



0 844595 710001

84-45-95-71

(124.23)



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 11 класс, вариант 1

Место проведения г. Москва  
город

+1 мес. Моск.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников "Ломоносов"  
наименование олимпиады

по Математике  
профиль олимпиады

Замлодчикова Алексея Игоревича

фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«29» марта 2026 года

Подпись участника

Алексей

## ЧИСТО ВИК | Задача 1

$$\sqrt{6(1 - \operatorname{tg}^2 x)} = 4 \sin x \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{ОДЗ: } \sin x \geq 0 \text{ (т.к. равен корню)} \\ \cos x \neq 0 \text{ (т.к. } \operatorname{tg} x) \end{array} \right.$$

$$6 \left( 1 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \right) = 16 \sin^2 x$$

$$3 \cdot 2 \left( \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x} \right) = 2 \cdot 8 \sin^2 x \quad | \cdot \cos^2 x \neq 0 \text{ (по ОДЗ)}$$

$$3(\cos^2 x - \sin^2 x) = 2 \cdot 4 \sin^2 x \cdot \cos^2 x$$

$$3 \cos 2x = 2 \cdot \sin^2 2x$$

$$3 \cos 2x = 2(1 - \cos^2 2x)$$

$$3 \cos 2x = 2 - 2 \cos^2 2x$$

$$2 \cos^2 2x + 3 \cos 2x - 2 = 0$$

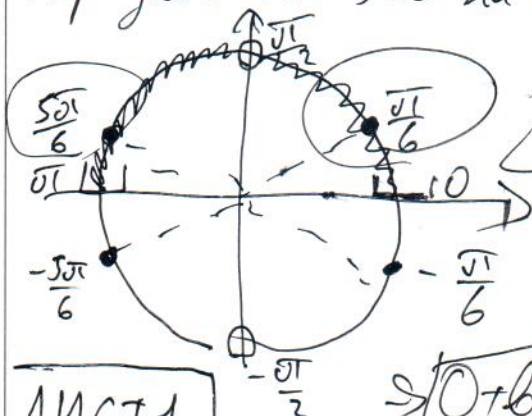
$$D = 3^2 + 2 \cdot 2 \cdot 4 = 3^2 + 4^2 = 5^2$$

$$\cos 2x_{1,2} = \frac{-3 \pm 5}{4} = \begin{cases} \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2} \\ \frac{-5-3}{4} = \frac{-8}{4} = -2 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{т.к. } \cos 2x \in [-1; 1] \\ \text{т.к. } \cos 2x \in [-1; 1] \end{array}$$

$$\Rightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k \Rightarrow \boxed{x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{ОДЗ: } \cos x \neq 0 \rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k \\ \sin x \geq 0 \rightarrow x \in [2\pi k; \pi + 2\pi k] \end{array} \right\} (k \in \mathbb{Z})$$

Нарисуем всё это на окружности:



Получается только:  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \end{cases}$

ЛИСТ 1

$$\Rightarrow \text{Ответ: } x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k; x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

ЧИСТОВИК

Задача 2

Обозначим сумму цифр числа  $n$  как  $S(n)$ .

Тогда:  $n = S(n) \cdot g \cdot k$ , где  $k \in \mathbb{N}$

(т.к.  $n$  делится на  $S(n)$  и  $g$ )

(т.к.  $\frac{n}{S(n) \cdot g} = k$  - натуральное число)

(по условию  $\frac{n}{S(n)} = g \cdot k, k \in \mathbb{N}$ )

Тогда число  $n$  делится на  $g$ . Следовательно, числа, делящиеся на  $g$ : сумма их цифр также делится на  $g$ . Значит, что  $n : g$  и  $S(n) : g$ ,

но  $n$  делится на  $g \cdot S(n) \Rightarrow n$  делится на  $g \cdot S(n)$ , где  $S(n) : g \Rightarrow n : 81$ .

Распишем все трехзначные числа, которые делятся на 81:  
162; 243; 324; 405; 486; 567; 648; 729; 810;

891; 972. Все эти числа делятся на 81. Осталось проверить те, где сумма цифр равна 18 (т.к. такие числа должны делиться на  $5 \cdot 18 = 81 \cdot 2 = 162$ ):

1)  $486 = 81 \cdot 6$ ,  $\frac{81 \cdot 6}{9 \cdot 18} = \frac{81 \cdot 6}{81 \cdot 2} = 3$  - подходит

2)  $567 = 81 \cdot 7$ ,  $\frac{81 \cdot 7}{81 \cdot 2} = \frac{7}{2}$  - не подходит

3)  $648 = 81 \cdot 8$ ,  $\frac{81 \cdot 8}{81 \cdot 2} = 4$  - подходит

4)  $729 = 81 \cdot 9$ ,  $\frac{81 \cdot 9}{81 \cdot 2} = \frac{9}{2}$  - не подходит

5)  $810 = 81 \cdot 10$ ,  $\frac{81 \cdot 10}{81 \cdot 2} = \frac{10}{2} = 5$  - не подходит

6)  $972 = 81 \cdot 12$ ,  $\frac{81 \cdot 12}{81 \cdot 2} = 6$  - подходит

Проверим на себя: подходит

ЛИСТ 2

Остальные числа  $S(n)$  (задача 2, ПРОДОЛЖЕНИЕ) ЧИСТОВИК  
 (у которых  $S(n) = 9$ ) поурядит, т.к. они

должны делиться на  $9 \cdot S(n) = 9 \cdot 9 = 81$ , что и так обеспечено (выписали только те числа, что делятся на 81).

