0 844595 710001

84-45-95-71
(124.23)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 11 класс, вариант 1

Место проведения г. Москва
город

+1 лист

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников "Ломоносов"
наменование олимпиады

по Математике
профиль олимпиады

Замолодчикова Алексея Игоревича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«29» марта 2026 года

Подпись участника

75 (семьдесят пять) [illegible]

84-45-95-71
(124.23)

ЧИСТОВИК

Задача 1

$\sqrt{6(1-tg^2x)} = 4\sin x \quad |^2$

ОДЗ: $\sin x \geq 0$ (т.к. равен корню)
$\cos x \neq 0$ (т.к. $tg x$)

$6\left(1 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right) = 16\sin^2 x$

$3 \cdot \cancel{2}\left(\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x}\right) = \cancel{2} \cdot 8\sin^2 x \quad | \cdot \cos^2 x \neq 0$ (по ОДЗ)

$3(\cos^2 x - \sin^2 x) = 2 \cdot 4 \cdot \sin^2 x \cdot \cos^2 x$

$3\cos 2x = 2 \cdot \sin^2 2x$

$3\cos 2x = 2(1 - \cos^2 2x)$

$3\cos 2x = 2 - 2\cos^2 2x$

$2\cos^2 2x + 3\cos 2x - 2 = 0$

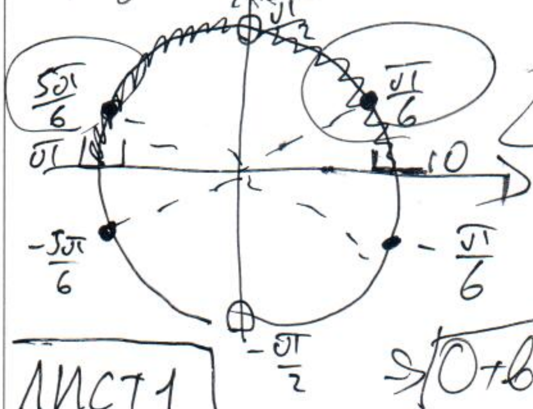
$D = 3^2 + 2 \cdot 2 \cdot 4 = 3^2 + 4^2 = 5^2$

$\cos 2x_{1,2} = \frac{-3 \pm 5}{4} = \left[\begin{array}{l} \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2} \\ \frac{-5-3}{4} = \frac{-8}{2} = -2 \text{ — не подходит, т.к. } \cos 2x \in [-1;1] \end{array}\right.$

$\Rightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} \rightarrow 2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k \rightarrow \boxed{x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k}$

ОДЗ: $\begin{cases} \cos x \neq 0 \rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k \\ \sin x \geq 0 \rightarrow x \in [2\pi k; \pi + 2\pi k] \end{cases}$ $(k \in \mathbb{Z})$

Нарисуем всё это на окружность:



Подходят только: $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \end{array}\right.$

$\Rightarrow$ Ответ: $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$; $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$

ЛИСТ 1

ЧИСТОВИК | Задача 2

Обозначим сумму цифр натурального числа n как $S(n)$.

Тогда: $n = S(n) \cdot 9 \cdot k$, где $k \in \mathbb{N}$

~~(т.к. n делится на $S(n)$ и кратно 9)~~

(т.к. $\frac{n}{S(n) \cdot 9} = k$ - натуральное число)

(по условию число $\frac{n}{S(n)} = 9k, k \in \mathbb{N}$)

Тогда число n делится на 9. Свойство чисел, делящихся на 9: сумма их цифр также делится на 9. Значит, что $n \vdots 9$ и $S(n) \vdots 9$,

Но n делится на $9S(n) \Rightarrow n$ делится на $9 \cdot S(n)$, где $S(n) \vdots 9 \Rightarrow n \vdots 81$.

Распишем все трехзначные числа, которые делятся на 81.

