0 258297 670004

25-82-97-67
(124.5)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 11 класс №1

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Ломоносов"
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Зверева Михаила Владимировича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«29» 03 2026 года

Подпись участника

25-82-27-67 (12:5)

Черновик:

$\sqrt{6(1-tg^2x)} = 4\sin x$

$6(1-tg^2x) = 16\sin^2 x$

$1 - tg^2 x = \frac{16\sin^2 x}{6}$

$1 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{8\sin^2 x}{3}$

$ctg x = \frac{\cos x}{\sin x}$

$\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{8\sin^2 x}{3}$

$3\cos^2 x - 3\sin^2 x = 8\sin^2 x \cdot \cos^2 x$

$3\sin 2x = 8\sin^2 x \cdot \cos^2 x$ | $3\cos 2x = 8\sin^2 x \cdot \cos^2 x$

$3\sin 2x = 8\cos 2x$ | $3\cos 2x = 8\sin 2x$ $\quad 3\cos 2x = 8\sin 2x$

$\frac{3\sin 2x}{8\cos 2x} = 1$ $\quad \frac{3\cos 2x}{8\sin 2x} = 1$

$tg 2x = \frac{8}{3}$ $\quad ctg 2x = \frac{8}{3}$

$x = \frac{4}{3}$

$x =$

$\frac{168}{63} = \frac{8}{3}$

$333 : 37$: -27, 63, -63, 0

$297 : 2 = 148{,}5$: -2, 9, -8, 17, -16, 10, -10, 0

$3{,}7 + 3{,}5 = 7{,}2$

$tg x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$29{,}7 : 2 = 14{,}85$

Задача 6:

Светлячок летит – 6м.

Секция забора – 2м.

$S_{затен.}$ – ?

Решение:

$\frac{6}{2} = 3м.$

$8 - 2 = 4м$

Задача 7:

A (3;7) → B (9;5)

$3{,}5 + 3{,}7 =$

(0;0) (3;0) = (3;0)

$\frac{210}{10} = 21см.$ $\quad \frac{21}{2} = 10{,}5$

$\frac{297}{10} = 29{,}7см.$ $\quad \frac{29{,}7}{2} = 14{,}85$

$y = \pm\frac{x^2}{2} + c^2$, где $c \in Z$

~~(10,5; 14,85) – начало координат~~

(14,85; 10,5) – начало координат

$7{,}2 \cdot 2 = 14{,}4$

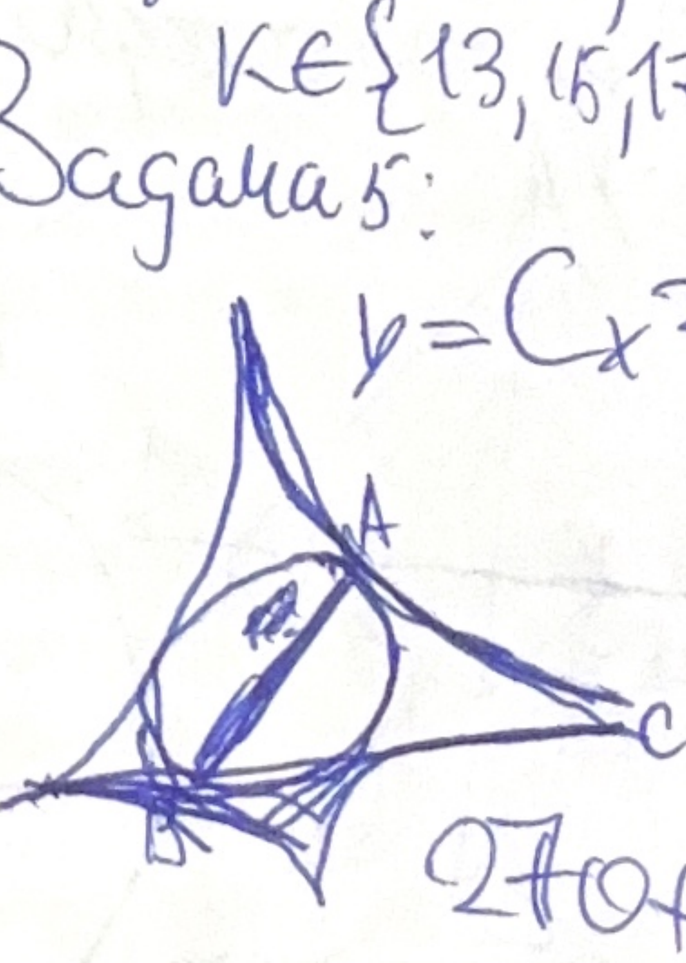
Задача 4:

$y = \sin k\pi x$,

$k \in \{13, 15, 17\}$.