Итого:  $162$ ;  $243$ ;  $324$ ;  $405$ ;  $486$ ;  $648$ ;  $810$ ;  $972$ .

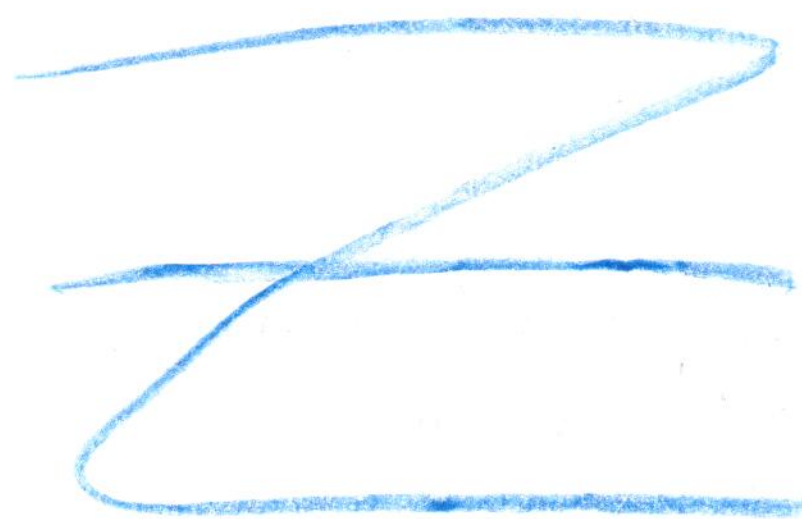
Требуется найти сумму второго, пятого, и предпоследнего.

→ Сумму второго, пятого, и седьмого (всего чисел  $8 \Rightarrow 7$  - предпослед.)

$$\begin{aligned} \rightarrow 243 + 486 + 810 &= 81(3 + 6 + 10) = 81 \cdot 19 = 1539 \\ \underline{81 \cdot 3} \quad \underline{81 \cdot 6} \quad \underline{81 \cdot 10} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 810 \\ 1053 \\ \hline 486 \\ \hline 1539 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 81 \\ 19 \\ \hline 729 \\ 81 \times \\ \hline 1539 \end{array}$$

Ответ:   
 Требуемое число, входящее в А:  
 $162; 243; 324; 405; 486; 648; 810; 972$ ,  
 Сумма второго, пятого и предпоследнего =  $1539$



ЦИСТОВИК [Задача 3]

Возьмем три точки A, B, C, которые как показывает (обозначено  $\triangle$ )  
 $A(x_a; y_a; z_a); B(x_b; y_b; z_b); C(x_c; y_c; z_c)$ .

Будем считать, что  $\angle ACB = 90^\circ$ . Тогда AC и CB - катеты, AB - гипотенуза  $\triangle ABC$ .

$\Rightarrow AC$  и  $CB$  должны быть ~~параллельны координатным~~ <sup>параллельны</sup> ~~оси~~ <sup>осей</sup> ~~и~~ <sup>и</sup> ~~оси~~ <sup>осей</sup>.  
 осей (или AC и CB  $\rightarrow AC \parallel$  какой-то оси,  $CB \parallel$  какой-то оси).

Допустим,  $AC \parallel O_x$ . Возьмем вектор  $\vec{x}$ , который лежит на  $O_x$ :  $\vec{x} = \{1; 0; 0\}$

$\Rightarrow \vec{AC}$  должен быть коллинеарен  $\vec{x}$ , т.е. ~~он~~

$\vec{AC} = \{x_c - x_a; y_c - y_a; z_c - z_a\}$   $y_c = y_a$  и  $z_c = z_a$   
 (иначе вектор не будет коллинеарен)

$\rightarrow$  координаты по y и z должны совпадать у A и C.

$\Rightarrow$  y имь должны совпадать 2 коорд. из трёх?

Если проделать аналогичные рассуждения для

CB и какой-то оси, то получим также:

y C и B должны совпадать 2 координаты из трёх

~~Важно заметить: у A, B и C не могут совпадать у всех 2 координаты из трёх, иначе они будут лежать на одной прямой и не будет прямоугольного треугольника.~~

- $\Rightarrow$  у A и C совп. 2 коорд.
- у B и C совп. 2 коорд
- ~~у A и B совп. 2 коорд~~

(Проекция на ось). и т.д.