162; 243; 324; 405; 486; 567; 648; 729; 810; 891; 972. Все эти числа делятся на 81. Осталось проверить те, где сумма цифр равна 18 (т.к. такие числа должны делиться на $9 \cdot 18 = 81 \cdot 2 = 162$):

1) $486 = 81 \cdot 6$, $\frac{81 \cdot 6}{9 \cdot 18} = \frac{81 \cdot 6}{81 \cdot 2} = 3$ - подходит

2) $567 = 81 \cdot 7$, $\frac{81 \cdot 7}{81 \cdot 2} = \frac{7}{2}$ - не подходит

3) $648 = 81 \cdot 8$, $\frac{81 \cdot 8}{81 \cdot 2} = 4$ - подходит

4) $729 = 81 \cdot 9$, $\frac{81 \cdot 9}{81 \cdot 2} = \frac{9}{2}$ - не подходит

5) $891 = 81 \cdot 11$, $\frac{81 \cdot 11}{81 \cdot 2} = \frac{11}{2}$ - не подходит

6) $972 = 81 \cdot 12$, $\frac{81 \cdot 12}{81 \cdot 2} = 6$ - подходит

Продолжение на след. листе

ЛИСТ 2

84-45-95-71 (124.23)

(Задача 2, ПРОДОЛЖЕНИЕ)

ЧИСТОВИК

Остальные числа вдже (у которых $S(n) = 9$) подходят, т.к. они должны делиться на $9 \cdot S(n) = 9 \cdot 9 = 81$, что и так обеспечено (выписали только те числа, что делятся на 81).

Итого: 162; 243; 324; 405; 486; 648; 810; 972.

Требуется найти сумму второго, пятого, и предпоследнего.

$\Rightarrow$ Сумму второго, пятого, и седьмого (всего чисел $8 \Rightarrow 7$ - предпосл.)

$$\Rightarrow \underbrace{243}_{81 \cdot 3} + \underbrace{486}_{81 \cdot 6} + \underbrace{810}_{81 \cdot 10} = 81(3+6+10) = 81 \cdot 19 = 1539$$

810 + 243 = 1053; 1053 + 486 = 1539

81 · 19: 729, 81, 1539

Ответ:
Трёхзначные числа, входящие в A:
162; 243; 324; 405; 486; 648; 810; 972,
Сумма второго, пятого и предпоследнего = 1539

ЛИСТ 3

ЧИСТОВИК | Задача 3

Возьмём три точки A, B, C, которые нам подходят (образуют прямоуг. Δ)

$A(x_a; y_a; z_a)$; $B(x_b; y_b; z_b)$; $C(x_c; y_c; z_c)$.

Будем считать, что $\angle ACB = 90°$. Тогда

AC и CB - катеты, AB - гипотенуза ΔABC.

$\Rightarrow$ ~~AC и CB должны быть параллельны одной из координатных осей (и AC и CB~~ $\Rightarrow AC \parallel$ какой-то оси, $CB \parallel$ какой-то оси.

Допустим, $AC \parallel Ox$. Возьмём вектор $\vec{x}$, который лежит на Ox: $\vec{x}\{1; 0; 0\}$

~~Тогда $\vec{AC} \parallel Ox$. Ось x;~~

$\Rightarrow \vec{AC}$ должен быть коллинеарен $\vec{x}$, т.е.

$\vec{AC}\{x_c - x_a; \overbrace{y_c - y_a}^{=0}; \overbrace{z_c - z_a}^{=0}\}$ $\quad y_c = y_a$ и $z_c = z_a$ (иначе векторы не будут коллинеарны)

$\Rightarrow$ координаты по y и z должны совпадать у A и C.

$\Rightarrow$ У них должны совпадать 2 коорд. из ~~трёх~~ 3

Если проделать аналогичные рассуждения для CB и какой-то оси, то получим также:

У C и B должны совпадать 2 координаты из трёх

~~Важно заметить: у A, B и C не могут совпадать двух 2 координаты из трёх, иначе они будут лежать на одной прямой и не будет прямоугольного треугольника.~~

$\Rightarrow$ у A и C совп. 2 коорд.

у B и C совп. 2 коорд

~~у A и B не совп. 2 коорд~~

(Продолжение на след. листе)

ЛИСТ 4

ЧИСТОВИК | Задача 3 | (ПРОДОЛЖЕНИЕ-1)

~~Предположим, что у A и B совпадают 2 коорд. Тогда они лежат на одной прямой, параллельной некой оси. Но это невозможно, т.к. AC и CB уже лежат на~~

Допустим, у A и C совпадают коорд. (1) и (2)
у B и C совпадают коорд (1) и (3)

(у B и C не могут тоже совпадать (1) и (2), иначе у A, B и C совпадают (1) и (2) => они все лежат на одной прямой, параллельной некой оси — не будет прямоуг. Δ, т.к. лежат на одной прямой)

=> Тогда у A, B и C совпадает коорд (1),
у A и C совп. коорд (2),
у B и C совп коорд (3).

