0 375397 610003

37-53-97-61

(124.6)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 11 класс 6

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Ломоносов"
наменование олимпиады

по Математике
профиль олимпиады

Зверева Тимофея Александровича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Выход 13:13–13:17 Пк

Дата
«29» марта 2026 года

Подпись участника
Пзм

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

 100(сто) [illegible]

черновик

37-53-97-61 (134.6)

$4\cos x \geq 0$

$\cos x \geq 0$

$\cos 2x = 2\sin\cos$

$1 + ctg^2 = \frac{1}{\cos^2 x}$

$1 + ctg = \frac{1}{\sin^2 x}$

№ 1

$\sqrt{6(1-ctg^2 x} = 4\cos x$

$\sin x \sqrt{6(1-ctg^2 x} = 4\sin x\cos x$

$6 - 6ctg^2 x = 16\cos x^2$

$\sin x\sqrt{6 - \frac{6\cos}{\sin x}} = 2\cos 2x$ $1 - ctg^2 x =$

$6 - \frac{6\cos^2 x}{\sin^2 x} = 16\cos^2 x$

$\sin^2 x \cdot (6 - \frac{6\cos^2 x}{\sin^2 x}) = 2\cos 2x$ $ctg^2 x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$ctg = \frac{\cos x}{\sin x}$

$6 - \frac{6\cos^2 x}{\sin^2 x} - \frac{16\cos^2 x}{1} = 0$ $6\sin^2 x - 6\cos^2 x = 2\cos 2x$

$6(\sin^2 x - \cos^2 x) = 2\cos 2x$

$6 - \frac{6\cos^2 x}{\sin^2 x} - \frac{16\sin^2 x\cos^2 x}{} = \frac{6 - 8\sin^2 x}{\sin^2 x}$

$6\left(1 - \frac{t}{1-t}\right) = 16t$

$\boxed{\cancel{3(1-2}\ 3(1-2t) = 8t(1-t) \\ 3 - 6t = 8t - 8t^2}$

Дано

$0 \leq x \leq 1;$

$-1 \leq y \leq 1$ $y = \sin k\pi x$

~~Т. параллелограмма сумма квадратов сторон равна сумме диагоналей квадратов $a^2+b^2+c^2+z^2 = d_1^2 + d_2^2$~~

$k \in \{11; 13, 15)$

№ 5

$y = Cx^2$

$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

Т. параллелограмма сумма квадратов сторон равна сумме квадратов диагоналей $a^2 + b^2 + c^2 + z^2 = d_1^2 + d_2^2$

Черновик

№6 $y = 1, \frac{3x^2}{4} + c$ $\quad c = 4 + \frac{3x^2}{4}$

Дано:

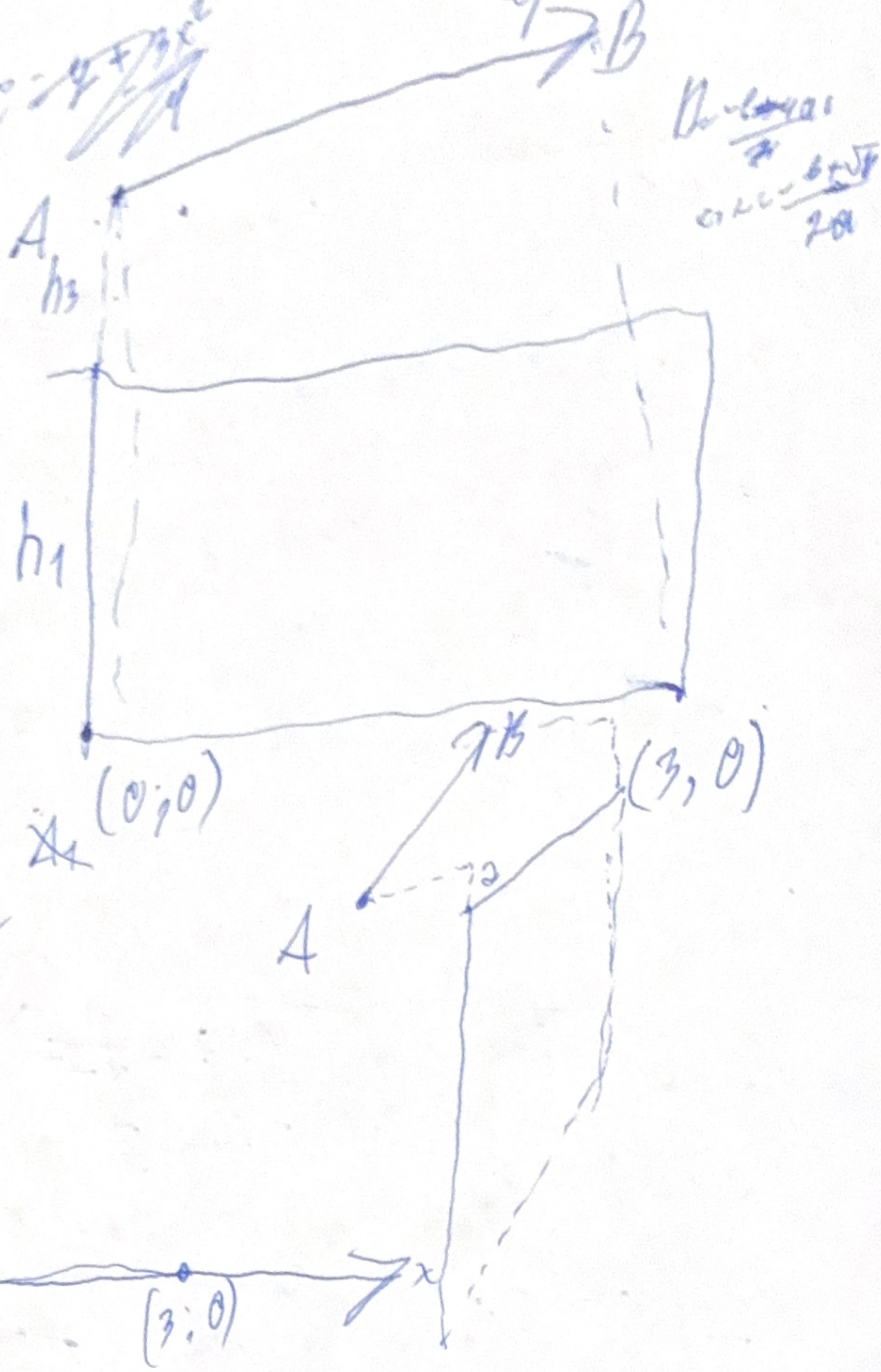
$H_1 = 2$

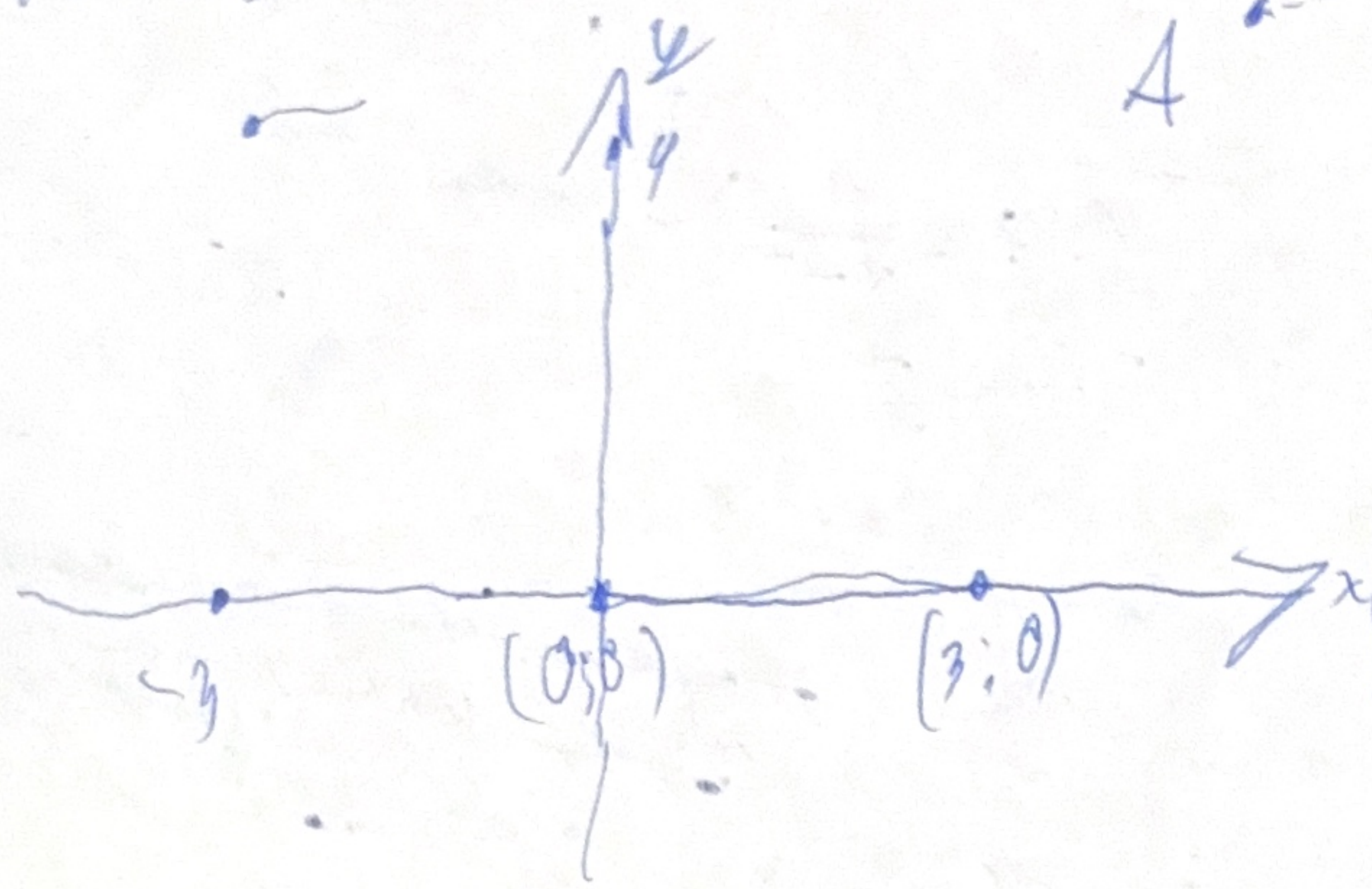
$H_2 = 6$

$\vec{A}(-3;4)$

$B(6;Z)$

$h_1 + h_3 = H_2 = 6$





№2

A+N

$A = x+y+z$ при деление $\frac{A}{x+y+z} = x:9$

$A \in (99;1000)$

$S = \frac{1}{2} AH$ №7

$\sqrt{48-4} = 32 = \sqrt{32}$

$y = \frac{3x^2}{4}$

$C \in Z$

$y = cx^2$

37-53-97-61 (124.6)

Чистовик 1

№ 1

$1+tg^2x=\frac{1}{\cos^2x}$

$\sqrt{6(1-ctg^2x)}=4\cos x$; $\cos x\geq 0$

$1+ctg^2x=\frac{1}{\sin^2x}$

$6(1-\frac{\cos^2x}{1-\cos^2x})=16\cos^2x$, $\cos^2x=t$

$tg_x=\frac{\sin x}{\cos x}$

~~$\sqrt{6(1-ctg^2x)}=4\cos x$ $|:\sin x$~~

$\sin 2x=2\sin\cos x$

$8t^2-14t+3=0$ (см. черновик)

~~$\sin\sqrt{6(1-ctg^2x)}=4\sin x\cos x$~~

$8t=\left[\begin{array}{l}12\\2\end{array}\right.$ $t=\left[\begin{array}{l}\frac{3}{2}\\\frac{1}{4}\end{array}\right.$

$\cos^2x=\frac{1}{4}$ $\cos x=\pm\frac{1}{2}$

$\Rightarrow\cos=\frac{1}{2}$

~~$\sin\sqrt{6-6ctg^2x}=2\sin 2x$~~ $|^2$

~~$6\sin^2-6\cos^2=16\sin^2\cos^2$~~

$\boxed{x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n}$

~~$6\sin^2_x-6\cos^2x=4\sin^2 2x$~~

~~$\frac{16}{6}=2\frac{4}{6}$~~

~~$6(\sin^2x-\cos^2x)=16\sin^2x\cos^2x$~~

~~$6(\sin x-\cos x)(\sin x+\cos x)=16\sin^2x\cos^2x$~~

~~$\frac{(\sin x-\cos x)(\sin x+\cos x)}{\sin^2x\cos^2x}=\frac{16}{6}$~~

~~$\frac{(\sin x-\cos x)(\sin x+\cos x)}{\sin^2x\cdot\cos^2x}=2\frac{4}{6}$~~

~~$\sin^2x+\cos^2x=1$~~

~~$1-ctg^2x=\frac{1}{-\sin^2x}$~~

~~Ответ: $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$~~

...вкладыш запрещается!

