg(x)t(1-tg(x)t)}{\cos^2 x}}{(tgx+t)^2} =$$

$$= \frac{t(1-2tg(x)t)(tgx+t) - tg(x)t + t^2 tg^2 x}{\cos^2 x\,(tgx+t)^2}$$

т.к. $0<x, y<\frac{\pi}{2}$, то $tgx \neq 0, tgy \neq 0$.

$f'(x)=0$, при $x\in(0;\frac{\pi}{2})$;

$$\frac{t\left(tgx + t - 2t\,tg^2x - 2t^2 tgx - tg(x) + t\,tg^2x\right)}{\cos^2 x\,(tgx+t)^2} = 0;$$

~~$tgx + 3t\,tg^2 x - 2t^2 tgx + t = 0$~~

~~$tg^2x + 3tgx + 2t\,tgx - 1 = 0$~~

$t\,tg^2x + 2t^2 tgx - t = 0$

$tg^2 x + 2t\,tgx - 1 = 0$, $e = tgx, e>0$

$e^2 + 2te - 1$

$D = 4t^2 + 4 = 4(t^2+1)$

$e_1, e_2 = \frac{-2t \pm 2\sqrt{t^2+1}}{2}$, т.к. $t>0$, $e>0$,

то $e = -t + \sqrt{t^2+1}$

пусть a-наиб. (черновик)

$abc + 2ab + 2bc + 2ca$

$ab + 2a + 2b + 2ab + 4 + 4a + 4b =$

$= 3ab + 6a + 6b + 4 = (a+2)(3b+6) - 8$

~~$(a+2)$~~ $3(a+2)(b+2) = 2026 + 8 = 2034$

$(a+2)(b+2) = 678$.

$2034 : 3 = 678$; 18; 23; 21; 24

$678 = 200 + 26$

$226 : 2$

$113 \cdot 3 \cdot 2$

$(a+2) = (a+2) = 6$

$(b+2) = 113$

$b+2=3$

$a+2=226$

678

$1800 + 210 + 24$

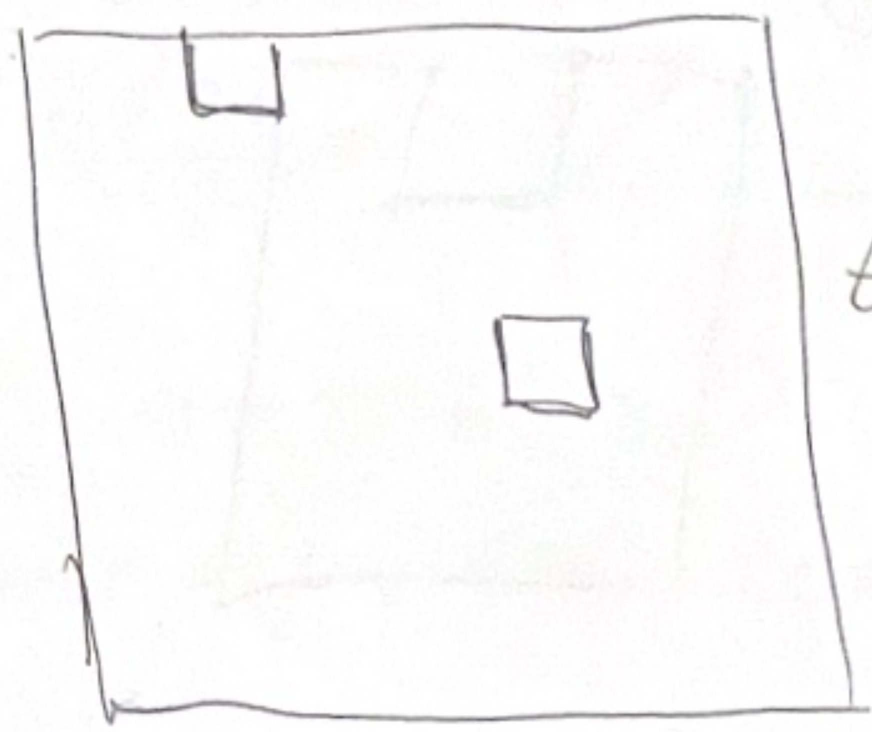
$4 \cdot 111 = 444$

$2260 - 226 =$

228

$2240 - 224 =$

$= 2016$.