84-45-95-71  
(124.23)

**ЦИСТОВИК** [Задача 3] (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

Предположим, что у  $A$  и  $B$  совпадают 2 коорд.  
Тогда они лежат на одной прямой, параллельной  
какой-то оси. Но это невозможно, т.к.  $A$  и  $B$   
уже лежат на

Допустим, у  $A$  и  $C$  совпадают коорд. (1) и (2)  
у  $B$  и  $C$  совпадают коорд (1) и (3)

(у  $B$  и  $C$  не могут тоже совпасть (1) и (2), иначе  
у  $A, B$  и  $C$  совпадают (1) и (2)  $\Rightarrow$  они все  
лежат на одной прямой, параллельной какой-то  
оси - не будет треугольн.  $\Delta$ , т.к. лежат на  
одной прямой)

$\Rightarrow$  тогда у  $A, B$  и  $C$  совпадают коорд (1),  
у  $A$  и  $C$  совп. коорд (2),  
у  $B$  и  $C$  совп. коорд (3).

$\Rightarrow$  Удобно выбрать такой треугольник, каюо выбрать  
точку  $C$  с коорд (1) (2) (3), одну точку с коорд (1) (2) и  
и одну с коорд (1) (3).

$\Rightarrow$  Т.е. выбрать <sup>соответственно</sup> вершину, провести через неё  
три прямые, параллельные осям координат, и выбрать  
~~на этих прямых две точки~~ две точки на этих  
прямых (которые лежат на разных прямых,  
иначе все будет на одной прямой). либо равно!

$\Rightarrow$  считаем: все координаты по модулю меньше 4  
 $\Rightarrow$  принадлежат от от -4 до 4 включительно. <sup>целые</sup>  
 $\Rightarrow$  Возможных значений для каждой коорд. (от -4 до 4)  
 $\Rightarrow$  Способов выбрать точку  $C = 9 \cdot 9 \cdot 9 = 9^3$ . Для каждой такой  
точки проводим три прямые через неё (паралл. осей). На каждой

Лист 5 | у таких прямых 8 ~~или~~ походим точек  $\rightarrow$

**ЧИСТОВИК** (Задача 3) (ПРОДОЛЖЕНИЕ 2)

- (8 точек, т.к. ~~9 точек~~ 9 точек - точка С)
- Для каждой С три прямые по 8 точек.
  - Способов выбрать 2 разные прямые =  $C_3^2 = C_3^1 = 3$ ,
  - Способов выбрать точку на одной прямой = 8,
  - // — на ~~другой~~ второй прямой = 8
  - Способов выбрать ~~2~~ <sup>2</sup> точки на 2 разных прямых равно  $8 \cdot 8 = 8^2$
  - Способов выбрать 2 т. на 2 разных прямых для точки С равно  $8^2 \cdot 3$
  - Способов выбрать С равно  $9^3$
  - Итого:  $9^3 \cdot 8^2 \cdot 3 = 139968$

**Ответ: 139968**

$9^3 = 81 \cdot 9 = 729$

$9^2 \cdot 3 = 225 \cdot 3 = 2187$

$8^2 = 64$

$139968$

$139968 \cdot 8 = 1119744$

$1119744 \cdot 3 = 3359232$

$3359232 \cdot 8 = 26873856$

$26873856 \cdot 3 = 80621568$

$80621568 \cdot 8 = 645072544$

$645072544 \cdot 3 = 1935217632$

$1935217632 \cdot 8 = 15481741056$

$15481741056 \cdot 3 = 46445223168$

$46445223168 \cdot 8 = 371561785344$

$371561785344 \cdot 3 = 1114685356032$

$1114685356032 \cdot 8 = 8917482848256$

$8917482848256 \cdot 3 = 26752448544768$

$26752448544768 \cdot 8 = 214019588358144$

$214019588358144 \cdot 3 = 642058765074432$

$642058765074432 \cdot 8 = 5136470120595456$

$5136470120595456 \cdot 3 = 15409410361786368$

$15409410361786368 \cdot 8 = 123275282894290944$

$123275282894290944 \cdot 3 = 369825848682872832$

$369825848682872832 \cdot 8 = 2958606789462982656$

$2958606789462982656 \cdot 3 = 8875820368388947968$

$8875820368388947968 \cdot 8 = 71006562947111583744$

$71006562947111583744 \cdot 3 = 213019688841334751232$

$213019688841334751232 \cdot 8 = 1704157510730678009856$

$1704157510730678009856 \cdot 3 = 5112472532192034029568$

$5112472532192034029568 \cdot 8 = 40900780257536272236544$

$40900780257536272236544 \cdot 3 = 122702340772608816709632$

$122702340772608816709632 \cdot 8 = 981618726180870533677056$

$981618726180870533677056 \cdot 3 = 2944856178542611601031168$

$2944856178542611601031168 \cdot 8 = 23558849428340892808249344$

$23558849428340892808249344 \cdot 3 = 70676548285022678424748032$

$70676548285022678424748032 \cdot 8 = 565412386280181427397984256$

$565412386280181427397984256 \cdot 3 = 1696237158840544282193952768$

$1696237158840544282193952768 \cdot 8 = 13570897270724354257551622144$

$13570897270724354257551622144 \cdot 3 = 40712691812173062772654866432$

$40712691812173062772654866432 \cdot 8 = 325701534497384502181238931456$

$325701534497384502181238931456 \cdot 3 = 977104603492153506543716794368$

$977104603492153506543716794368 \cdot 8 = 7816836827937228052349734354944$

$7816836827937228052349734354944 \cdot 3 = 23450510483811784157049203064832$

$23450510483811784157049203064832 \cdot 8 = 187604083870494273256393624518656$

$187604083870494273256393624518656 \cdot 3 = 562812251611482819769180873555968$

$562812251611482819769180873555968 \cdot 8 = 4502498012891862558153446988447744$

$4502498012891862558153446988447744 \cdot 3 = 13507494038675587674460340965343232$