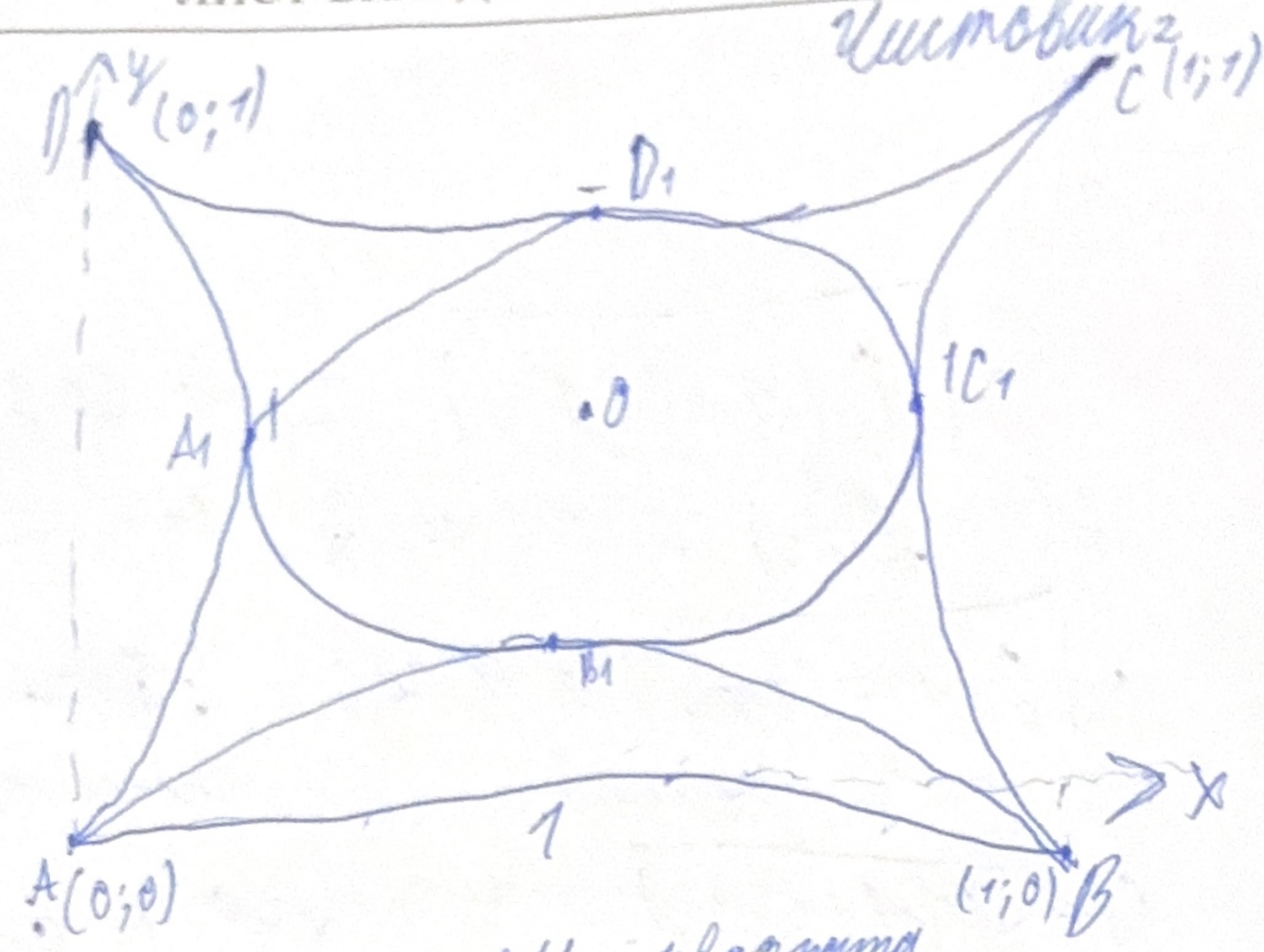
Чистовик 2

№5

Дано:

$y = Cx^2$

$AB = CD = AD = BC = 1$



Решение: AC – диагональ квадрата ABCD ⇒

$= AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} =$

по т. Пифагора, также углы $\angle D_1DA_1 = \angle D_1CC_1 = \angle A_1AB_1 = \angle B_1BC_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ дуги $\overset{\frown}{D_1A} = \overset{\frown}{A_1B_1} = \overset{\frown}{B_1C_1} = \overset{\frown}{C_1D_1} \Rightarrow$ координаты точки O равны $= (\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ и расстояние от AB до O ~~будет~~ равно $\frac{1}{2}$ также же как расстояние от AD, DC и CB

Ответ: 0,25

№ 6

Чистовик 5

Дано:

$H_з = 2.$

$H_ч = 6$

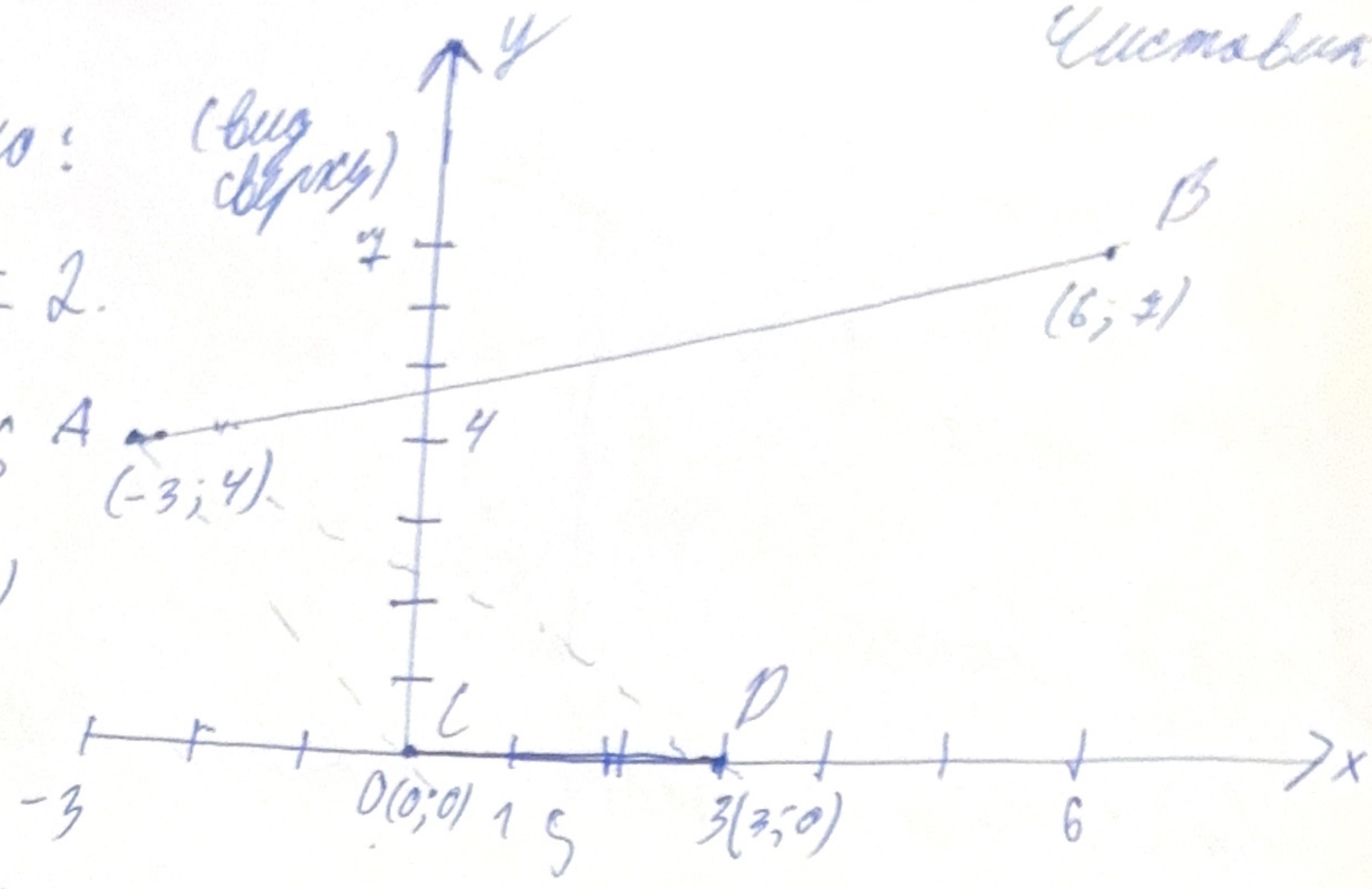
$A(-3;4)$

$B(6;7)$

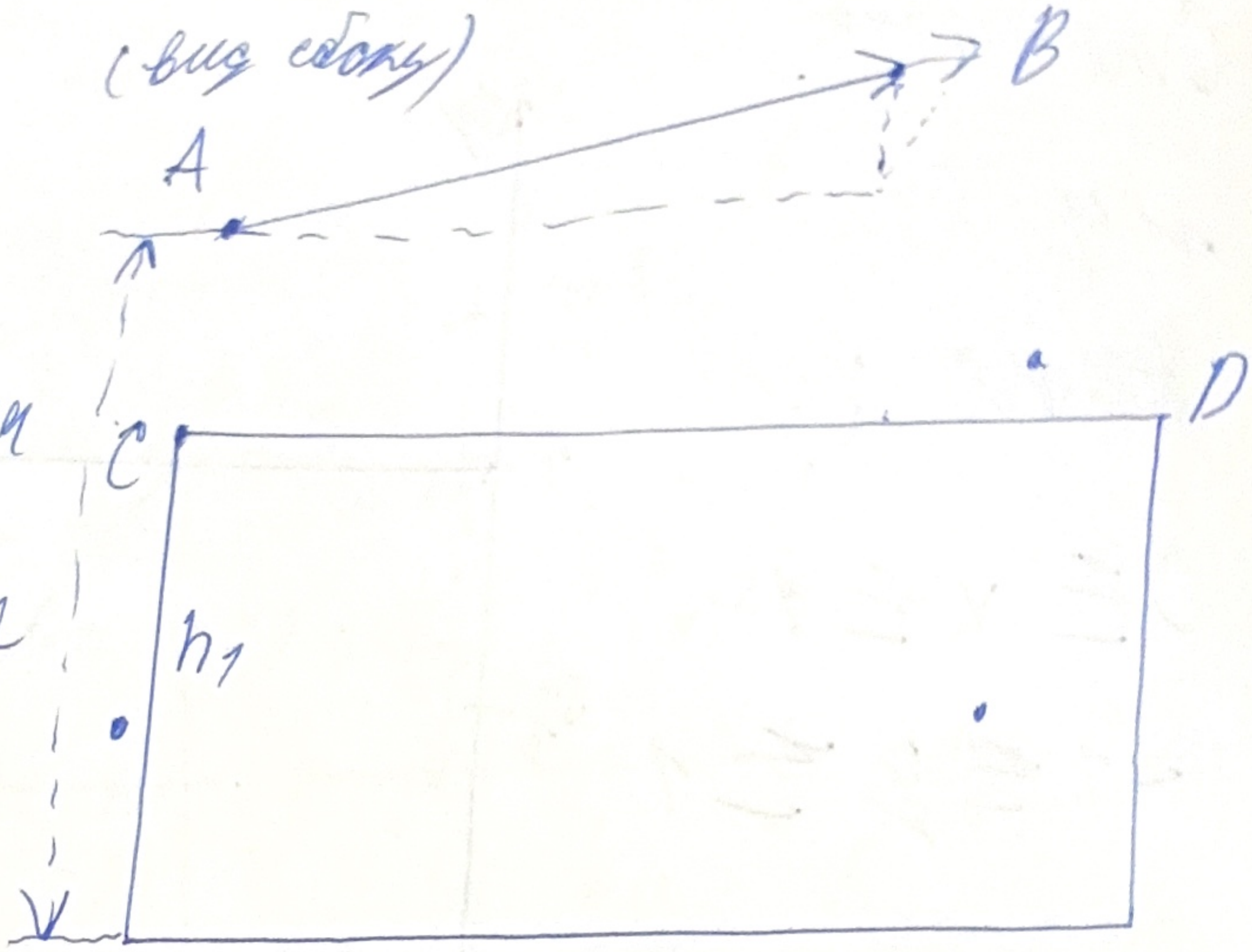
$C(0;0)$

$D(3;0)$

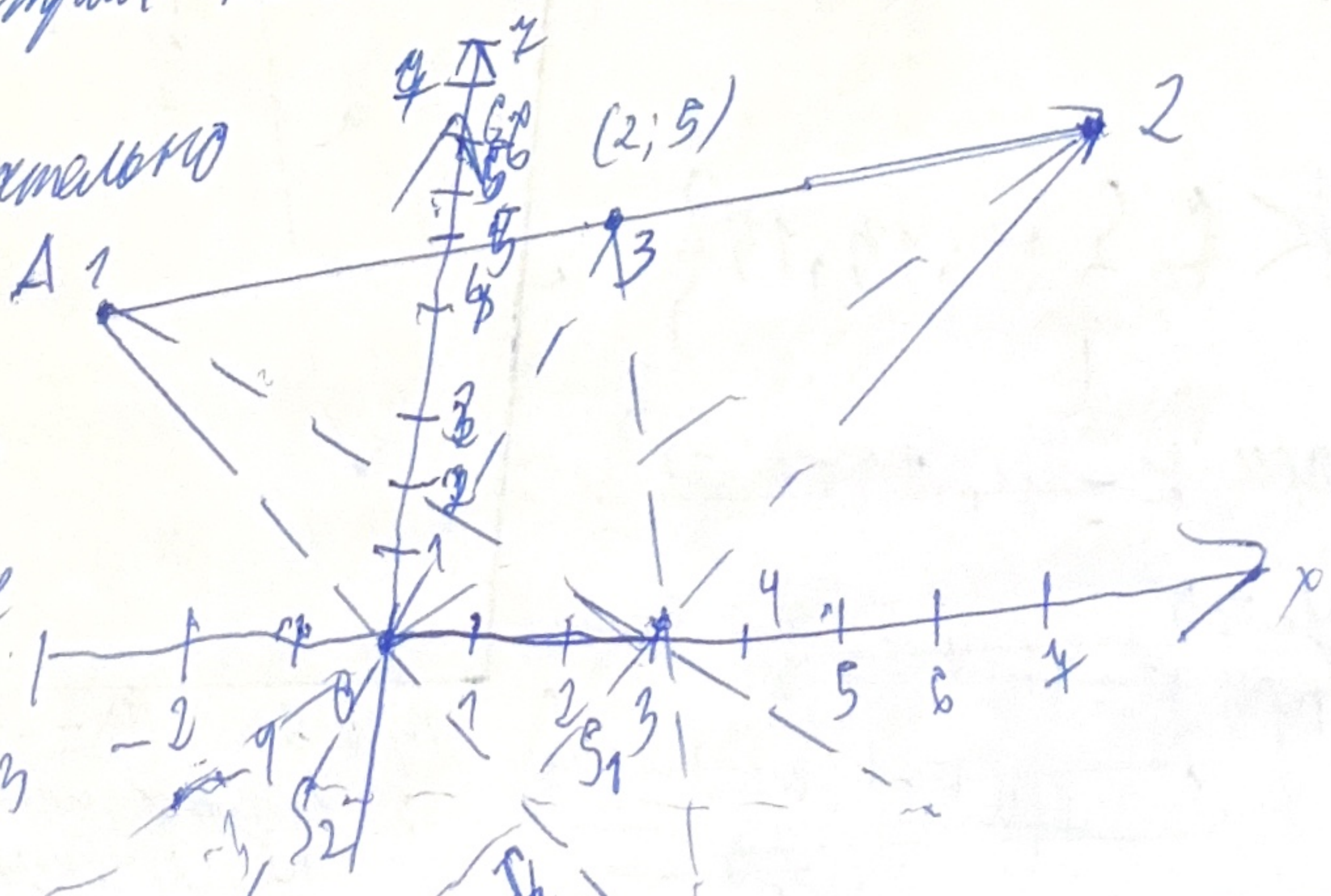
$S - ?$