$tgx = \frac{\sin x}{\cos x} =$

$tg(x)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$

черновик

$abc + 2ab + 2bc + 2ca + 4a + 4b + 4c$

~~$a+bc+2b$~~

$a = b = 1$

$c + 2 + 2c + 2c + 4 + 4 + 4c = 2026$

$9c = 2026 - 10$

2016 $\qquad x^2 = 2x$

$\frac{2016}{9}$

$a = 1$

$abc + 2ab + 2bc + 2ca + 4a + 4b + 4c + a$

$(a-1)bc -$

$-bc - 2b - 2c - 4$

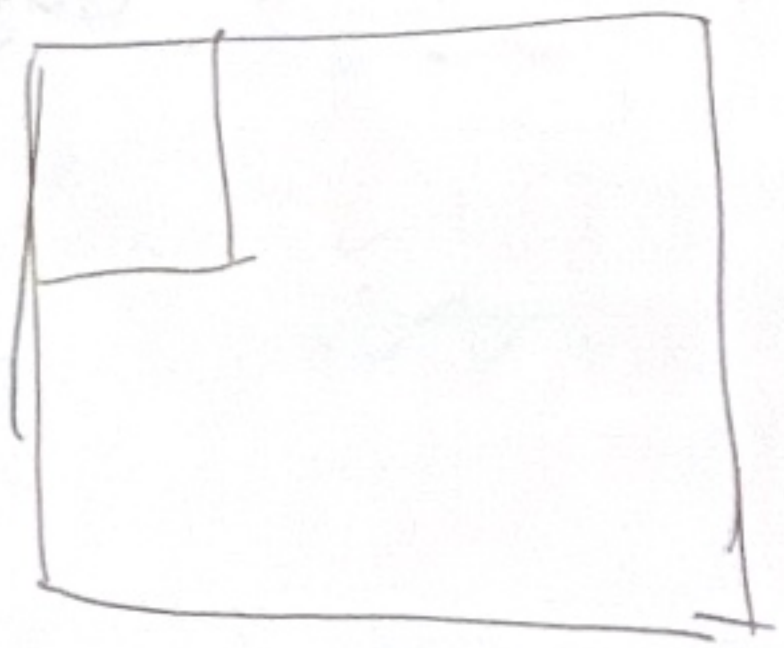
$a^x = t$ $\qquad a \geq 0,$ если $a < 1$

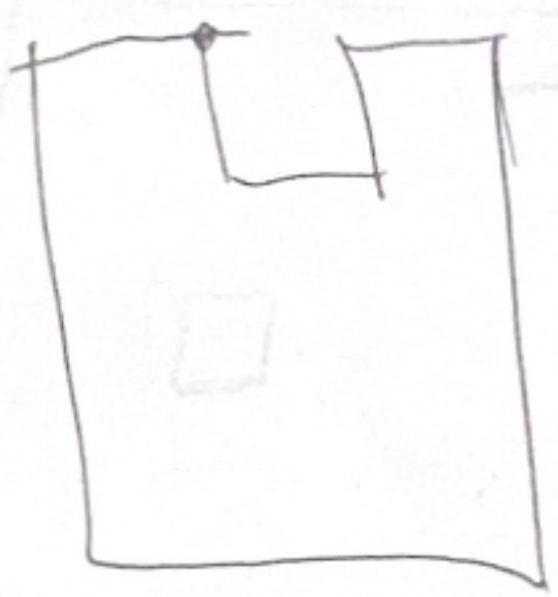
$$\frac{t^2 - 3at + 2a^2}{\log_2 a} \geq 0 \qquad \log_2 a < 0$$

$t^2 - 3at + 2a^2 \geq 0$

корни $a, 2a$

$(t-a)(t-2a) \geq 0$





ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

черновик

$\sin x \cdot \sin y =$ $\qquad abc \leq 4a + 4b + 4c$

$\sin x \sin y$

$\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x - y\right) = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y \operatorname{ctg}(x+y)$

$$\frac{\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}{\operatorname{tg}(x+y)}$$