$13507494038675587674460340965343232 \cdot 8 = 108059952309404701395682727722745856$

$108059952309404701395682727722745856 \cdot 3 = 324179856928213403187048183168237568$

$324179856928213403187048183168237568 \cdot 8 = 2593438855425707225496385465345900608$

$2593438855425707225496385465345900608 \cdot 3 = 7780316566277116556489156396037701824$

$7780316566277116556489156396037701824 \cdot 8 = 62242532530216932451913251168301614592$

$62242532530216932451913251168301614592 \cdot 3 = 186727597590650797355739753504909073728$

$186727597590650797355739753504909073728 \cdot 8 = 1493820780725206378845918028039272589824$

$1493820780725206378845918028039272589824 \cdot 3 = 4481462342175619136537754084117867769472$

$4481462342175619136537754084117867769472 \cdot 8 = 35851708737404953092302032672942942159168$

$35851708737404953092302032672942942159168 \cdot 3 = 107555126212214859276906098018828826477504$

$107555126212214859276906098018828826477504 \cdot 8 = 860441009697718874215248784150630611820032$

$860441009697718874215248784150630611820032 \cdot 3 = 2581323029093156616445746352451891835460096$

$2581323029093156616445746352451891835460096 \cdot 8 = 2065058423274525293156597081961513468368064$

$2065058423274525293156597081961513468368064 \cdot 3 = 6195175269823575879469791245884540405094272$

$6195175269823575879469791245884540405094272 \cdot 8 = 49561402158588607035758329967076323240754176$

$49561402158588607035758329967076323240754176 \cdot 3 = 148684206475765821091274989901228968322262528$

$148684206475765821091274989901228968322262528 \cdot 8 = 118947365180612656873019991920983174657810048$

$118947365180612656873019991920983174657810048 \cdot 3 = 356842095541837970619059975762949523973430144$

$356842095541837970619059975762949523973430144 \cdot 8 = 2854736764334703764952479806103596191787441152$

$2854736764334703764952479806103596191787441152 \cdot 3 = 8564210293004111294857439418310788575362323456$

$8564210293004111294857439418310788575362323456 \cdot 8 = 6851368234403289035885951534648630860290658816$

$6851368234403289035885951534648630860290658816 \cdot 3 = 20554104703209867107657854603945892580871976448$

$20554104703209867107657854603945892580871976448 \cdot 8 = 164432837625678936861262836831567140646975811584$

$164432837625678936861262836831567140646975811584 \cdot 3 = 493298512877036810583788510494701421940927434752$

$493298512877036810583788510494701421940927434752 \cdot 8 = 3946388103016294484670308083957611375527419478016$

$3946388103016294484670308083957611375527419478016 \cdot 3 = 11839164309048883454010924251872834126582297434048$

$11839164309048883454010924251872834126582297434048 \cdot 8 = 94713314472391067632087394014982673012658379471232$

$94713314472391067632087394014982673012658379471232 \cdot 3 = 28413994341717320289626218204494801903797513841376$

$28413994341717320289626218204494801903797513841376 \cdot 8 = 227311954733738562317010545635958415230380110729408$

$227311954733738562317010545635958415230380110729408 \cdot 3 = 68193586420121568695103163690787527689114033218816$

$68193586420121568695103163690787527689114033218816 \cdot 8 = 545548691360972549560825309526300221512912265750528$

$545548691360972549560825309526300221512912265750528 \cdot 3 = 1636646074082917648682475928578900664538736797251616$

$1636646074082917648682475928578900664538736797251616 \cdot 8 = 130931685926633411894598074286312053163098943780128$

$130931685926633411894598074286312053163098943780128 \cdot 3 = 392795057779800235683794222858936159489296831340384$

$392795057779800235683794222858936159489296831340384 \cdot 8 = 3142360462238401885470353782871489275914374650723072$

$3142360462238401885470353782871489275914374650723072 \cdot 3 = 9427081386715205656411061348614467827743123952169216$

$9427081386715205656411061348614467827743123952169216 \cdot 8 = 75416651093721645251288490788915742621945071617353728$

$75416651093721645251288490788915742621945071617353728 \cdot 3 = 22624995328116493675386547236674722786533521485206144$

$22624995328116493675386547236674722786533521485206144 \cdot 8 = 181000962624931949403092377893397782292268171881650816$

$181000962624931949403092377893397782292268171881650816 \cdot 3 = 543002887874795848209277133680193346876804515645052224$

$543002887874795848209277133680193346876804515645052224 \cdot 8 = 434402310299836678567421706944154677501443612516041728$