точка считается затенённой, если хотяб на мгновение оказалась в тени забора



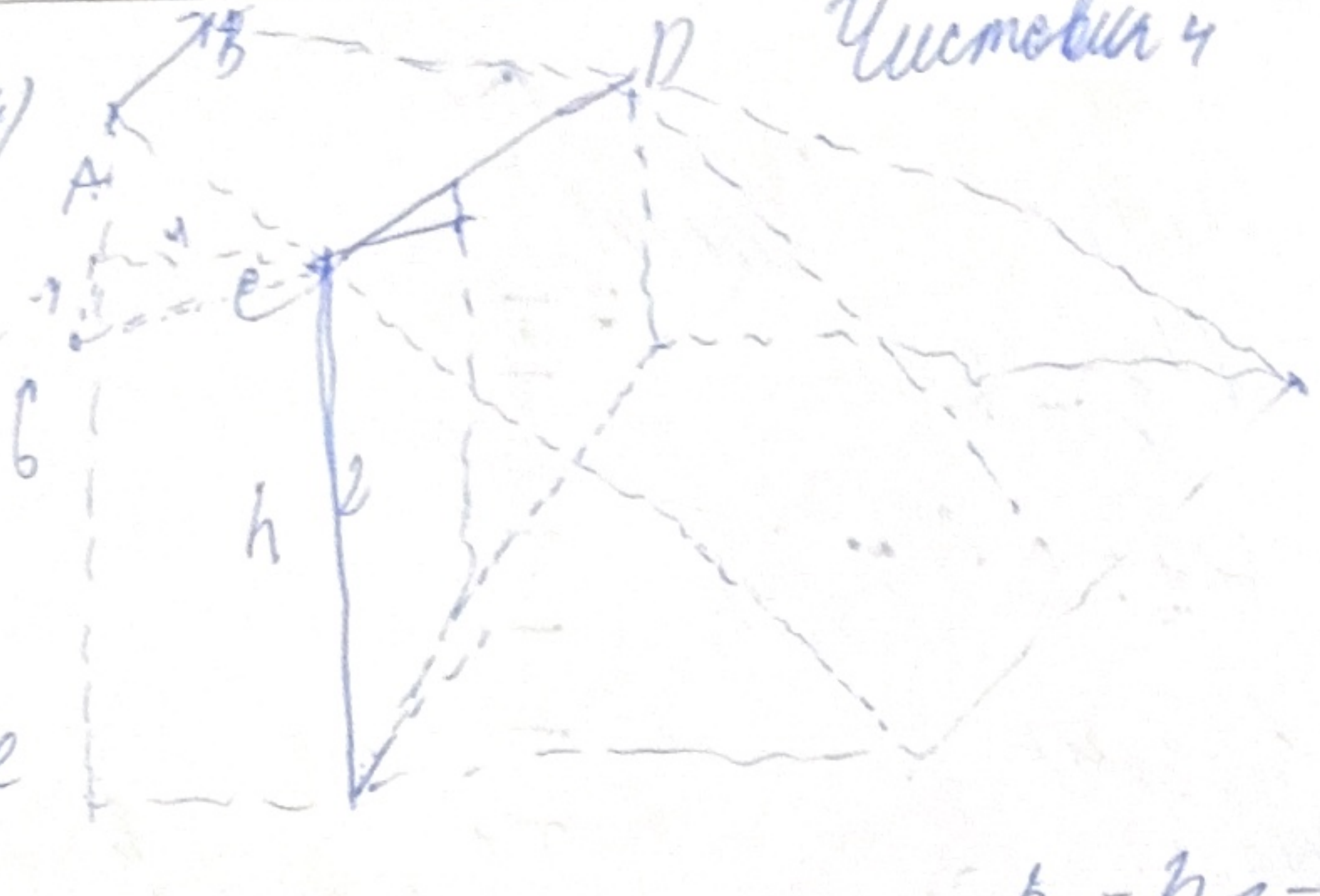
рассмотрим положение 1 => светлячок находится в A следовательно рассмотрим положение 2 в B, а также рассмотрим положение 3