=> Чтобы выбрать такой треугольник, надо выбрать точку C с коорд. (1)(2)(3), одну точку с коорд (1)(2) и одну с коорд (1)(3).

=> Т.е. выбрать вершину, провести через неё три прямые, соответственно параллельные осям координат, и выбрать ~~на этих прямых две точки~~ две точки на этих прямых (которые лежат на разных прямых, иначе все будут на одной прямой).

Считаем: все координаты по модулю меньше либо равны 4!
=> принадлежат от -4 до 4 включительно. целые
=> 9 возможных значений для каждой коорд. (от -4 до 4)
=> Способов выбрать точку $C = 9\cdot 9\cdot 9 = 9^3$. Для каждой такой точки проводим три прямые через неё (паралл. осям). На каждой

ЛИСТ 5 | из таких прямых 8 подходящих точек →

ЧИСТОВИК | Задача 3 | (ПРОДОЛЖЕНИЕ 2)

(8 точек, т.к. ~~...~~ из 9 точек – точка C)

⇒ для каждой C три прямые по 8 точек.

⇒ Способов выбрать 2 разные прямые $= C_3^2 = C_3^1 = 3$,

Способов выбрать точку на одной прямой $= 8$,

— // — на ~~другой~~ второй прямой $= 8$

⇒ Способов выбрать по точке на 2 разных прямых равно $8 \cdot 8 = 8^2$

⇒ Способов выбрать 2 т. на 2 разных прямых для точки C равно $8^2 \cdot 3$

⇒ Способов выбрать C равно 9^3

$9^3 = 81 \cdot 9 = 729$

⇒ Итого: $9^3 \cdot 8^2 \cdot 3 = \boxed{139968}$ $\quad 9^3 \cdot 3 = 729 \cdot 3 = 2187$

Ответ: 139968

$2187 \cdot 64 = 8748 + 13122 = 139968$

ЛИСТ 6

ЧИСТОВИК | Задача № 5

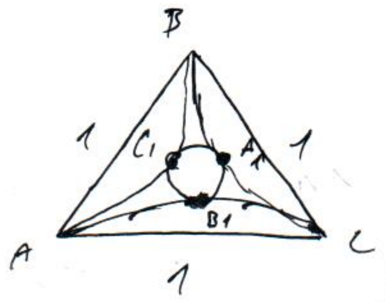
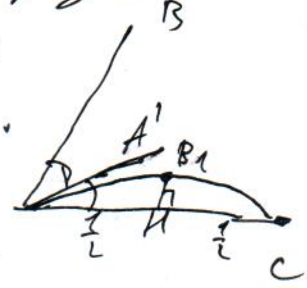


Рисунок симметричен. Получаем равносторонний симметричный "треугольник" из трех графиков $y = Cx^2$ ⇒ Очевидно, что точки касания окружности с параболами будут вершинами парабол (иначе дуги AC_1 и C_1B бы не были равны, что противоречит "равностороннему симметричному "Δ"") Углы нулевые ⇒ ~~Угол C_1AB_1~~ дуги C_1A и B_1A касаются в т. A ⇒ Можно провести касательную из точки A к этим дугам, которая, в силу симметрии, будет находиться на равных расстояниях от этих одинаковых дуг (повернутых) ⇒ будет биссектриса угла BAC:



Δ BAC - р/с Δ ⇒ все углы 60°

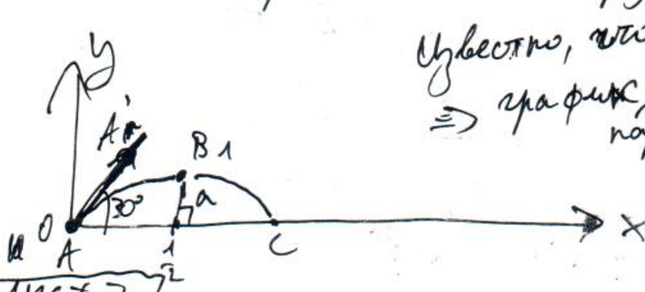
⇒ $\angle A'AC = 30°$

(т.к. AA' - бис.)

Опустим перпендикуляр B_1H из B_1 к AC. В силу симметрии он попадет в середину AC (дуги AB_1 и B_1C равны)

Обозначим B_1H за a.