$434402310299836678567421706944154677501443612516041728 \cdot 3 = 1303206930899508035702265120832464032504330837548125184$

$1303206930899508035702265120832464032504330837548125184 \cdot 8 = 10425655447196064285618120966659712260034646700385001472$

$10425655447196064285618120966659712260034646700385001472 \cdot 3 = 3127696634158819285685436289997915678010394010015514176$

$3127696634158819285685436289997915678010394010015514176 \cdot 8 = 250215730732705542854834903199833254240831520801241728$

$250215730732705542854834903199833254240831520801241728 \cdot 3 = 750647192198116628564504709599499762722494562403725184$

$750647192198116628564504709599499762722494562403725184 \cdot 8 = 6005177537584933028516037676795998101779956507230601536$

$6005177537584933028516037676795998101779956507230601536 \cdot 3 = 18015532612754799085548113030387994305339869521681804608$

$18015532612754799085548113030387994305339869521681804608 \cdot 8 = 14412426090203839268438490424310395444271895617345483776$

$14412426090203839268438490424310395444271895617345483776 \cdot 3 = 43237278270611517805315477272931186332815686852036451136$

$43237278270611517805315477272931186332815686852036451136 \cdot 8 = 3458982261648921424425238181834514906625254948162910336$

$3458982261648921424425238181834514906625254948162910336 \cdot 3 = 103769467849467642732757145455035447198757648444887300032$

$103769467849467642732757145455035447198757648444887300032 \cdot 8 = 830155742795741141862057163640283577590061187559098400256$

$830155742795741141862057163640283577590061187559098400256 \cdot 3 = 2490467228387223425586171490920850732770183562677295200768$

$2490467228387223425586171490920850732770183562677295200768 \cdot 8 = 19923737827097787404689371927366805862161468501418361606144$

$19923737827097787404689371927366805862161468501418361606144 \cdot 3 = 59771213481293361214068115782080417586484405504255084818432$

$59771213481293361214068115782080417586484405504255084818432 \cdot 8 = 478169707850346889712544926256643340691875244034040678547456$

$478169707850346889712544926256643340691875244034040678547456 \cdot 3 = 1434509123551040669137634778769929962075625732102122035642368$

$1434509123551040669137634778769929962075625732102122035642368 \cdot 8 = 11476072988408325353101078230159439704605005856816976285138944$

$11476072988408325353101078230159439704605005856816976285138944 \cdot 3 = 34428218965224976059303234690478319113815017570450928855416832$

$34428218965224976059303234690478319113815017570450928855416832 \cdot 8 = 275425751721799808474425877523826552910520140563607430843334656$

$275425751721799808474425877523826552910520140563607430843334656 \cdot 3 = 826277255165399425423277632571479658731560421690822292530003968$

$826277255165399425423277632571479658731560421690822292530003968 \cdot 8 = 6610218041323195403386221060571837269852483373526578340240031744$

$6610218041323195403386221060571837269852483373526578340240031744 \cdot 3 = 19830654123969586210158663181715511809557450120579735020720095232$

$19830654123969586210158663181715511809557450120579735020720095232 \cdot 8 = 158645232991756690481269305453724094476459600964639880165760761856$

$158645232991756690481269305453724094476459600964639880165760761856 \cdot 3 = 475935698975270070643807916361172283429378802893919640497282285568$

$475935698975270070643807916361172283429378802893919640497282285568 \cdot 8 = 3807485591802160565150463330889378267435030423151357123978258284544$

$3807485591802160565150463330889378267435030423151357123978258284544 \cdot 3 = 11422456775406481695451389992668134802265091269454071371946774853632$

$11422456775406481695451389992668134802265091269454071371946774853632 \cdot 8 = 91379654203251853563611119941345078418120730155632570975574198829056$

$91379654203251853563611119941345078418120730155632570975574198829056 \cdot 3 = 274138962609755560690833359824035115254362190466896712926722596487168$

$274138962609755560690833359824035115254362190466896712926722596487168 \cdot 8 = 2193111700878044485526666878592280922034905523735173703413780771897344$

$2193111700878044485526666878592280922034905523735173703413780771897344 \cdot 3 = 6579335102634133456580000435776842766084716571205521100241342315692032$

$6579335102634133456580000435776842766084716571205521100241342315692032 \cdot 8 = 52634680821073067652640003486214742128677732569644168801930738525536256$

$52634680821073067652640003486214742128677732569644168801930738525536256 \cdot 3 = 157904042463219202957920010458644226386333197708932505591792215576608768$

$157904042463219202957920010458644226386333197708932505591792215576608768 \cdot 8 = 1263232339705753623663360083669153811090665581671460044734337724612870272$

$1263232339705753623663360083669153811090665581671460044734337724612870272 \cdot 3 = 3789697019117260870990080250807461433271996745014388134203013173838610816$

$3789697019117260870990080250807461433271996745014388134203013173838610816 \cdot 8 = 3031757615293808696792064200645969$

ЧИСТОВИК (Задача № 5)