~~Ответ:~~

Чистовик 4

~~№ 4~~ (вид сбоку)



также нужно учесть перепад высот т. к

забор ниже светлячка на 4 метра $h_2 - h_1 = 4_4$

Ответ: 148

№ 4

Дано:

$0 \leq x \leq 1$

$-1 \leq y \leq 1$

$y = \sin k\pi x$

$k \in \{11; 13; 15\}$

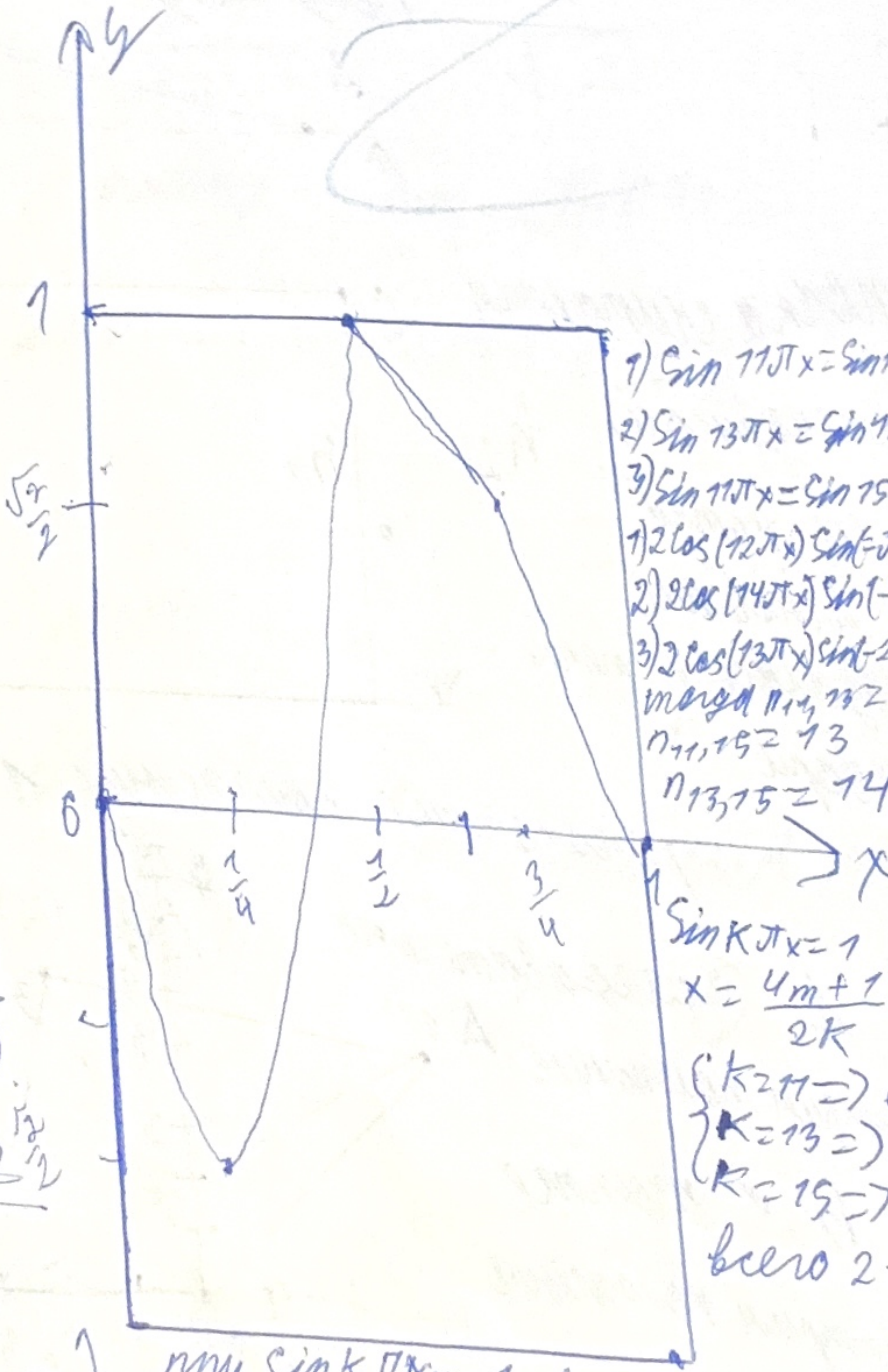
~~при $k = 11$, $ax = 0 \Rightarrow$~~

~~$y = 0$~~

~~при $k = 11$, $ax = \frac{1}{2}$~~

~~$y = 1$ при $k = 1$, $ax = 1$~~

~~$y = 0$~~



1) $\sin 11\pi x = \sin 13\pi x$

2) $\sin 13\pi x = \sin 15\pi x$

3) $\sin 11\pi x = \sin 15\pi x$

1) $2\cos(12\pi x)\sin(-\pi x) = 0$

2) $2\cos(14\pi x)\sin(-\pi x) = 0$

3) $2\cos(13\pi x)\sin(-2\pi x) = 0$

тогда $n_{11,13} = 12$

$n_{11,15} = 13$

$n_{13,15} = 14$

$\sin k\pi x = 1$

$x = \frac{4m+1}{2k}$

$\begin{cases} k = 11 \Rightarrow 6 \\ k = 13 \Rightarrow 7 \\ k = 15 \Rightarrow 8 \end{cases}$