⇒ Можно нарисовать на коорд. осях:



Известно, что все параболы вида Cx^2 ⇒ график AB_1C параболы будет задаваться формулой $y = a - C(x-\frac{1}{2})^2$

⇒ $y = a - C(x - \frac{1}{2})^2$

ЛИСТ 7

(ЧИСТОВИК) (Задача ~~№~~5) (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

Посчитаем производную по x:

$y'_x = -C\cdot 2(x-0,5)$

У нас есть касательная AA' к графику f в т. $x=0$,

~~Но~~ Причем производная AA' равна $tg(\angle A'AC) =$

$= tg\, 30 = \frac{\sin 30}{\cos 30} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt3} = \frac{1}{\sqrt3}$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt3} = -C\cdot 2\underbrace{(0-0,5)}_{-\frac12} = -\frac{2C}{-2} = C$

$\Rightarrow C = \frac{1}{\sqrt3}$

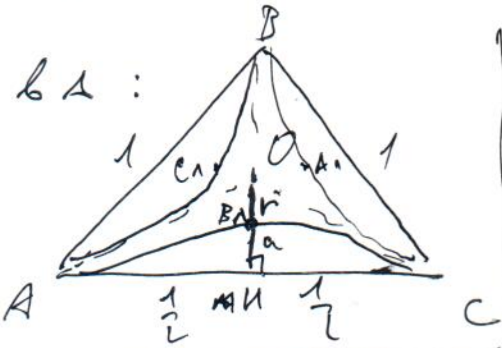
$\Rightarrow$ Можно найти a; ~~это значение функции в т. $x=0,5$~~

~~...~~ в т. $x=0$, $y=0$:

$y = a - C(x-0,5)^2 = a - \frac{1}{\sqrt3}(0-0,5)^2 = 0$

$\Rightarrow a = \frac{1}{\sqrt3}\left(-\frac12\right)^2 = \frac{1}{\sqrt3\cdot 4} = \frac{\sqrt3}{12}$

Вернемся в Δ:



Центр окружности будет лежать на пересеч. бис. "треугольника" из парабол, которые также являются бис-сами ΔABC ~~(смотреть...)~~

(было объяснено ранее для AA', для остальных аналогично).

$\Rightarrow$ Можно найти R – радиус окр-ти, вписанной в ΔABC, и тогда $r = R - a$ (т.к. OH – радиус окр-ти, впис. в ΔABC, $\Rightarrow OH = R = OB_1 + B_1H = r + a \Rightarrow r = R - a$)

$\Rightarrow$ ЛИСТ 8

ЧИСТОВИК) Задача №5) (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

~~(A_1, B_1, C_1, A_1 явл-ся точками касания к окружности т.к. это вершины)~~

($OH = \cancel{OH}\ OB_1 + B_1H$, т.к. O, B_1 и H лежат на одной прямой (OH – радиус окр-ти, вписанной в правильный $\triangle ABC \Rightarrow OH \perp AC$, (H – середина) ~~H середина~~, а раньше мы опускали H из $B_1 \Rightarrow B_1H \perp AC$

$\left.\begin{matrix}\Rightarrow OH \perp AC \\ B_1H \perp AC\end{matrix}\right| \Rightarrow \left.\begin{matrix} OH \parallel B_1H \\ H\text{ – общая}\end{matrix}\right| \Rightarrow O, H, B_1$ с одной прямой)

$$R = \frac{S}{p} = \frac{\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot \sin 60^\circ}{\frac{1+1+1}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{3}\cdot 2}{12} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

полупериметр

$$\Rightarrow r = R - a = \frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{\sqrt{3}}{12} = \frac{2\sqrt{3}}{12} - \frac{\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{12}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{12}$

ЛИСТ 5

ЧИСТОВИК

Задача №8

$$8x^2\cdot\log_a x-\log_x a-2x\le 0$$

(1)

ОДЗ: $\begin{cases} x>0;\ x\ne 1\\ a>0;\ a\ne 1\end{cases}\Rightarrow \log_x a=\dfrac{1}{\log_a x}$

$$8x^2\cdot\log_a x-\frac{1}{\log_a x}-2x\le 0$$

$$\frac{8x^2\cdot\log_a^2 x-1}{\log_a x}-2x\le 0$$

$$\frac{8x^2\cdot\log_a^2 x-2\log_a x\cdot x-1}{\log_a x}\le 0 \quad \Big|: x>0$$

