0 757548 460000

75-75-48-46
(123.6)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 10 класс

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Закиева Искандера Ильфатовича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дополнительный лист +1

Дата

«29» марта 2026 года

Подпись участника

80 (Восемьдесят) Нет ~~[illegible]~~ ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Черновик

a, b, c реал. натур.

$abc + 2(ab+bc+ac) + 4(a+b+c) = 2026$

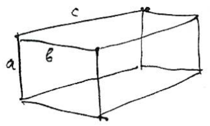
abc – ~~max~~ min ?

1, 224

$224 + 2(1+224+224) + 4\cdot 226 =$

$(a+b+c)^2 + 4(a+b+c) - (a^2+b^2+c^2) = 2026 - abc$

$224 + 2\cdot 449 + 4\cdot 226$

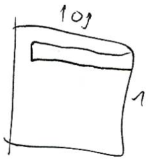


$abc + \underbrace{(a+b+c+4)(a+b+c) - (a^2+b^2+c^2)}_{max} = 2026$

448

449

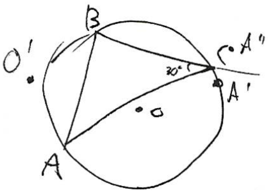
$\begin{array}{r} 226 \\ \times\ 4 \\ \hline 504 \end{array}$ $\begin{array}{r} 449 \\ \times\ 2 \\ \hline \end{array}$



$2(ab+bc+ac) \le 2(a^2+b^2+c^2)$

$abc +$

$\cancel{X} + 2\left(\frac{x}{c} + \frac{x}{a} + \frac{x}{b}\right) + 4(a+b+c) = 2026$



OBA''

∠B – ?

$x + \left(\frac{2x}{c} + 4c\right) + \left(\frac{2x}{a} + 4a\right) + \left(\frac{2x}{b} + 4b\right) = 2026$

$(a+2)(b+2)(c+2) = \cancel{(ab+b+2a+2)(c+2) =}$

$\cancel{abc + bc + 2ac + 2c +}$

$(ab+2a+2b+4)(c+2) = abc + 2ac + 2bc + 4c + 2ab + 4a + 4b + 8$

$\frac{a^{2x} - 3a^{x+1} + 2a^2}{\log_2 a} \ge 0$

множ. реш. – отрезок длиной 2026

$(a+2)(b+2)(c+2) = 2034$

abc – min ?