всего 21

при $\sin k\pi x = -1$ всего 17

39 внутренних пересечений

Чистовик 5

~~$k=13$, а $x=0$, $y=0$; $k=13$, $x=\frac{1}{2}$, $y=\sin(\frac{13\pi}{2})=$~~

~~$=1$~~

~~$k=13$, $x=1$, $y=\sin(13\pi\cdot1)=0$; $k=13$, $x=\frac{1}{4}$, $y=\frac{13\pi}{4}$~~

~~$y=-\frac{\sqrt{2}}{2}$~~

~~при $k=15$, $x=0$, $y=\sin 15\cdot\pi\cdot0$;~~

~~$k=11$, $x=\frac{3}{4}$, $y=$~~

~~$k=15$, $x=\frac{1}{4}$, $y=\frac{15\pi}{4}$ $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $=\sin\frac{33\pi}{4}$ $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$~~

Ответ: 381

№ 3 Рассмотрим плоскость $z=0$

Дано:

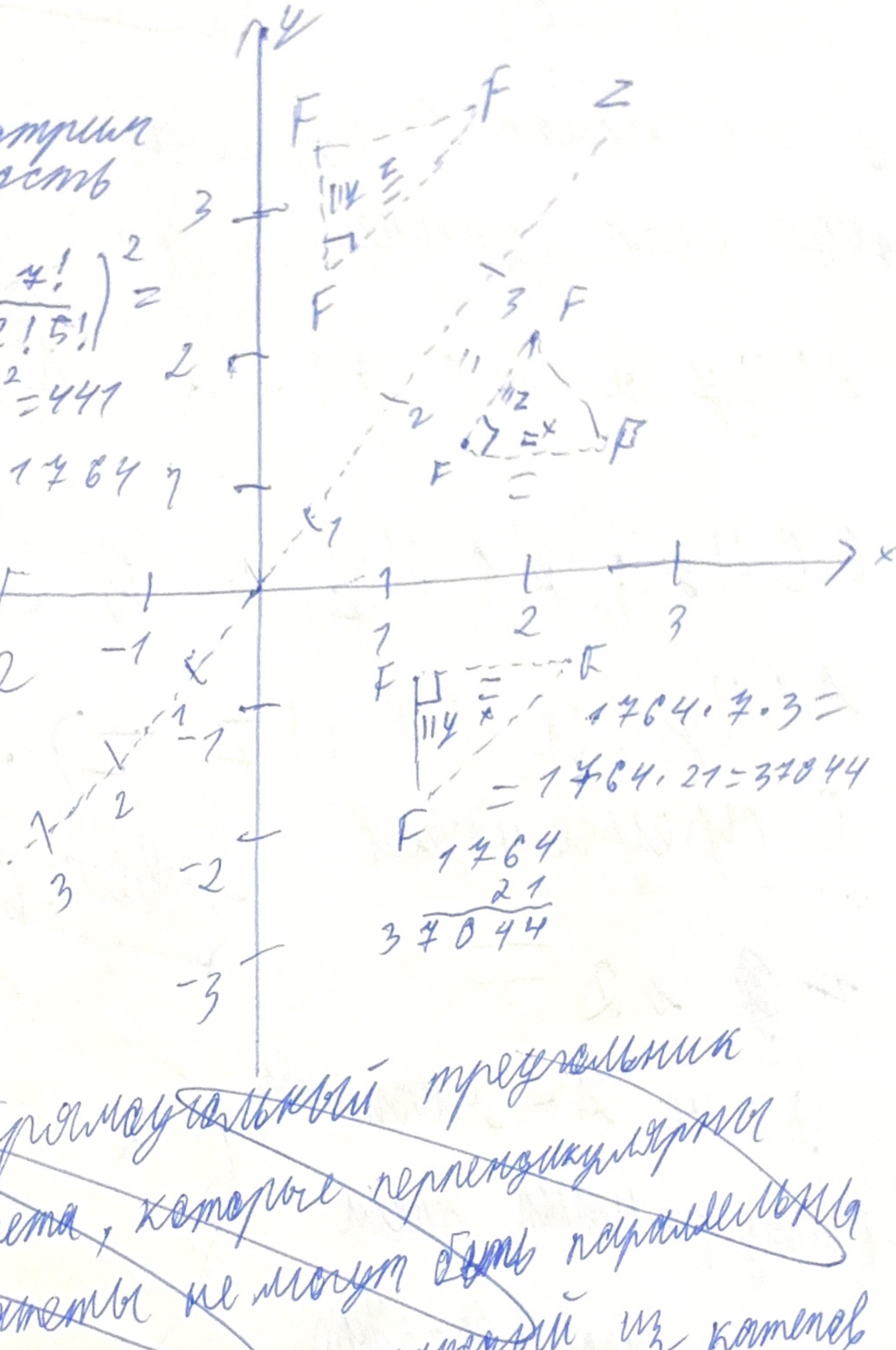
$(C_7^2)^2=\left(\frac{7!}{2!5!}\right)^2=$

F = множество $=21^2=441$

$z=0$: $441\cdot4=1764$ точек в пространстве

$|F|\le 3$

$F\in\mathbb{Z}$



$1764\cdot7\cdot3=$

$=1764\cdot21=37044$

$1764\cdot21=37044$

Ответ: 37044

~~Решение:~~ ~~Прямоугольный треугольник имеет два катета, которые перпендикулярны друг другу $\Rightarrow$ катеты не могут быть параллельны одновременно и каждый из катетов одной оси~~

~~Чистовик~~ 6
Черновик

может быть параллелен трём осям

X; Y; Z; возьмём прямоугольный треугольник

ABC с вершиной прямого угла в точке

C (~~A~~) и катетами

AC и BC =>

катеты могут

быть попарно параллельны одновременно

двум осям пример: AC || x и BC || y,

AC || y и BC || x, AC || z и

BC || y; AC || z и BC || x; AC || x и BC || z;

AC || y и BC || z => может существовать

6 треугольников

Ответ: 6

~~№~~ 2

Дано A - множество

натуральных чисел

в которое входит

N - искомое число

N = 9l · 5

N : 9 => 5 : 9 =>

=> N : 81

Чистовик

~~Черновик~~ 7
Чистовик
~~Множество B — x~~

Числа, которые при ~~сложении~~ делении на сумму своих цифр дают крат-ное 9, множество B = все всех трёхзначные в множество A.