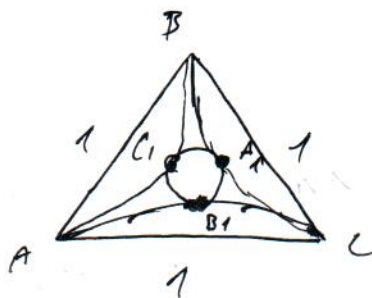


Рисунок симметричен.  
 "Получилась равносоставленная симметричная "треугольная" из трех графиков  $y = Cx^2$   
 $\Rightarrow$  Очевидно, что точки касания окружности с

параболами будут вершинами параболы

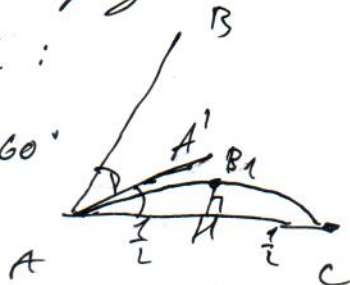
(иначе "углы"  $AC_1$  и  $C_1B$  бы не были равны, что противоречит "равностороннему симметричному  $\Delta$ " )

Углы  $\alpha$  равны  $\Rightarrow$  "углы"  $\angle A_1A$  и  $\angle B_1A$  касаются в т.  $A$ .  $\Rightarrow$  Можно провести касательную из точки  $A$  к этим дугам, которая, в силу симметрии, будет находиться на равном расстоянии от этих одинаковых дуг (повернувшись)  $\Rightarrow$  будет биссектриса угла  $BAC$ :

$\Delta BAC - \text{р-с } \Delta \Rightarrow$  все углы  $60^\circ$

$\Rightarrow \angle A_1AC = 30^\circ$

(т.к.  $AA_1$  - бис.)

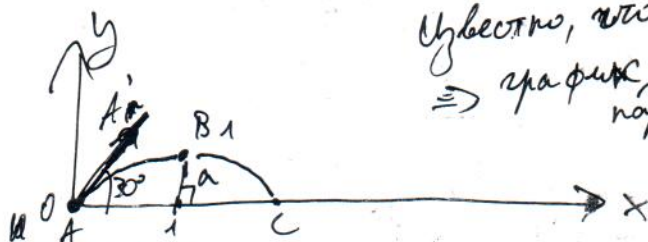


Опустим перпендикуляр  $B_1K$  из  $B_1$  к  $AC$ . В силу симметрии он попадет в середину  $AC$  (дуги  $AB_1$  и  $B_1C$  равны)

Обозначим  $B_1K$  за  $a$ .

$\Rightarrow$  Можно нарисовать на коорд. осях:

Известно, что все параболы лежат  $Cx^2$   
 $\Rightarrow$  график  $AB_1C$  будет задаваться параболой формулой  $y = a - C(x - \frac{1}{2})^2$



$$\Rightarrow y = a - C(x - \frac{1}{2})^2$$

ЦИСТОВИК (Задача 15) (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

Посчитаем производную по  $x$ :

$$y' = -c \cdot 2(x - 0,5)$$

У нас есть касательная  $AA'$  к графику  $f$  в т.  $x=0$ ,

т.е. При этом производная  $AA'$  равна  $\operatorname{tg}(\angle A'AC) =$

$$= \operatorname{tg} 30 = \frac{\sin 30}{\cos 30} = \frac{1 \cdot 2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = -c \cdot 2 \underbrace{(0 - 0,5)}_{-\frac{1}{2}} = \frac{-2c}{-2} = c$$

$$\Rightarrow c = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

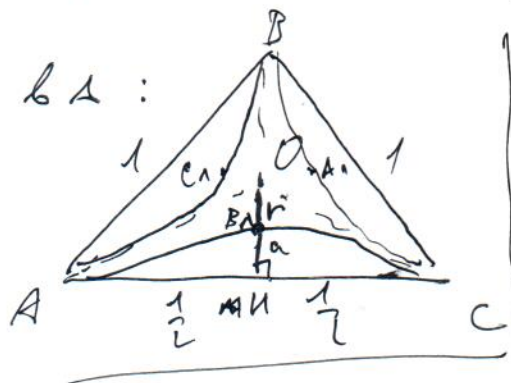
$\Rightarrow$  можно найти  $a$ ; это значение функции в т.  $x=0, y=0$

в т.  $x=0, y=0$ :

$$y = a - c(x - 0,5)^2 = a - \frac{1}{\sqrt{3}}(0 - 0,5)^2 = 0$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{\sqrt{3} \cdot 4} = \frac{\sqrt{3}}{12}$$

Вернемся в  $\Delta$ :



Центр окружности будет лежать на пересеч. бис. "трехугольника" и медиан, которые также являются бис-сами  $\Delta ABC$  (Свойство бис-сы)

(Было очевидно ранее для  $AA'$ , для остальных аналогично).