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} = \frac{\sin x \cos y + \sin y \cos x}{\cos x \cos y - \sin x \sin y} =$$

$$= \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}. \qquad \operatorname{tg} x = t, \quad \operatorname{tg} y = m$$

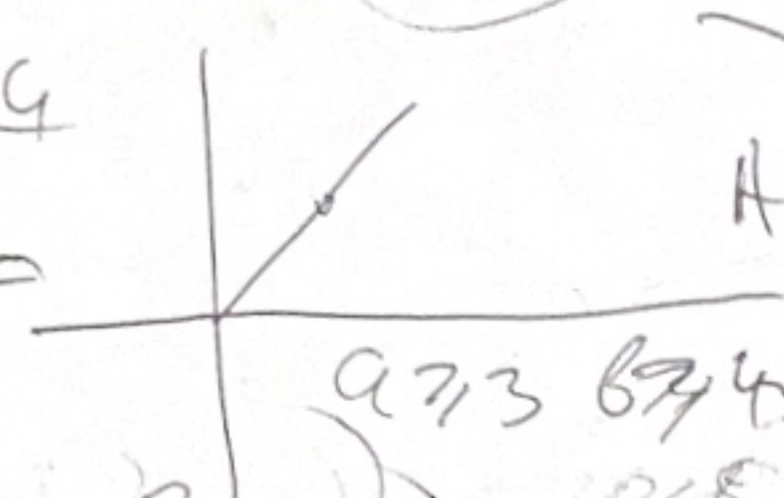
$$\frac{(\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y)(1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y)}{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y} =$$

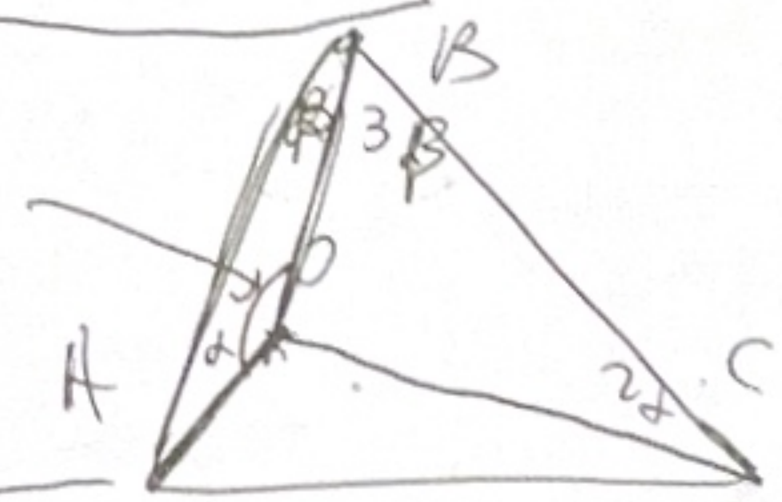
$$= \frac{mt(1-mt)}{m+t} \qquad \boxed{\frac{ab(1-ab)}{a+b}} \qquad \frac{360°}{2026}\ 5$$