(по ОДЗ)

$$\frac{8(x\cdot\log_a x)^2-2(x\cdot\log_a x)-1}{(x\cdot\log_a x)}\le 0$$

Замена: $t=x\cdot\log_a x$

$$\frac{8t^2-2t-1}{t}\le 0 \quad \Big|\cdot(-1)$$

$$\frac{1+2t-8t^2}{t}\ge 0$$

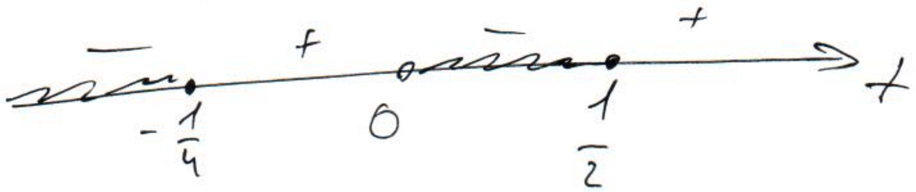
$$\frac{(1+4t)(1-2t)}{t}\ge 0 \quad \Big|\cdot(-1)$$

ЛИСТ 10

Чистовик | Задача № 8 | ПРОДОЛЖЕНИЕ

$$\frac{(4t+1)(2t-1)}{t} \le 0 \quad |:8$$

$$\frac{(t+\frac{1}{4})(t-\frac{1}{2})}{t} \le 0$$



$$\Rightarrow t \in (-\infty; -\tfrac{1}{4}] \cup (0; \tfrac{1}{2}]$$

Обратная замена: $t = x \cdot \log_a x$:

$$x \cdot \log_a x \in (-\infty; -\tfrac{1}{4}] \cup (0; \tfrac{1}{2}]$$

$$\Downarrow$$

$$\log_a x^x \in (-\infty; -\tfrac{1}{4}] \cup (0; \tfrac{1}{2}]$$

Рассмотрим случаи:

(I) $a > 1$:

$$x^x \in (\cancel{-\infty}\ 0; a^{-\frac{1}{4}}] \cup (1; a^{\frac{1}{2}}]$$

$\Rightarrow$ ~~Надо чтобы~~ $\Rightarrow$ левый полуинтервал всегда будет, т.к. $a^{-\frac{1}{4}} > 0$ $(a > 0)$. Значит, надо чтобы $a^{\frac{1}{2}} \le 1$ (чтобы не было правого полуинтервала $\Rightarrow a \le 1$ – не подходит.

(II) $a < 1$:

$$x^x \in [a^{\frac{1}{2}}; 1) \cup [a^{-\frac{1}{4}}; +\infty)$$

$\Rightarrow$ правый полуинтервал всегда будет $(a^{-\frac{1}{4}} < +\infty)$, значит надо, чтобы не было левого $\Rightarrow$ $a^{\frac{1}{2}} \ge 1 \Rightarrow a \ge 1$ – не подходит

$\Rightarrow$ В любом случае будет 2 полуинтервала ???

Ответ: нет таких a?

Лист 11

ЧИСТОВИК (Задача №6)

Координаты:

(1) $A(-3;7;6)$
$B(3;5;6)$
$C(3;0;2)$
$D(0;0;2)$

(2) $\Rightarrow$ т. E на AB имеет коорд.: $E(x; -\frac{x}{3}+6; 6)$

$x \in [-3;3]$

(3) Если продлить EC до пересечения с землёй $(z=0)$:

$F = EC \cap$ земля:

$\vec{EC}\{3-x; -6+\frac{x}{3}; 2-6\} \Rightarrow \vec{EC}\{3-x; -6+\frac{x}{3}; -4\}$

$\Rightarrow$ Чтобы опуститься до земли, нужно провести из C $+0{,}5\vec{EC}$ (т.к. $+0{,}5\vec{EC} = \{\frac{3-x}{2}; \frac{-6+\frac{x}{3}}{2}; -2\}$, а нам надо опуститься на 2)

$\Rightarrow C+0{,}5\vec{EC} = (3;0;2)+\left(\frac{3-x}{2}; \frac{-6+\frac{x}{3}}{2}; -2\right) =$

$= \left(3+\frac{3-x}{2}; \frac{-6+\frac{x}{3}}{2}; 0\right) = \left(\frac{6+3-x}{2}; -3+\frac{x}{6}; 0\right)$