$2034 = 2\cdot 1017 = 2\cdot 3^2 \cdot 113$

$tg\, x\, tg\, y\, tg\, z$ – max

$0 < x, y, z < \frac{\pi}{2}$

$x + y + z = \frac{\pi}{2}$

~~$a = 111$~~

$(b+2)(c+2) = 18$

$b = 4$

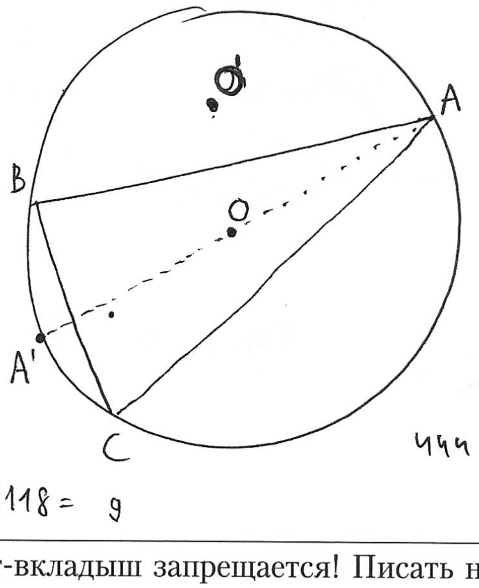
$c = 1$

$2\cdot 3^2$

$6\cdot 3$

$226\cdot 3\cdot 3 = \quad 226\cdot 9 = \quad 2260 - 226 =$

2034



$abc = 1\cdot 1\cdot 224$

$224 + 2(ab+bc+ac) + 4(a+b+c)$

$224 + 2(2\cdot 224 + 1) + 4\cdot 226$

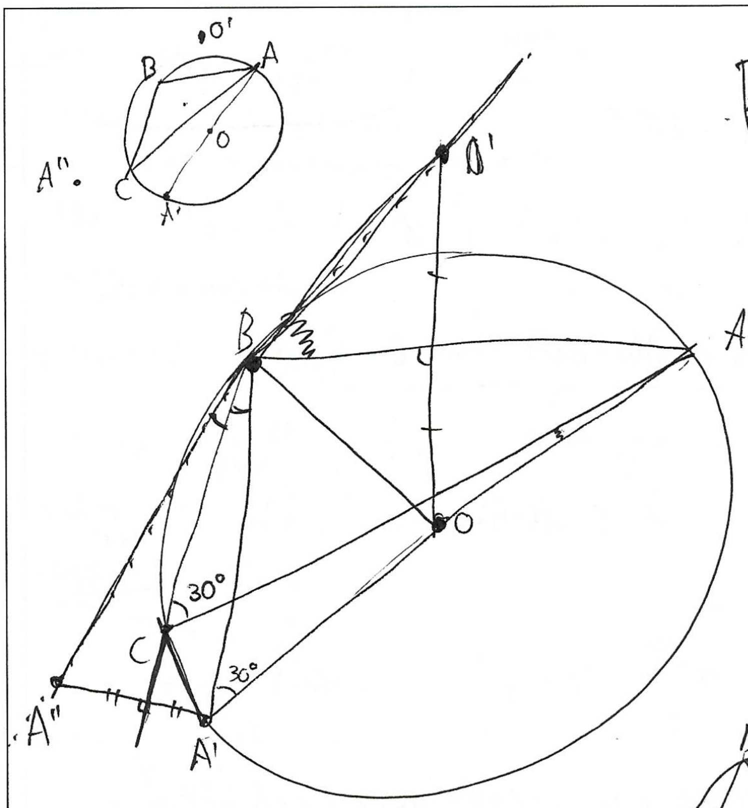
$559\cdot 2$

$444 + 464 =$

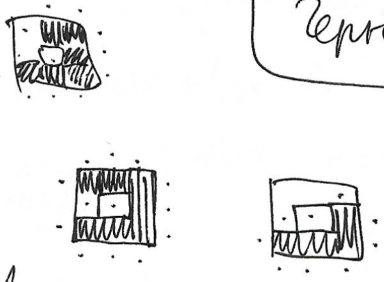
$444 + 2(444 + 4 + 111) + 4\cdot 116$

$908 + 1118 = 9$

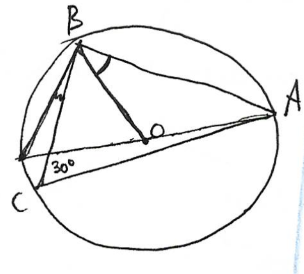
Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

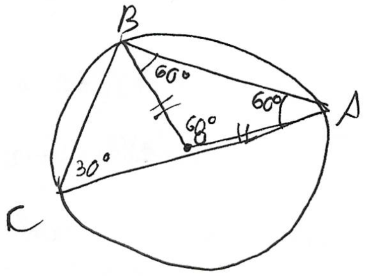


Черновик



9 + 4

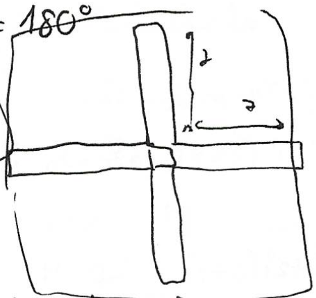




$\angle B + \measuredangle + \measuredangle = 180^\circ$

$\measuredangle = 60^\circ - \angle A$

$\measuredangle = 60^\circ$



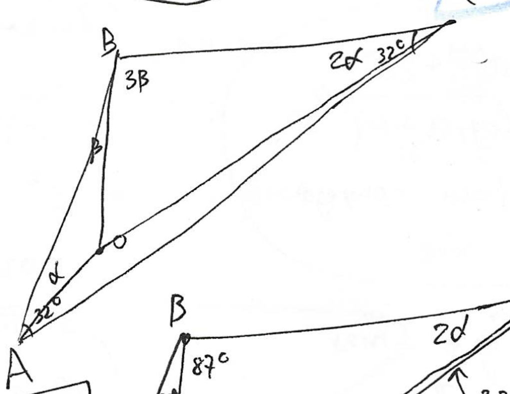
$\angle B + 60^\circ + 60^\circ - \angle A = 180^\circ$