$0 < x + y < \frac{\pi}{2}$ $\qquad 2016$

$a \geq 4$

$\frac{2026}{5} =$





$a \geq 3 \quad b \geq 4 \quad 32$

$a \geq 2 \quad b \geq 3$ $\qquad 180° - 64 = 116° \quad \frac{116}{4} = 29$

$2026 = abc + 2ab + 2bc + 2ca + 4a + 4b + 4c \leq$

$\leq$

~~$abc \geq 2ab$~~ $\qquad abc \geq 4c$

$abc \geq 2bc$

$abc \geq 3ac$

$abc \geq$

черновик

$4, 111, 1 \quad 444 + 888 + 222 + 8 + 4 + 16 + 444 =$

$= 888 + 222 + 8 + 4 + 16$

$abc + 2ab + 2bc + 2ca + 4a + 4b + 4c = 2026$

$2(bc + 2b + 2c)$

$\begin{array}{r} \times\ 888 \\ 2 \\ \hline 1776 \end{array}$

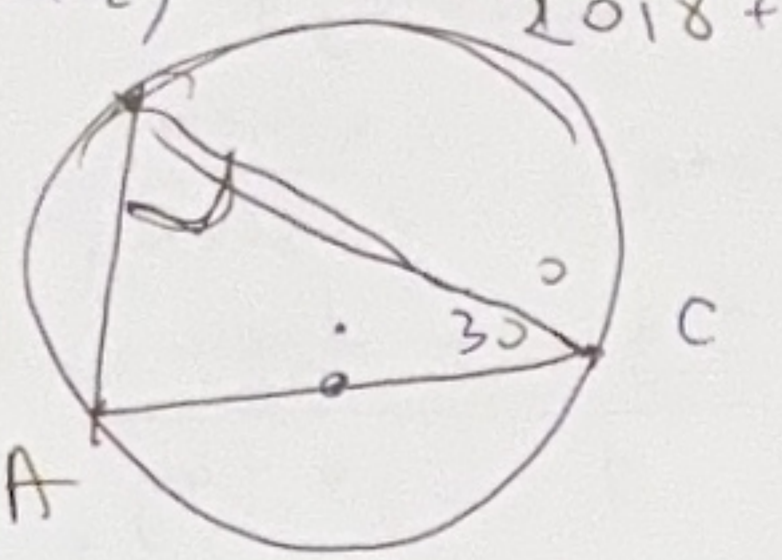
$-\log_a 2$

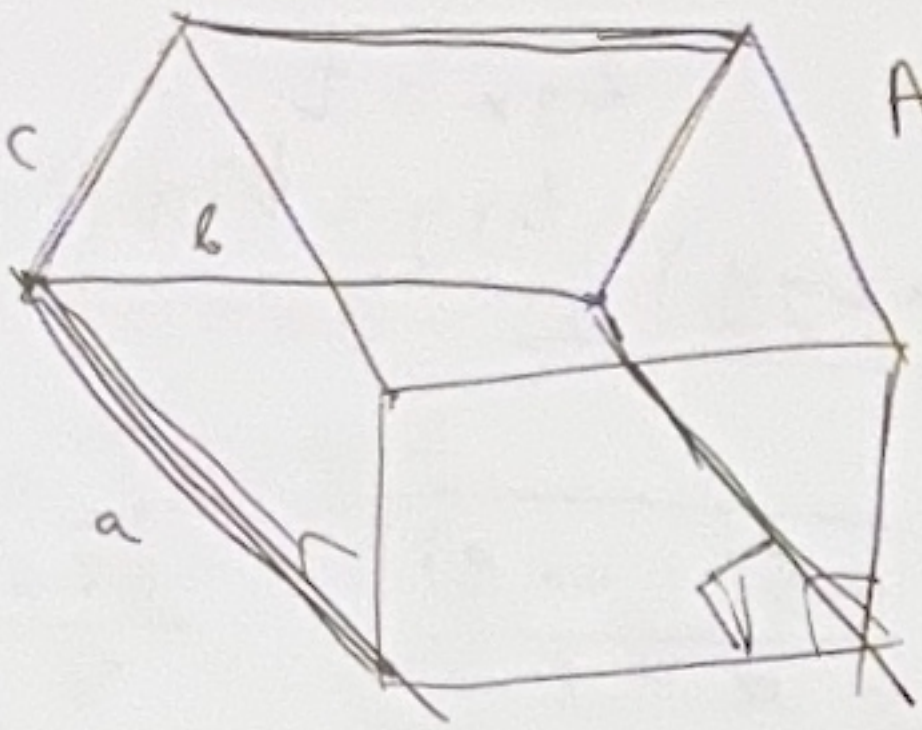
$(b+2)(c+2)$

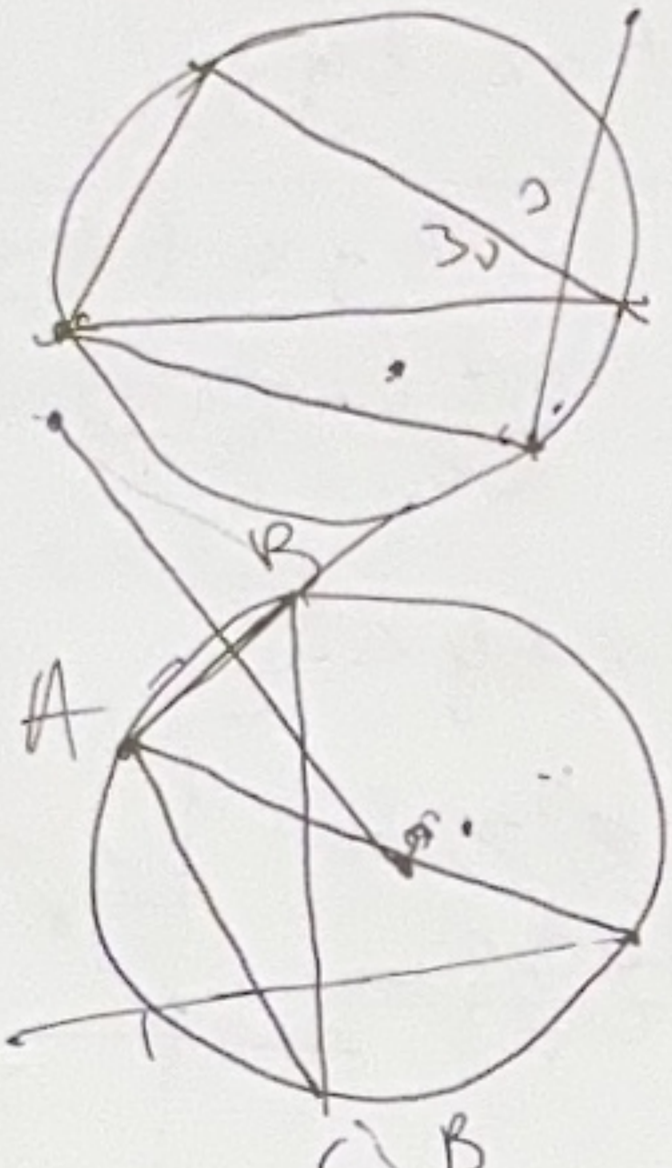