Задача 5:

$y = Cx^2$



Теорема Фалеса: Если на одной стороне угла отложить равные отрезки и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие другую сторону угла, то на другой стороне угла образуются равные отрезки.

Задача: 2.

$A = 333; 450; 270; 180; 360; 540; 630; 720; 810; 900;$

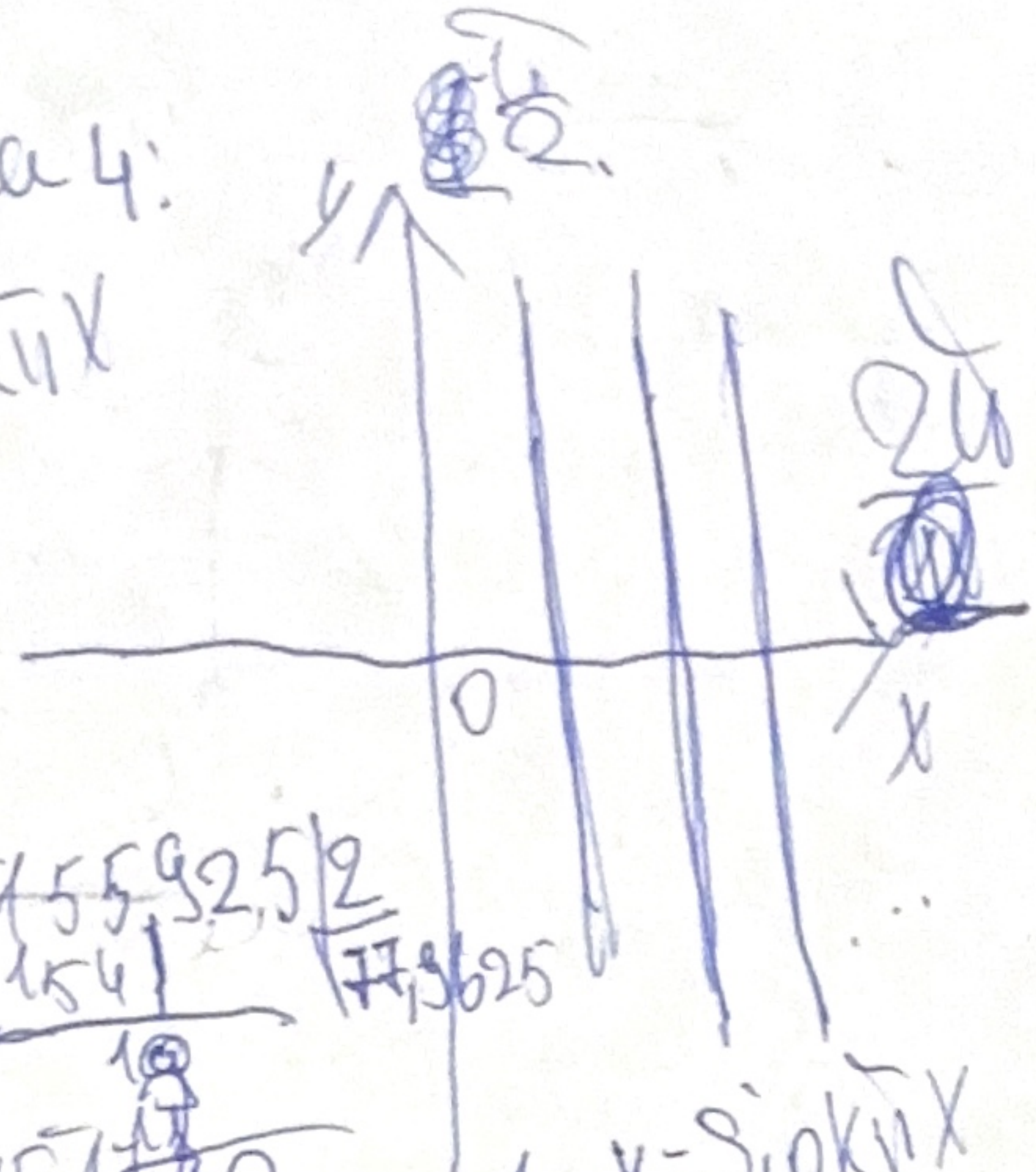
$270 + 450 + 810 =$

Задача: 3 $\quad$ 4; 18

$-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4.$

Задача 4:

$y = \sin k\pi x$



$y = \sin k\pi x$

$1 \quad y = \sin 13\pi$

$\sin 13\pi = 1.$

$\sin 13\pi =$

$\sin 13\pi$

$102,5 \times 14,85$

$15592,5 : 2 = 7796,25$

$K \in \{13, 15, 17 \ldots$

Задача 8:

$8x^2 \log_a x - \log_x a - 2x \le 0.$

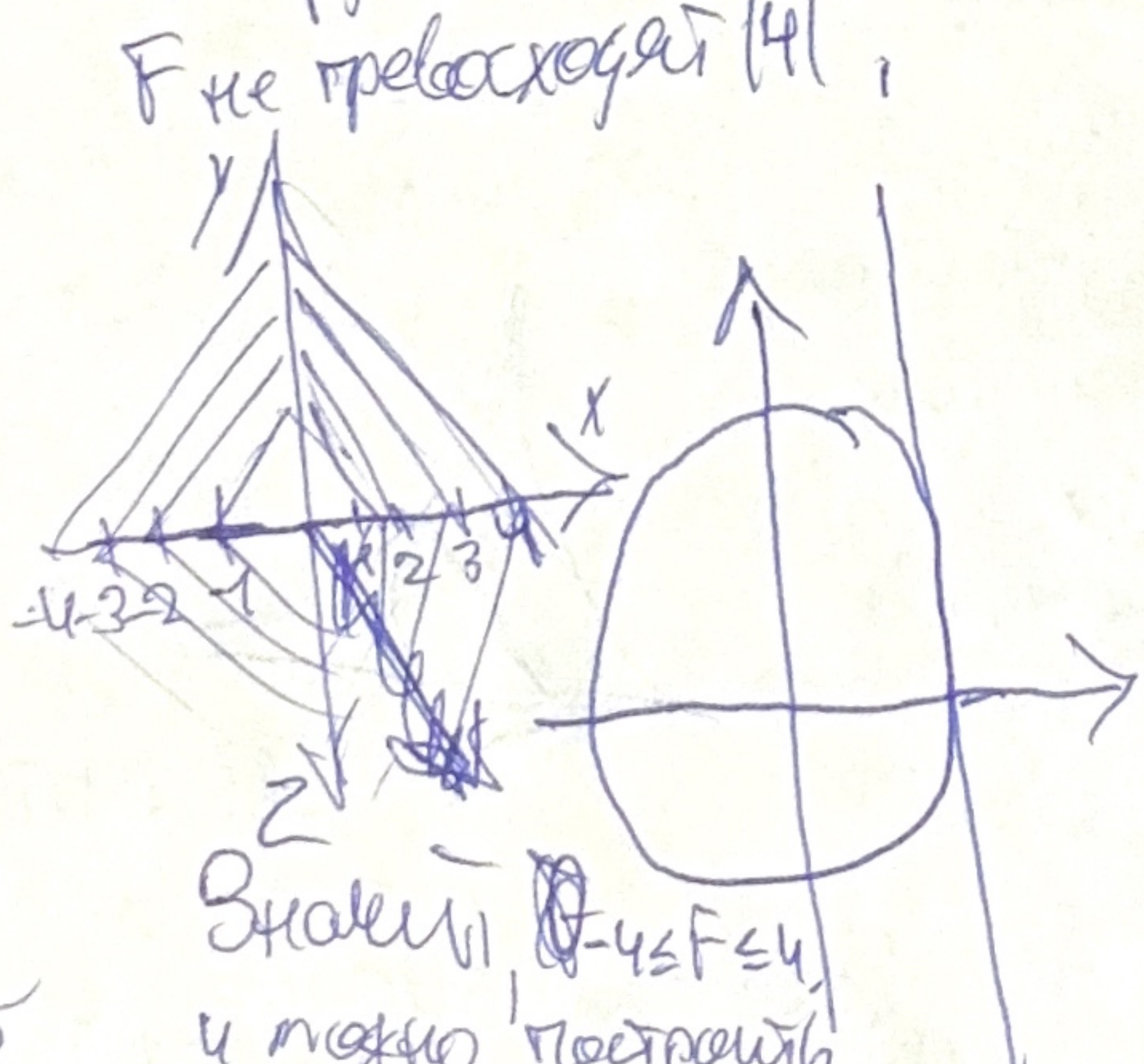
Задача 5:

$y = C_x^2$

$|-| \le |4|$

$30 : 8 = 0,375$

Заметим, что координаты точки F не превосходят $|4|$.



Значит, $-4 \le F \le 4$, и можно построить 16 прямоугольных треугольников.

$270 + 450 = 720$

$720 + 810 = 1530$

Задача 1.

$\sqrt{6(1-\operatorname{tg}^2 x)} = 4\sin x$

$6(1-\operatorname{tg}^2 x) = 16\sin^2 x$

$1 - \operatorname{tg}^2 x = \frac{8\sin^2 x}{3}$

$1 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{8\sin^2 x}{3}$

$\frac{\sin^2 x + \cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{8\sin^2 x}{3}$

$\cancel{\operatorname{tg}^2 x + 1 - \operatorname{tg}^2 x = \frac{8\sin^2 x}{3}}$

$\cancel{3 = 8\sin^2 x}$

$1 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{8\sin^2 x}{3}$

$\cancel{\sin^2 x = \frac{3}{8}}$

$\cancel{\frac{\sin^2 x \cdot \cos^2 x + \cos^4 x - \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{8\sin^2 x}{3}}$

$\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{8\sin^2 x}{3}$

$3\cos^2 x - 3\sin^2 x = 8\sin^2 x \cdot \cos^2 x$

$\cancel{3\cos 2x = 8\sin 2x}$

$\cancel{\sqrt{3}\cos x = 8\sin x = 4\sin x \cdot \cos x}$

$\cancel{\sqrt{3} = \frac{\sin x \cdot \cos x}{\cos x - \sin x}}$

$3\cos^2 x - 3\sin^2 x = 8\sin^2 x \cos^2 x$

$3\cos 2x = 4\sin 2x$

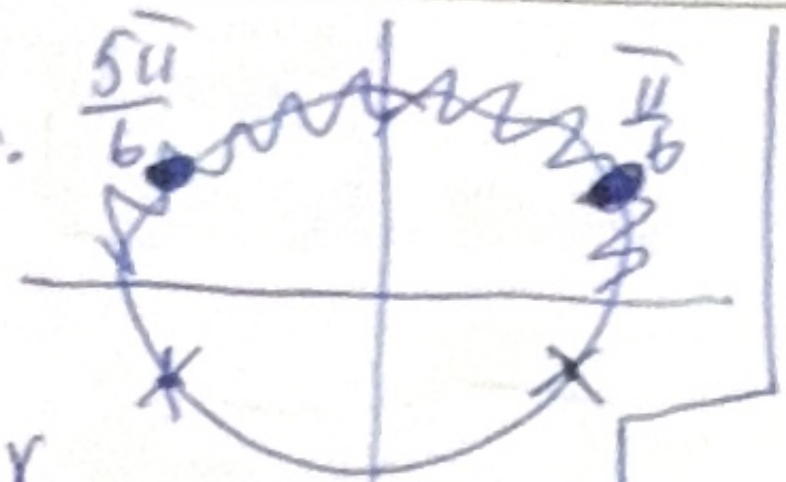
$\operatorname{tg} x = \frac{3}{8}$

$x = \operatorname{arctg} \frac{3}{8}.$

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

25-82-97-67
(1245)

Чистовик: лист 1.



№1.