$\angle B - \angle A = 60^\circ$

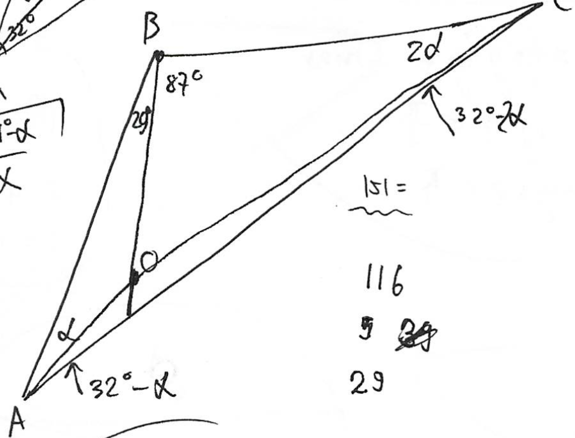
$\angle B + \angle A = 150^\circ$

$\angle B = 105^\circ$

$\angle A = 45$



$\frac{\angle BOA}{\angle BAO} = \frac{151^\circ - \alpha}{\alpha}$

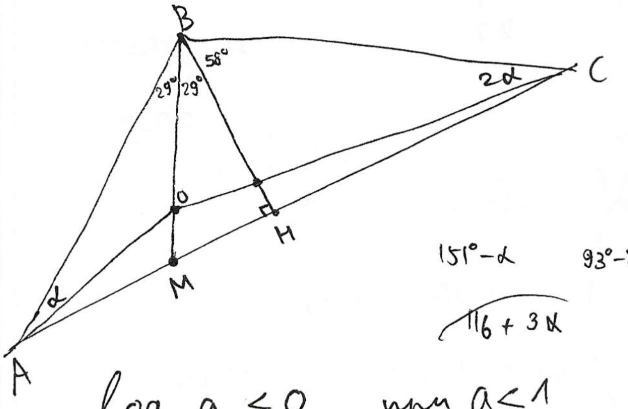


151 =

116

~~29~~

29



$151^\circ - \alpha$ $\quad 93^\circ - 2\alpha$

$116 + 3\alpha$

$0 < \alpha < 16^\circ$

$\log_2 a < 0$ при $a < 1$

$\log_2 a > 0$ при $a > 1$

$\log_2 a = 0$ при $a = 1$

75-75-48-46
(123.6)

Черновик

$a>1:$

$$\frac{a^{2x}-3a^{x+1}+2a^2}{\log_2 a}\geq 0 \iff a^{2x}-3a^{x+1}+2a^2 = (a^x+a)^2+a^2-a^{x+1}$$

≥ 0 при $\forall x$, ≥ 0

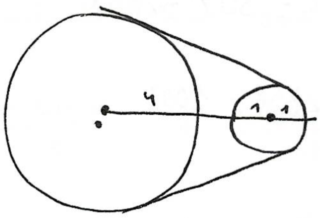
$$(a^x+a)^2 = a^{2x}-2a^{x+1}+a^2$$

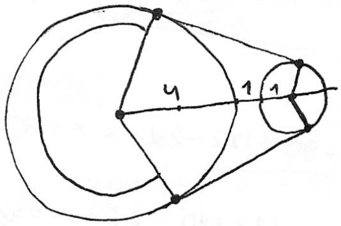
$$a^2 \geq a^{x+1} \qquad x\leq 1$$

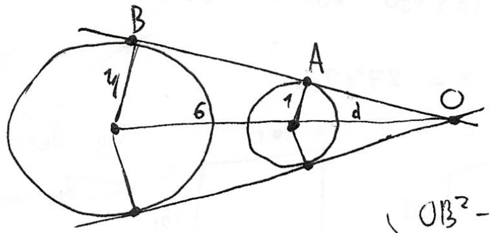
$a<1:$

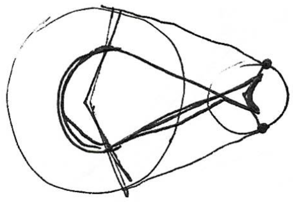
$$\frac{a^{2x}-3a^{x+1}+2a^2}{\log_2 a}\geq 0 \iff a^{2x}-3a^{x+1}+2a^2 \leq 0$$

$$a^{2x}+2a^2$$





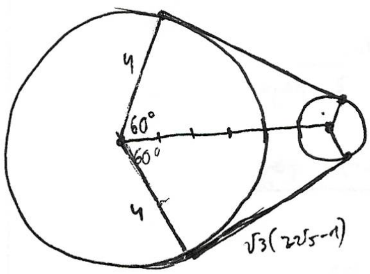




$$OB^2-OA^2=(OB-OA)(OB+OA)=$$

$$OA^2=d^2-1$$

$$OB^2=(d+6)^2-4 = d^2+12d+32$$



$$\frac{d}{d+6}=\frac{1}{4}$$

$$4d=d+6$$

$$3d=6$$

$$d=2$$

$$4+24+32$$

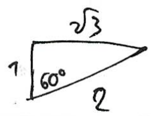
$$OA^2=4-1=3$$

$$OB^2=8^2-4=60$$

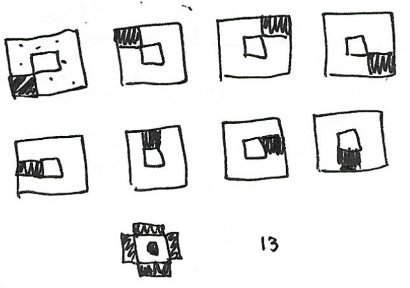
$$\sqrt{60}-\sqrt{3}=\sqrt{3}(\sqrt{20}-1)=$$