1998

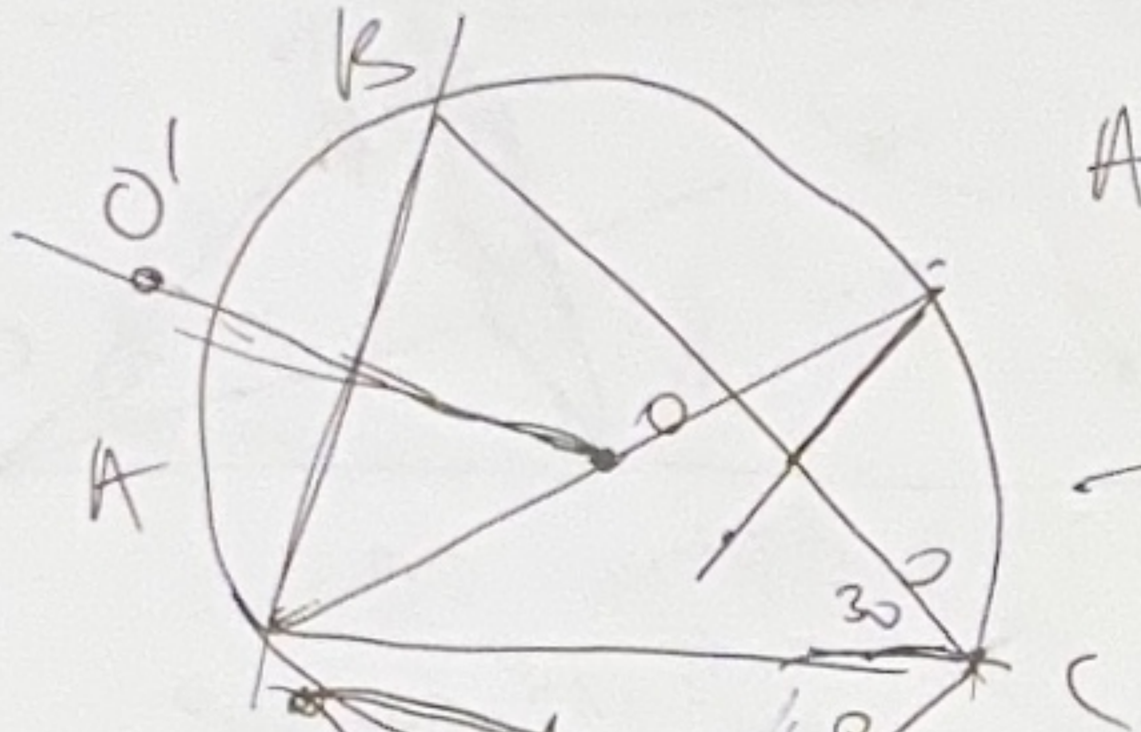
$2018 + 8$

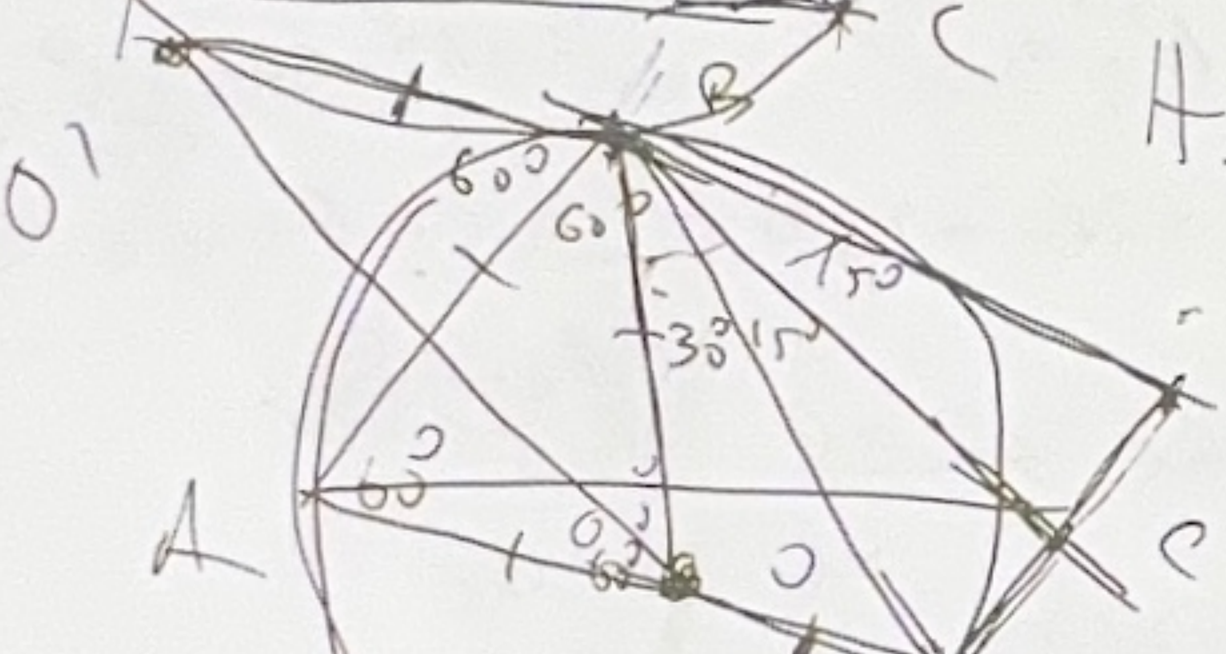
$\log_a 2^{-1} = \log_a \frac{1}{2}$

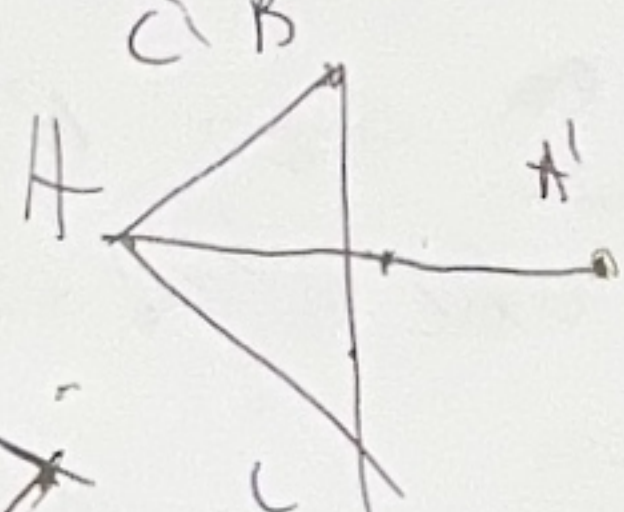












21-07-63-78
(128.2)

черновик

$u' = \frac{t(1-2tg\,x\,t)}{\cos^2 x}$; $u = \frac{tg\,x\,t(1-tg\,x\,t)}{\cos^2}$

$v = tg\,x + t$; $v' = \frac{1}{\cos^2 x}$

$$f'(x) = \frac{\frac{t(1-2tg\,x\,t)(tg\,x+t)}{\cos^2 x} - \frac{tg\,x\,t(1-tg\,x\,t)}{\cos^2 x}}{(tg\,x+t)^2}$$

$4t^2 - 4$ ($9-$) $\frac{(t\,t(1-\ell t)}{\ell + t}$

$f^2(x)' = 2 f(x) \cdot f'(x)$

$u'v$ $t(1-2tg(x)t)(tg(x)+t) -$

$$\frac{\ell + t}{\ell t(1-\ell t)} = \boxed{\frac{1}{t(1-\ell t)}} + \frac{1}{\ell(1-\ell t)} =$$