$\Rightarrow$  Можно найти  $R$  - радиус окр-ти, вписанной в  $\Delta ABC$ , и тогда  $r = R - a$  (т.к.  $OH$  - радиус окр-ти, впис. в  $\Delta ABC$ )

$$\Rightarrow OH = R - OB_1 + B_1H = r + a \Rightarrow r = R - a$$

ЛИСТ 8

ЧИСТОВИК Задача №5 (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

( $\pi$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ ,  $A_1$  все  $\in \pi$  ~~касается  $R$  окружности~~  
т.к. это окружность)

( $OH = \cancel{OB_1} + B_1H$ , т.к.  $O$ ,  $B_1$  и  $H$  лежат на  
одной прямой ( $OH$  - радиус окруж-и, висс в  $\triangle ABC \Rightarrow OH \perp AC$ ,  
а равные висс опускаем  $H$  из  $B_1 \Rightarrow B_1H \perp AC$ ,  
 $\Rightarrow OH \perp AC$   $\left. \begin{array}{l} B_1H \perp AC \\ H - \text{общая} \end{array} \right\} \Rightarrow OH \parallel B_1H \Rightarrow O, H, B_1 \in \text{одной прямой}$ )

$$R = \frac{S}{P} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \cancel{OH} \cdot d^2 \cdot \sin 60^\circ}{\frac{1+1+1}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{3} \cdot 2}{12} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

полупериметр

$$\Rightarrow r = R - a = \frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{\sqrt{3}}{12} = \frac{2\sqrt{3}}{12} - \frac{\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{12}$$

Ответ:  $\frac{\sqrt{3}}{12}$

ЛИСТЫ

[ЧИСТОВИК]

[Задача № 8]

$$8x^2 \cdot \log_a x - \log_x a - 2x \leq 0$$

①

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x > 0; x \neq 1 \\ a > 0; a \neq 1 \end{cases} \rightarrow \log_x a = \frac{1}{\log_a x}$$

$$8x^2 \cdot \log_a x - \frac{1}{\log_a x} - 2x \leq 0$$

$$\frac{8x^2 \cdot \log_a^2 x - 1}{\log_a x} - 2x \leq 0$$

$$\frac{8x^2 \cdot \log_a^2 x - 2 \log_a x \cdot x - 1}{\log_a x} \leq 0 \quad /: x > 0 \quad (\text{по ОДЗ})$$

$$\frac{8(x \cdot \log_a x)^2 - 2(x \cdot \log_a x) - 1}{(x \cdot \log_a x)} \leq 0$$

$$\text{Замена: } t = x \cdot \log_a x$$

$$\frac{8t^2 - 2t - 1}{t} \leq 0 \quad / \cdot (-1)$$

$$\frac{1 + 2t - 8t^2}{t} \geq 0$$

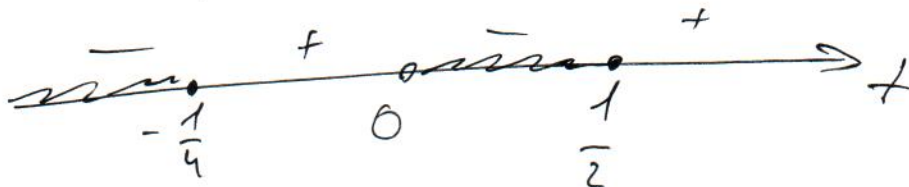
$$\frac{(1 + 4t)(1 - 2t)}{t} \geq 0 \quad / \cdot (-1)$$

[ЛИСТ 10]

ГЧИСТОВИК Задача № 8 } ПРОДОЛЖЕНИЕ

$$\frac{(t+1)(2t-1)}{t} \leq 0 \quad | :8$$

$$\frac{(t + \frac{1}{4})(t - \frac{1}{2})}{t} \leq 0$$



$$\Rightarrow t \in (-\infty; -\frac{1}{4}] \cup (0; \frac{1}{2}]$$

Обратная замена:  $t = x \cdot \log_a x$ :

$$x \cdot \log_a x \in (-\infty; -\frac{1}{4}] \cup (0; \frac{1}{2}]$$

$$\Downarrow$$

$$\log_a x^x \in (-\infty; -\frac{1}{4}] \cup (0; \frac{1}{2}]$$

Рассмотрим случаи:

(I)  $a > 1$ :

$$x^x \in (0; a^{-\frac{1}{4}}] \cup (1; a^{\frac{1}{2}}]$$

$\Rightarrow$  ~~Каждый~~  $\Rightarrow$  левый полуинтервал всегда будет, т.к.  $a^{-\frac{1}{4}} > 0$  ( $a > 0$ ). Значит, надо чтобы  $a^{\frac{1}{2}} \leq 1$  (чтобы не было правого полуинтервала)  $\Rightarrow a \leq 1$  - не подходит.

(II)  $a < 1$ :

$$x^x \in [a^{\frac{1}{2}}; 1) \cup [a^{-\frac{1}{4}}; +\infty)$$

$\Rightarrow$  правый полуинтервал всегда будет ( $a^{-\frac{1}{4}} < +\infty$ ), значит надо, чтобы не было левого  $\Rightarrow a^{\frac{1}{2}} \geq 1 \Rightarrow a \geq 1$  - не нужно

$\Rightarrow$  В любом случае будет 2 полуинтервала ???

Ответ: нет таких  $a$ ?