$$\sqrt{3}(2\sqrt{5}-1)$$

2 $\sqrt{3}$



Черновик

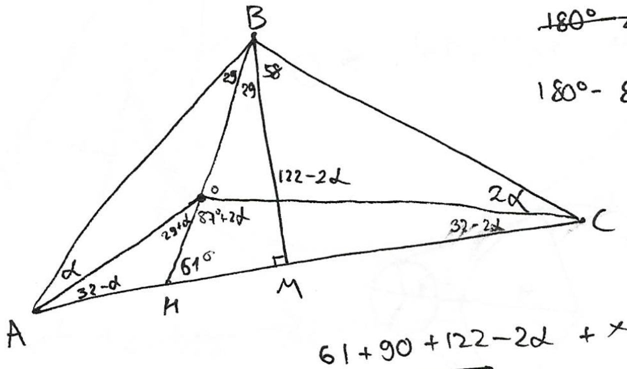


1,1, 224

13

$$\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{4} = \frac{1}{128}$$

$$\frac{8}{128}\cdot\frac{1}{13} = \frac{1}{16\cdot 13}$$



~~$180° - \angle BOC =$~~ ?

$180° - 87° - \angle BOC = 2(180° - 29° - \angle BOA)$

$93° - \angle BOC = 2(151° - \angle BOA)$

$93° - \angle BOC = 302° - 2\angle BOA$

$2\angle BOA - \angle BOC = 209°$

$61 + 90 + 122 - 2\alpha + x = 360$

$116 + 3\alpha$

$183 + 90 - 2\alpha + x = 360$

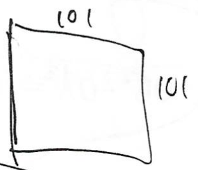
$32 - \alpha$

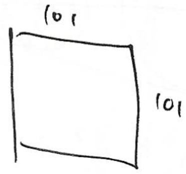
$32 - 2\alpha$

$x = 87° + 2\alpha$

$151° - \alpha$

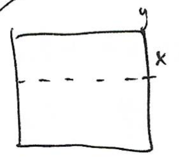
$83 - 2\alpha$





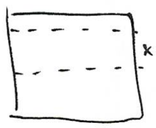
по высоте:

высота: x



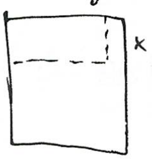
от 1 до 101 (101−y)

2 раза



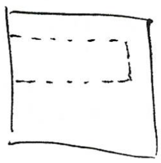
от 1 до 100 ~~+1~~ 100

100−x раз



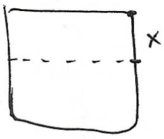
от 1 до 100 (101−y)

2 раза



100 = ~~...~~ y от 0 до 100

100−x раз

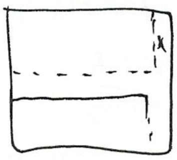


от 1 до 101

2 раза

~~100 ...~~

$1 + 101 - x = 102 - x$ раз



от 1 до 100

~~102−x раз~~ 2 раза

100−x раз по 100

75-75-48-46 (123.6)

$2\ (101+100+\ldots+1)$ – для $\boxed{}^{x}$ и $\boxed{}_{x}$ Черновик

$(100-x)\cdot(100+\underbrace{1+1+\ldots+1}_{100\text{ раз}}) = (100-x)\cdot 200$

x от 1 до 100

$200\ (101+\ldots+1) + 200\cdot(99+\ldots+1)$

$x=101$

$\cancel{2(101+100+\ldots+1)}$ $\cancel{100+\ldots+1}$

99

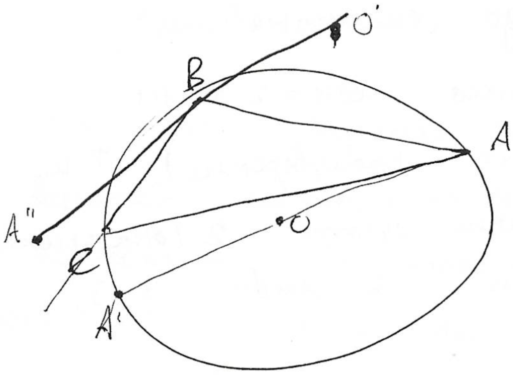
$100+100=200$

итого:

$\cancel{202\,(101+\ldots+1) + 200\cdot(100+\ldots+1) = \frac{202\cdot101\cdot102}{2} + \frac{200\cdot101\cdot100}{2}} = 101\cdot101\cdot102 +$

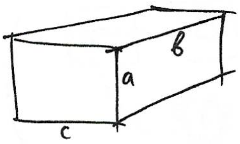
$\cancel{100\cdot101\cdot100 = 101(101\cdot102+100\cdot100)}$

$\frac{200\cdot101\cdot102}{2} + \frac{200\cdot100\cdot99}{2} + 200 = 200\,(51\cdot101+50\cdot99)$



Чистовик.