$\sqrt{6(1-tg^2x)}=4\sin x$

$6(1-tg^2x)=16\sin^2x,\ \sin x\geq 0$

$1-tg^2x=\frac{8\sin^2x}{3}$

$1-\frac{\sin^2x}{\cos^2x}=\frac{8\sin^2x}{3}$

$\frac{\cos^2x-\sin^2x}{\cos^2x}=\frac{8\sin^2x}{3}$

$3(\cos^2x-\sin^2x)=8\sin^2x\cdot\cos^2x$

$3\cos2x=2\sin^2 2x$ $\quad 3\cos2x=2(1-\cos^2 2x)$

$2\cos^2 2x+3\cos2x-2=0$

$\cos2x=\frac{1}{2}$

$2x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$

$x=\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n$

Ответ: $\boxed{x=\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ x=\frac{5\pi}{6}+2\pi n}$

$n=9k\cdot S(n)$

$n⋮9 \Rightarrow S⋮9 \Rightarrow n⋮81.$

№2. Пусть n - искомое число,

A= ~~180~~, ~~270~~, ~~333~~, ~~360~~, 486; ~~450~~, ~~540~~, ~~630~~, ~~720~~, 810, 162; 324; ~~900~~; 648; 972; 405.

S(n) - сумма цифр числа n.

243+486+810=1539

Ответ: 1539.

№3.

Заметим, что координаты точки F не превосходят |4| и они только целые числа. Значит, $-4\leq F\leq 4$, следовательно можно построить 139968 прямоугольных треугольников.

$C_9^2=\frac{9!}{2!\,7!}=\frac{\cancel{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}\cdot8\cdot9}{1\cdot2\cdot\cancel{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}}$

$(C_9^2)^2=36^2=(35+1)^2=1225+1+70=$
$=1296$

$1296\cdot4=4000+800+360+24=$
$=5184.$

$$\begin{array}{r} \times\ 5184 \\ 27 \\ \hline 108 \\ 216 \\ \cancel{27}\ 7 \\ 135 \\ \hline 139968 \end{array}$$

Ответ: 139968

№4

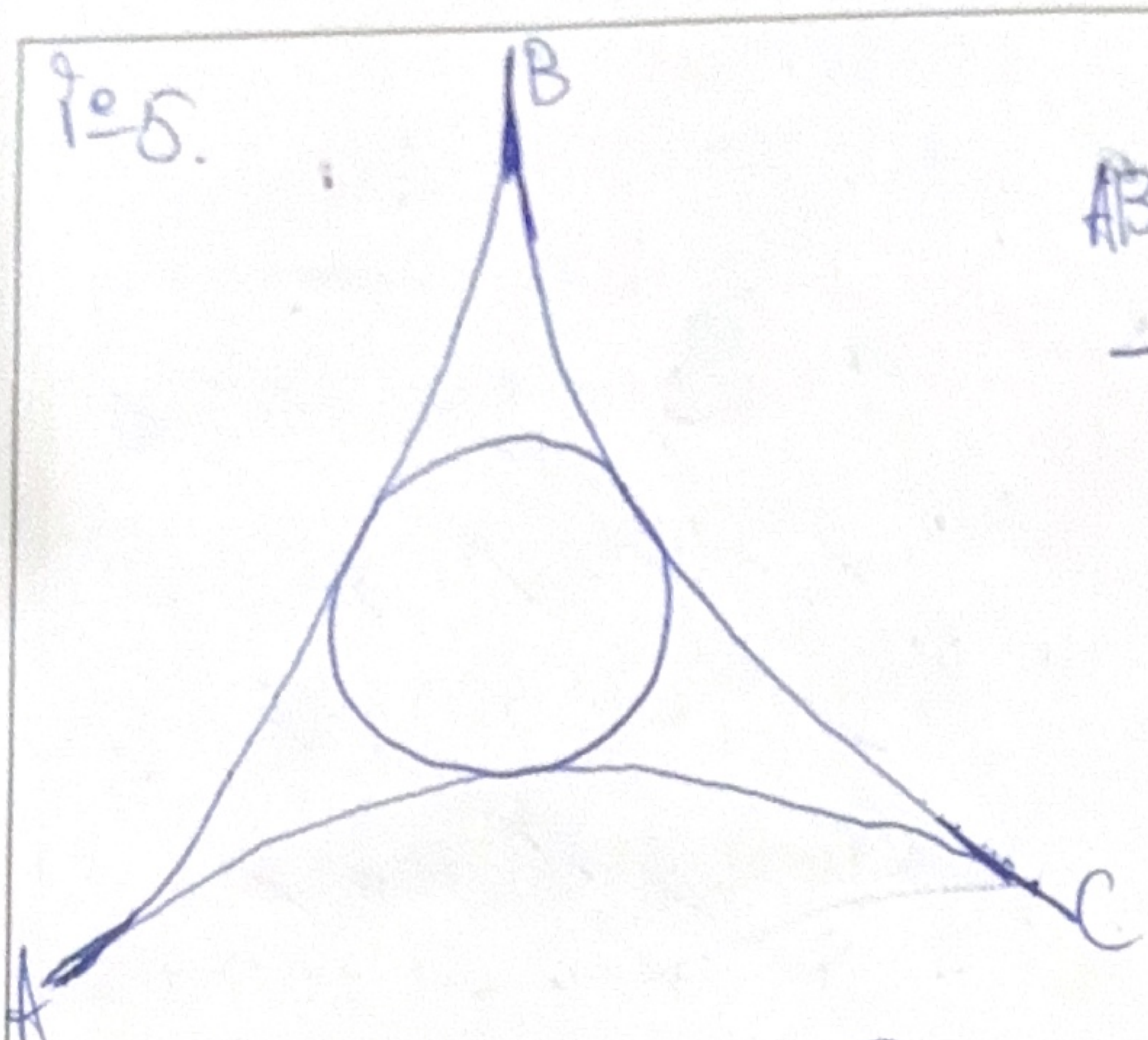
Так как у нас $k\in\{13;15;17\}$, то график $y=\sin k\pi x$ будет разделён на 93 полосы