Лист 41



84-45-95-71  
(124.23)

Исходник } Задача №8 (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

№ 4) Если  $ED$  провести до пересечения с землей ( $z=0$ ):

$G = ED \cap \text{земли}$ :

$$\vec{ED} \left\{ -x; \frac{x}{3} - 6; 2 - 6 \right\} \Rightarrow \vec{ED} \left\{ -x; \frac{x-18}{3}; -4 \right\}$$

$\Rightarrow$  у т.  $D$  провести  $0,5 \vec{ED}$ , чтобы вернуться землю (т.к.  $0,5 \vec{ED}$ ) =  $\left\{ -\frac{x}{2}; \frac{x-18}{6}; -2 \right\}$   
а как надо опуститься на  $z=0$

$$\Rightarrow G = D + 0,5 \vec{ED} = (0; 0; 2) + \left\{ -\frac{x}{2}; \frac{x-18}{6}; -2 \right\} =$$

$$= \left( -\frac{x}{2}; \frac{x-18}{6}; 0 \right)$$

$$\Rightarrow G \left( -\frac{x}{2}; \frac{x-18}{6}; 0 \right)$$

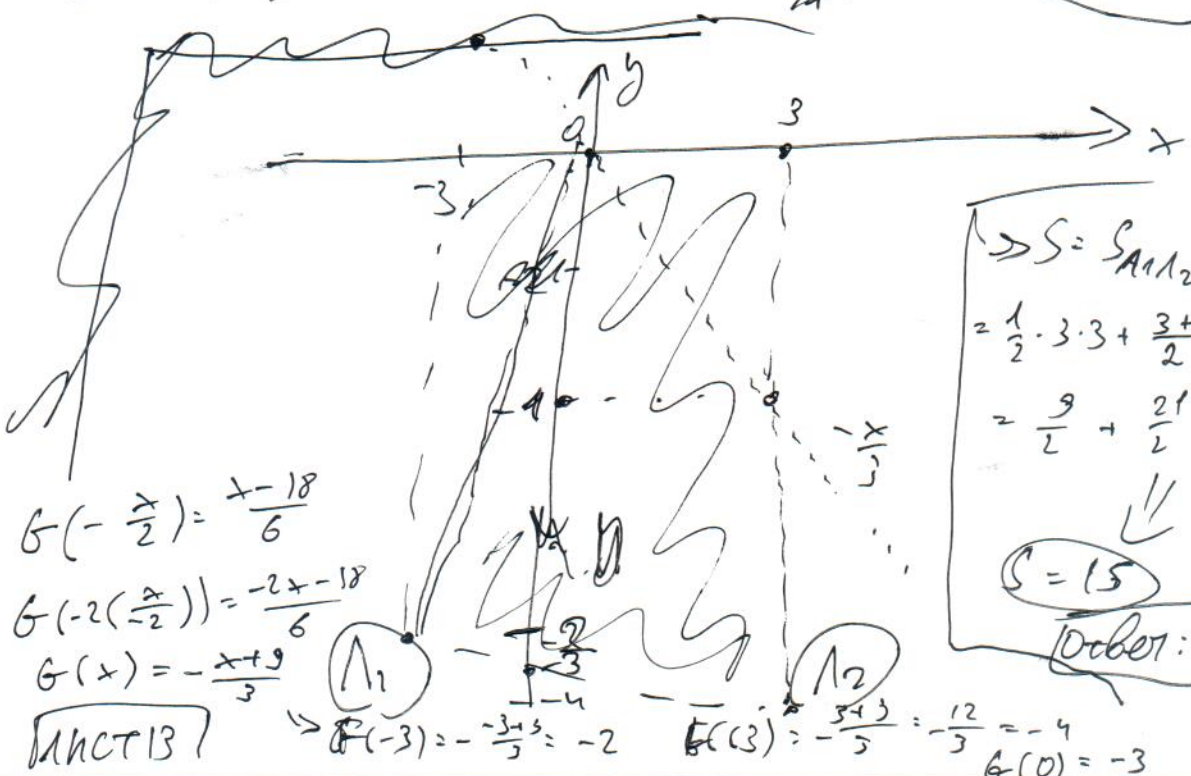
$$F\left(\frac{3-x}{2}\right) = \frac{x-18}{6}$$

$$F\left(2\left(\frac{3-x}{2}\right)\right) = \frac{2x-18}{6}$$

$$F(3-x) = \frac{x-9}{3}$$

5) Картина  $F$  и  $G$  (график):

$$F(x) = -\frac{x}{3}$$



$$G\left(-\frac{x}{2}\right) = \frac{x-18}{6}$$

$$G\left(-2\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \frac{-2x-18}{6}$$

$$G(x) = -\frac{x+9}{3}$$

лист 13

$$\Rightarrow G(-3) = -\frac{-3+9}{3} = -2$$

$$F(3) = -\frac{3}{3} = -1$$

$$\Rightarrow S = S_{A1} + S_{A2}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 + \frac{3+4}{2} \cdot 3 =$$

$$= \frac{9}{2} + \frac{21}{2} = \frac{30}{2}$$

$S = 15$   
Ответ: 15

Историк: №4