Задача 1.



Пусть а, в и с — значения длин высоты, ширины и длины призмы. Тогда по условию

$abc + 2(ab+bc+ac) + 4(a+b+c) = 2026$

$(a+2)(b+2)(c+2) = \underbrace{abc + 2(ab+bc+ac) + 4(a+b+c)}_{\shortparallel \atop 2026} + 8 = 2026+8 = 2034$

$(a+2)(b+2)(c+2) = 2034$

Т.к. $a, b, c \in \mathbb{N}$ (по условию), $(a+2), (b+2)$ и $(c+2) \in \mathbb{N}$.

$2034 = 2\cdot 3^2 \cdot 113 = 2\cdot 3\cdot 3\cdot 113$ (113 – простое)

$a \geq 1,\ b\geq 1,\ c \geq 1 \Rightarrow (a+2)\geq 3,\ (b+2)\geq 3,\ (c+2)\geq 3$

Чтобы получить представление 2034 в виде суммы трех натуральных чисел надо „скомпоновать" какие-то два числа из разложения $2034 = 2\cdot 3\cdot 3\cdot 113$ (т.е два числа заменить на их произведение). Т.к. в конечном разложении не может быть 2 (она слишком маленькая), нужно „скомпоновать" 2 либо с 3, либо с 113. Итого 2 варианта:

$2034 = 3\cdot 6\cdot 113$. Тогда $abc = (3-2)(6-2)(113-2) = 1\cdot 4\cdot 111 = 444$

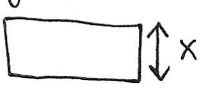
$2034 = 3\cdot 3\cdot 226$. Тогда $abc = (\underline{3-2})(\underline{3-2})(226-2) = 224$

Но во ~~первом~~ втором случае среди а, в, с два числа равны 1 (~~противоречие~~ не подходит условиям задачи). Значит, остается только первый вариант ($abc = 444$)

Ответ: $abc = 444$.

Задача 2.

Пусть x — высота вырезаемого прямоугольника

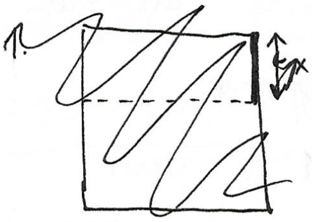


Чистовик

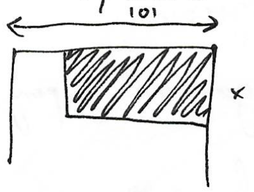
Задача 2 (Продолжение)

Для $1 \le x \le 100$:

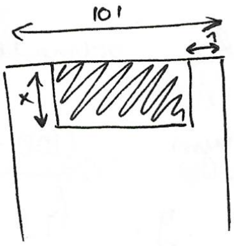
1\.



Будем смотреть на правую границу вырезаемого ~~квадранта~~ прямоугольника. Для этого введем параметр y, который равен 0 если правая граница совпадает с правой границей квадрат, равен 1 если отступает от правой границы на 1 и т.д.:



$y=0$

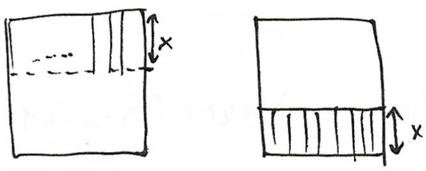


$y=1$

Посчитаем кол-во случаев для разл. ситуаций:

1\. $y=0$:

1.1. если верхняя грань прямоугольника совпадает с верхней гранью квадрата 101×101 (или нижняя с нижней), то возможны 101 вариант для длины прямоугольника ($101 = 101 - y$), т.к. ни в каком у таких ~~т~~ вырезов



квадрат не имеет дырку и не делится на части.

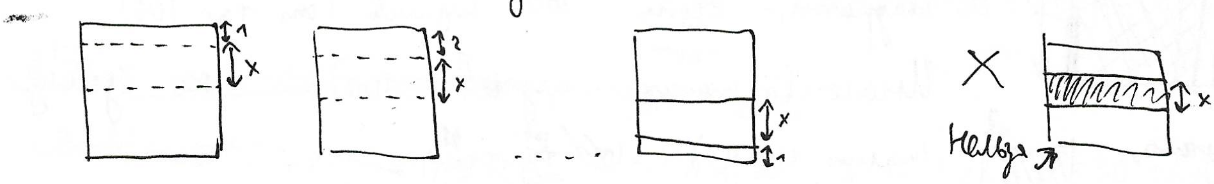
Итого $2 \cdot 101$ случаев.