Ответ: 93

(См. след. стр.)

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

№5.



Дано:
$AB = BC = AC = 1$

Найти:
$r - ?$

~~Решение.~~

№8.

$8x^2 \log_a x - \log_x a - 2x \le 0$

$\log_a x = \frac{1}{\log_x a}$; $-\log_x a = \frac{1}{\log_a x}$

ОДЗ: $x \ne 1$
$a > 0$
$x > 0$ $\quad a \ne 1$

$8a^{2t} t^2 - 2a^t t - 1 \le 0$ при $t > 0$

$8a^{2t} t^2 - 2a^t t - 1 \ge 0$ при $t < 0$

$f(t) = 8a^{2t} t^2 - 2a^t t - 1$ $\quad v = a^t \cdot t$

$fv = 8v^2 - 2v - 1$ $\quad f(v) = 8\left(v - \frac{1}{2}\right)\left(v + \frac{1}{4}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(v) = (2v - 1)(4v + 1)$

$a^t \cdot t \nearrow (0; +\infty)$ $\quad a^t t = \frac{1}{2}$

$+$ $\quad -$ $\quad +$
$-\frac{1}{4}$ $\quad \frac{1}{2}$

$(-\infty; 0)$ min в $-\frac{1}{\ln a} \Rightarrow -\frac{1}{e \ln a}$ $\quad \exists!$ корень $t > 0$

$a^t t = -\frac{1}{4}$ $\quad e \ln a = 4$ $\quad \exists!$ корень

Ответ: $a = e^{\frac{4}{e}}$

№4
(Продолжение)

$\sin 13\pi x = \sin 15\pi x$

$2\cos(14\pi x)\sin(-\pi x) = 0$

$14x = \frac{1}{2} + n$ $\quad x = 0, 1$

$x = \frac{\frac{1}{2} + n}{14}$

$\sin 13\pi x = \sin 17\pi x$

$\sin(2\pi x)\cos(15\pi x) = 0$

$x = 0, \frac{1}{2}, 1$ $\quad x = \frac{\frac{1}{2} + n}{15}$

$\sin 15\pi x = \sin 17\pi x$

$\sin \pi x \cos 16\pi x = 0$

$x = 0, 1$ $\quad x = \frac{\frac{1}{2} + n}{16}$

Если $\sin k\pi x = 1$ или -1

$k\pi x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m$ $\quad k\pi x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi m$

$x = \frac{1 + 4m}{2k}$ $\quad x = \frac{4m - 1}{2k}$

$k = 13 \Rightarrow 13$

$k = 15 \Rightarrow 15$

$k = 17 \Rightarrow 17$

$14 + 15 + 16 = 45$

$y = -1 \Rightarrow 21$

$y = 1 \Rightarrow 23$.

Также учи, что есть 45 внутр. пересечений

суммируя все: 93.

25-82-97-67 (124...)

Чистовик: лист 2.

№6.

Дано:
$h_{свет.} = 6м$
$h_{сек.} = 2м.$

Найти:
$S_{затен.}$ — ?