$$= \frac{1}{1-\ell t}\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{\ell}\right)$$

чистовик

Задача 5: поэтому при всех y, минимум выражения $tgx\,tgy\,tgz$ достигается при $tgx = -tg\,y + \sqrt{tg^2 y+1}$

найдем теперь при y-переменная:

$f(x) = \frac{lt(1-lt)}{l+t}$, причем

$l = -t+\sqrt{t^2+1}$,

$$f(x) = \frac{t(-t+\sqrt{t^2+1})(1+t^2-t\sqrt{t^2+1})}{\sqrt{t^2+1}} =$$

$$= t(-t-t^2+t\sqrt{t^2+1}+\sqrt{t^2+1}+t\sqrt{t^2+1}-t^2-1) =$$

$$f(x) = \frac{t(-t-t^3+t^2\sqrt{t^2+1}+\sqrt{t^2+1}+t^2\sqrt{t^2+1}-t^3-t)}{\sqrt{t^2+1}} =$$

$$= \frac{t((2t^2+1)\sqrt{t^2+1}-t(2t^2+2))}{\sqrt{t^2+1}}$$ максимум

~~Нули~~ находится ~~также~~ производной из соображений симметрии

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

чистовик

$f(x) = 2t^2+1-2t\sqrt{t^2+1}$

$f'(x) = 4t - 2\sqrt{t^2+1} - \frac{-2t}{2\sqrt{t^2+1}}2t = 0$

$= 4t - 2\sqrt{t^2+1} + \frac{4t^2}{2\sqrt{t^2+1}} = 0$

корни $f(x)$ - и есть необходимое значение

$4t - 2\sqrt{t^2+1} + \frac{2t^2}{\sqrt{t^2+1}} = 0$

$4t\sqrt{t^2+1} - 2t^2 - 2 + 2t^2 = 0$

$4t\sqrt{t^2+1} = 2$

$t^2(t^2+1) = \frac{1}{4}$

$t^2 = a$

$a(a+1) = \frac{1}{4}$

$a^2 - a - \frac{1}{4} = 0$

$(a-\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2}$

$a = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2}}$

$t = \sqrt{\frac{1}{2\sqrt{2}}}$, максимум находится

Подписывать лист-вкладыш запрещено! Писать на полях листа-вкладыша запрещено!

черновик