: от 1 до 100

1.2. Иначе доступно 100 длин (т.к. 101 не подходит, поскольку это будет делить квадрат на части).

Всего таких случаев $(100-x)$ для фиксированного x.

Итого $100 \cdot (100-x)$ случаев

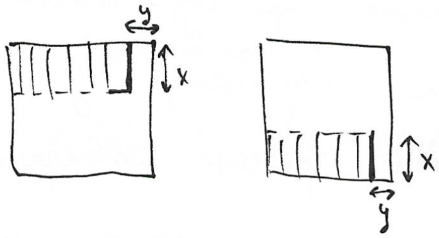


2\. $y \neq 0$:

Чистовик   Задача 2 (Продолжение)

2. $y \neq 0$!

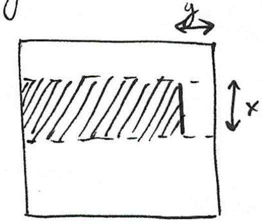
2.1. Если верхняя или верхнияя грань совпадает с верхней или нижней гранью квадрата:



Доступно по $(101 - y)$ длин прямоугольника.

Итого тут $2 \cdot (100 - y)$ случаев для каждого y.

2.2. Иначе доступно только по одной длине $(100 - y)$, т.к. все остальные создают дырку.



Итого тут $\underline{(100 - x)}$ случаев для каждого y. (т.к. высоту положения прямоугольника можно выбрать столькими способами.

Итого, для всех $1 \le x \le 100$, кол-во случаев равно:

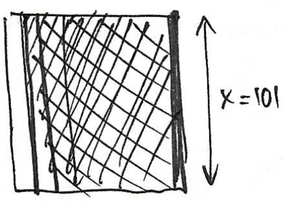
$$\sum_{x=1}^{100} \left(2 \cdot 101 + 100 \cdot (100 - x) + \sum_{y=1}^{100} \left(2 \cdot (101 - y) + (100 - x) \right) \right) =$$

$$\sum_{x=1}^{100} 2 \cdot 101 + 100 \cdot (100 - x) + 2 \cdot (100 + 99 + \ldots + 1) + 100 \cdot (100 - x) =$$

$$\sum_{x=1}^{100} 2 \cdot (101 + 100 + 99 + \ldots + 1) + 200 (100 - x) = 200 \cdot (101 + \ldots + 1) + 200 \cdot (99 + \ldots + 1 + 0) =$$

$$\cancel{200 \cdot (101 + \ldots + 1) + 200} \cdot \frac{200 \cdot 101 \cdot 102}{2} + \frac{200 \cdot 99 \cdot 100}{2} = 200 (101 \cdot 51 + 99 \cdot 50)$$

Осталось посчитать для $x = 101$



Если правая грань совпадает с правой гранью квадрата, есть 100 случаев (от 1 до 100)

Иначе (а таких случаев 100) — по одному случаю (только $101 - y$) $\cdot 100 = 100 +$

Итого: $100 + 100 = 200$ случаев

Чистовик

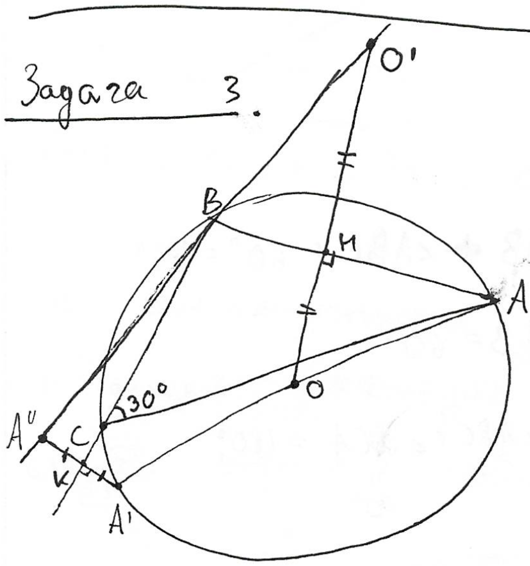
Задача 2 (Продолжение)

В сумме имеем:

~~200·199~~. Ответ:

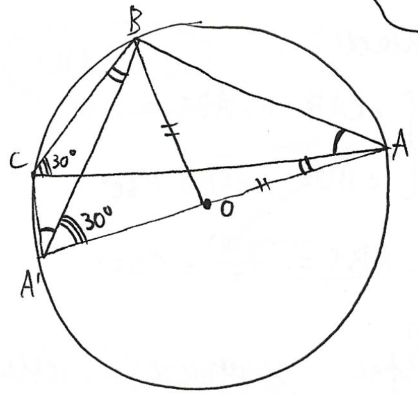
$200 \cdot (101 \cdot 51 + 99 \cdot 50 + 1)$ случаев

Задача 3.