Решение:

1) $6-2=4м.$

2) $|\vec{AB}| = 12. \Rightarrow (-3;+3)\ (6+7) = (0;12) \Rightarrow \sqrt{12^2+0^2} = 12.$

3) $\frac{3\cdot4}{2} = 6$

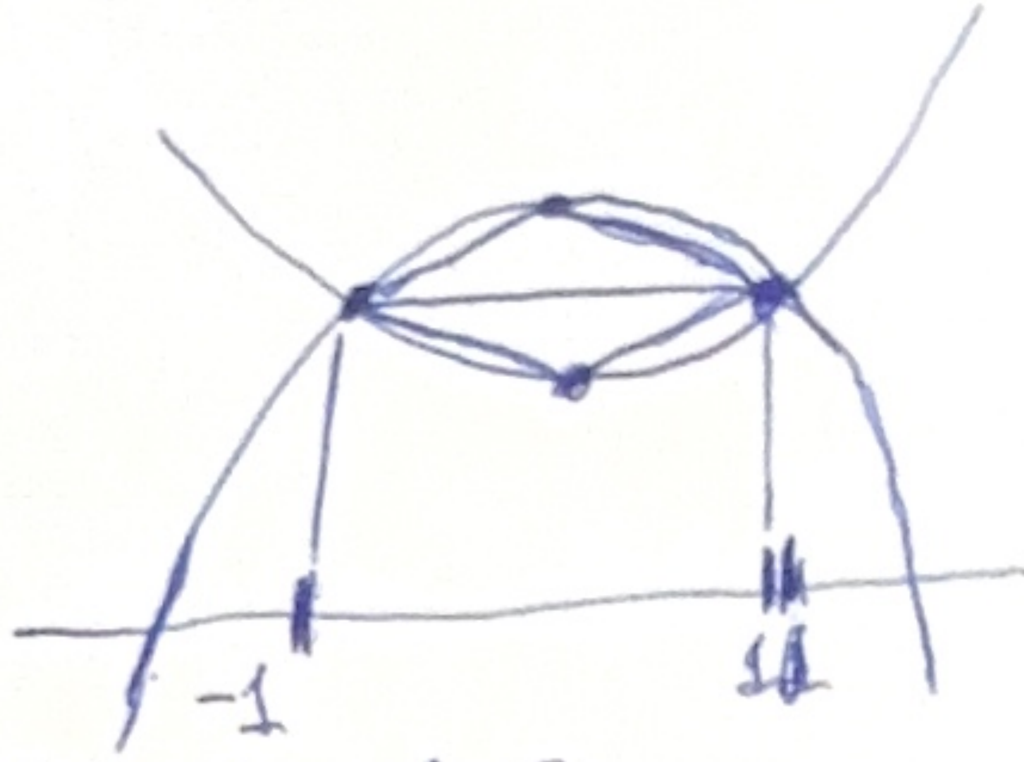
Ответ: 6.

№7.

1) $\frac{210}{10} = 21$ см - высота

2) $\frac{297}{10} = 29{,}7$ см - ширина.

Найти:
S — ?



Решение:
$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 \\ y = 1 - \frac{1}{2}x^2 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{2}x^2 = 1 - \frac{1}{2}x^2$

$x^2 = 1 \quad x = \pm 1$

$S_4 = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2 = 1.$

$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 \\ y = -\frac{1}{2}x^2 + 1 + k \end{cases}$

$\frac{1}{2}x^2 = -\frac{1}{2}x^2 + 1 + k$

$x^2 = k+1$

$x_1 = \sqrt{k+1}$

$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 + 1 \\ y = -\frac{1}{2}x^2 + k \end{cases}$

$\frac{1}{2}x^2 + 1 = -\frac{1}{2}x^2 + k$

$x^2 = k-1$

$x_2 = \sqrt{k-1}$

$x_1 - x_2 = \sqrt{k+1} - \sqrt{k-1} \Rightarrow d =$

$= \frac{(\sqrt{k+1} - \sqrt{k-1})(\sqrt{k+1} + \sqrt{k-1})}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k-1}} =$

$= \frac{(k+1) - (k-1)}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k-1}} = \frac{2}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k-1}}$ — функция убывающая

Значит макс. $S_4 = 1.$

Ответ: 1.

...ать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!