$\Rightarrow F\left(\frac{9-x}{2}; \frac{x-18}{6}; 0\right)$

ЛИСТ 12

Чистовик | Задача №8 | (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

④ Если ED провести до пересечения с землей ($z=0$):

$G = ED \cap$ земля:

$\overrightarrow{ED}\{-x; \frac{x}{3}-6; 2-6\} \Rightarrow \overrightarrow{ED}\{-x; \frac{x-18}{3}; -4\}$

$\Rightarrow$ из т. D надо провести $0{,}5\,\overrightarrow{ED}$, чтобы пересечь землю (т.к. $0{,}5\,\overrightarrow{ED} = \{-\frac{x}{2}; \frac{x-18}{6}; -2\}$, а нам надо опуститься на 2)

$\Rightarrow G = D + 0{,}5\,\overrightarrow{ED} = (0;0;2) + \{-\frac{x}{2}; \frac{x-18}{6}; -2\} =$

$= (-\frac{x}{2}; \frac{x-18}{6}; 0)$

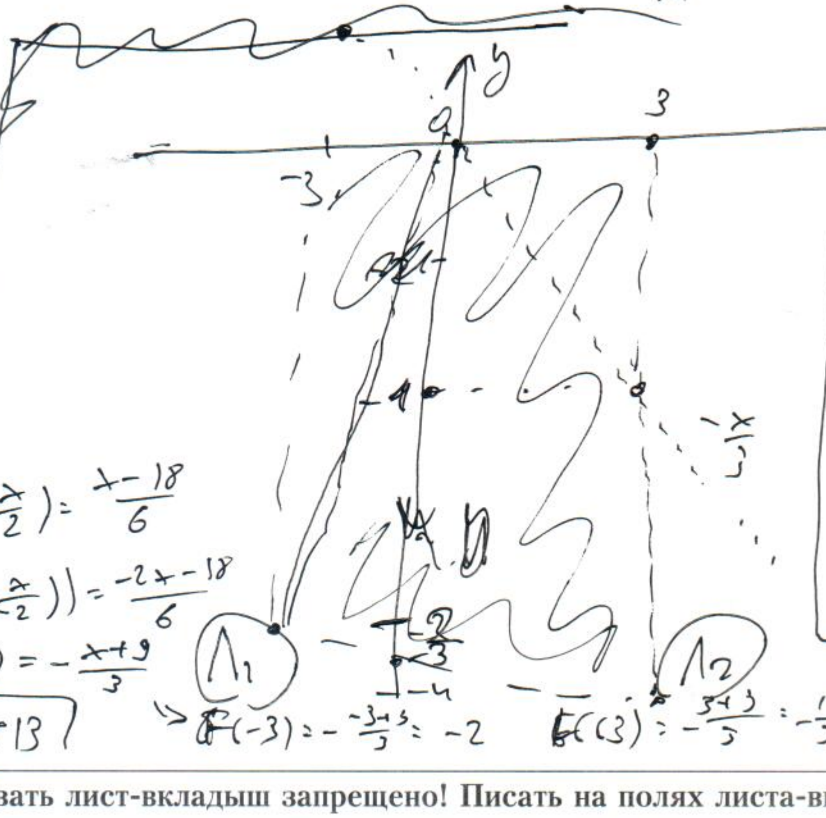
$\Rightarrow G(-\frac{x}{2}; \frac{x-18}{6}; 0)$

$F(\frac{9-x}{2}) = \frac{x-18}{6}$

$F(2\cdot(\frac{9-x}{2})) = \frac{2x-18}{6}$

$F(9-x) = \frac{x-9}{3}$

⑤ Нарисуем F и G (графики): $\Rightarrow \boxed{F(x) = -\frac{x}{3}}$



$G(-\frac{x}{2}) = \frac{x-18}{6}$

$G(-2(\frac{x}{-2})) = \frac{-2x-18}{6}$

$G(x) = -\frac{x+9}{3}$

$\Rightarrow S = S_{A_1A_2O_3} =$

$= \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3 + \frac{3+4}{2}\cdot 3 =$

$= \frac{9}{2} + \frac{21}{2} = \frac{30}{2}$

$\Downarrow$

$S = 15$

Ответ: 15

$\Rightarrow F(-3) = -\frac{-3+3}{3} = -2$ $\quad F(3) = -\frac{3+3}{3} = -\frac{12}{3} = -4$

$G(0) = -3$

ЛИСТ 13

Чистовик: № 4

Z