A' диаметрально противоположна A. $K = BC \cap A'A''$, $H = AB \cap OO'$.

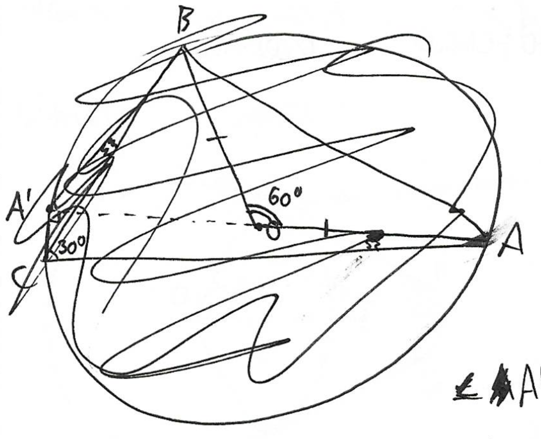
Т.к. A'', B и O' лежат на одной прямой, $\angle A''BC + \angle ABC + \angle ABO' = 180°$



$\angle A''BC + \angle ABC + \angle ABO' = 180°$.

$\left.\begin{array}{l}\angle A''BC = \angle A'BC \\ \angle ABO' = \angle ABO\end{array}\right\}$ в силу симметрии:

$\angle A'BC + \angle ABC + \angle ABO = 180°$



$\angle ABO = \frac{180° - \angle AOB}{2}$ (т.к. $AO = BO$)

$\angle AOB = 60°$ (т.к. $\angle C = 30°$)

$\Rightarrow \angle ABO = \frac{180° - 60°}{2} = 60°$

$\angle A'BC = \angle A'AC = 180° - (\angle AA'C + \angle ACA')$

$\angle A'CA = 90°$ (т.к. $A - O - A'$)

~~$\angle ACA' = \angle BCA + \angle BCA' = 30° + \angle BCA'$~~ ($\angle BCA$ = ~~30°~~)

$\angle A'BC =$ ~~$180° - (90° + 30° + \angle BCA') = 60° - \angle BCA'$~~

~~$\angle BCA' = \angle BAA'$~~

$\angle CA'A =$ ~~30°~~ $\underbrace{\angle BA'A}_{= \angle BCA = 30°} + \angle CA'B = 30° + \angle CA'B$

Чистовик

Задача 3 (Продолжение)

$\angle A'BC = 180° - (90° + 30° + \angle CA'B) = 60° - \angle CA'B$

$\angle CA'B = \angle CAB$ (из вписанности)

Тогда: $\angle A'BC = 60° - \angle CAB$

Итого:

$\angle A'BC + \angle ABC + \angle ABO = 60° - \angle CAB + \angle ABC + 60° = 180°$

$\cancel{\angle CAB + \angle ABC = 60°}$ $\angle ABC - \angle CAB = 60°$

Также известно, что $\angle CAB + \angle ABC + \underset{30°}{\underset{\parallel}{\angle BCA}} = 180°$ $\Rightarrow$

$\angle CAB + \angle ABC = 150°$

Имеем:

$$\begin{cases} \angle CAB + \angle ABC = 150° \\ \angle ABC - \angle CAB = 60° \end{cases} \oplus$$

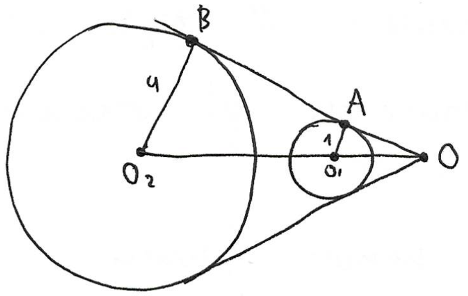
$\angle ABC = \frac{210°}{2} = 105°$

При других случаях взаимного положения точек задача решается подобным счетом углов.

Ответ: $105°$

Чистовик

Задача 7.



O – пересечение касательных.

По теореме Пифагора:

$$OA^2 = OO_1^2 - 1$$

$$OB^2 = OO_2^2 - 16$$

$$OO_2 = OO_1 + \underbrace{O_1O_2}_{6} = OO_1 + 6$$

Из гомотетичности окружностей (O – центр гомотетии, переводящей маленькую окружность в большую с коэффициентом 4). следует подобие $\triangle OO_1A \sim \triangle OO_2B$ с коэф. $\frac{O_2B}{O_1A} = 4$.

$\Rightarrow \frac{OO_1}{OO_2} = \frac{1}{4}$ $\quad \frac{OO_1}{OO_1+6} = \frac{1}{4} \Rightarrow OO_1 = 2$

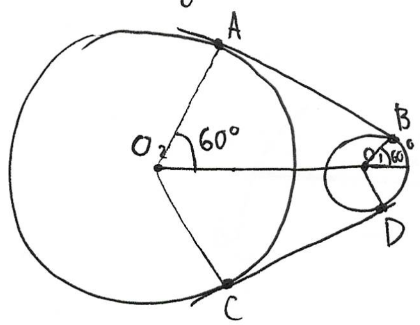
Значит, $OA^2 = OO_1^2 - 1 = 3$

$OB^2 = OO_2^2 - 16 = 48$

$AB = \cancel{\sqrt{OB}}\ OB - OA = \sqrt{48} - \sqrt{3} = \sqrt{3}\cdot(4-1) = 3\sqrt{3}$

Также $\angle OO_1A = \angle OO_2B = \arccos\frac{O_1A}{O_1O} = \arccos\frac{1}{2} = 60°$

Итого знаем:



Теперь посчитаем длину дороги из травы.

Идя по дуге $\overset{\frown}{AC}$ (большей), дорожка являлась дугой с такой же градусной мерой (240°), но с радусом (4 − 1,5).

Значит, длина этой части равна

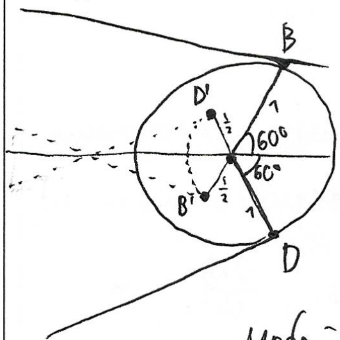
$$\frac{2}{3}\cdot\pi\cdot 2(4-1{,}5) = \frac{10\pi}{3}$$

Чистовик

Задача 7 (Продолжение)

Идя по AB и CD, трава ложилась в форме отрезков той же длины (то-есть два участка длиной $3\sqrt{3}$)

Осталось узнать ~~так~~ участок какой длины появился во время хождения по дуге малой окружности.

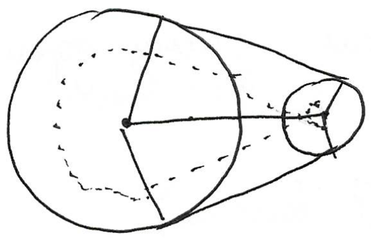


Придя в точку B, трава летела в точку B'. В точке D — в точку D'. Двигаясь по дуге $\overset{\frown}{BD}$ (меньшей), трава летела по дуге (т.к. перпендикуляр к любой точке проходит через O, и дальности полёта травы одинакова везде). Причем эта дуга вдвое короче дуги $\overset{\frown}{BD}$ (меньшей), т.к. её радус равен $(1{,}5-1)=\frac{1}{2}$. Отсюда её длина равна

$$\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot 2\cdot\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$$

Итого, длина дорожки:

$$\frac{10\pi}{3} + 6\sqrt{3} + \frac{\pi}{3} = \frac{11\pi}{3} + 6\sqrt{3}$$

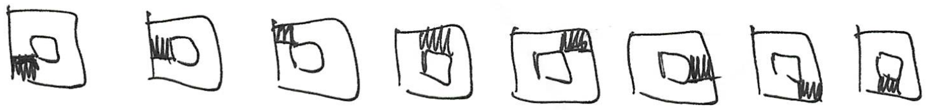


Задача 8.

Сперва рассмотрим вероятность сделать за первые 8 ходов «кольцо»:

Чистовик   Задача 8

Из одной покрашенной клетки можно сделать кольцо 8 способами:



~~Для каждого случая посчитаем отдельно~~

$\cancel{\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{8}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{2}{11}\cdot\frac{2}{12}\cdot\frac{2}{13} = \frac{2^7}{4\cdot6\cdot8\cdot9\cdot11\cdot12\cdot13}}$

~~Для каждого~~

Всего за 8 ходав можно составить x рисунков. Т.к. среди них нам подходит 8, вероятность собрать кольцо равна $\frac{8}{x}$

Имея в конце „кольцо", надо домножить $\frac{8}{x}$ на вероятность выбрать центральную клетку т.е. на $\frac{1}{13}$ (т.к. 13 вариантов ). $\frac{8}{13x}$

Посчитаем x