... 162 243 324
405 486 ~~567~~
648 ~~729~~ 810
~~891~~ 972

$B = \cancel{x_1 + y_9} + z$ $\quad \frac{xyz}{x+y+z} = k \vdots 9$

$xyz \in (99; 1000)$ $\quad \frac{999}{27B}$

Ответ: ~~...~~ 1782

№ 4

Дано:

$y = \pm \frac{3x^2}{4} + c$

$y_{max} = 10{,}5$ см

$y_{min} = -10{,}5$ см

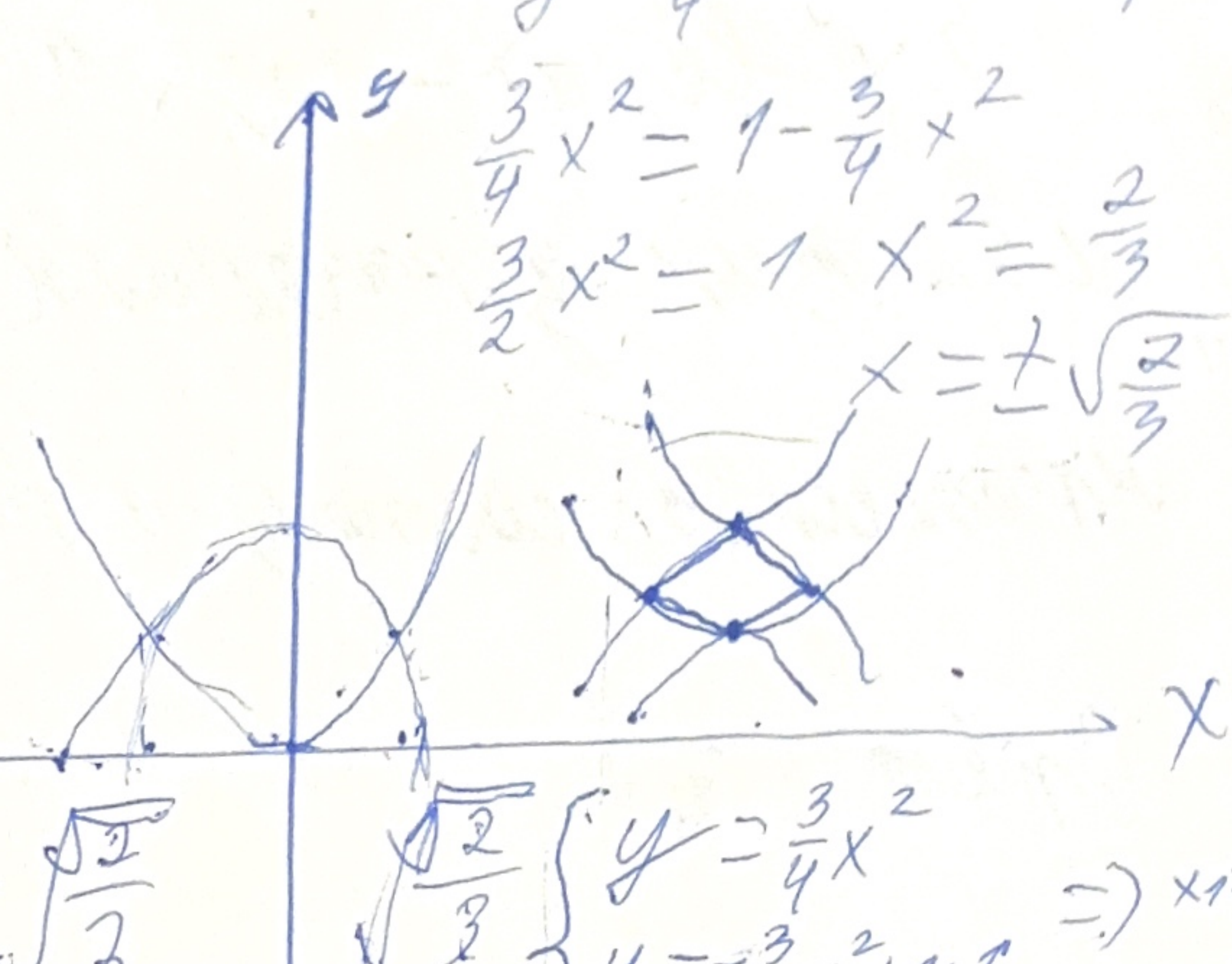
ширина $= 23{,}4$ см

$y = \frac{3}{4}x^2 \quad y = 1 - \frac{3}{4}x^2$

$\frac{3}{4}x^2 = 1 - \frac{3}{4}x^2$

$\frac{3}{2}x^2 = 1 \quad x^2 = \frac{2}{3}$

$x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$



$\begin{cases} y = \frac{3}{4}x^2 \\ y = -\frac{3}{4}x^2 + 1 + c \end{cases} \Rightarrow x_1 = \sqrt{\frac{2(1+c)}{3}}$

$\begin{cases} y = \frac{3}{4}x^2 + 1 \\ y = -\frac{3}{4}x^2 + c \end{cases} \Rightarrow x_2 = \sqrt{\frac{2}{3}(c-1)}$

$S_4 = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot 1 = \sqrt{\frac{2}{3}}$

Первая диагональ $= 1$ вторая диагональ $= x_1 - x_2$

~~Черновик~~ § Чистовик

при пересечении вершин образуются

четырехугольники ; клеточка - часть листа

со всех сторон ограниченная параболами

$\cancel{y=0 \; \frac{3x^2}{4} + c \Rightarrow S = x\cdot y = \Rightarrow \frac{27}{4} + C =}$

$\cancel{x=0}$ $S = x \cdot \frac{3x^2}{4} + C$

$\cancel{= 5 \Rightarrow C = 5 - 6{,}75 = -1{,}25 \Rightarrow x=2}$

$\cancel{y = \frac{12}{4} - 1{,}25 =}$

$x_1 - x_2 = \sqrt{\frac{2(C+1)}{3}} - \sqrt{\frac{2(C-1)}{3}}$

$\cancel{= \frac{9}{4}}$ ~~...~~ домножим на сопряжённое

$$\frac{\frac{2(C+1)}{3} - \frac{2(C-1)}{3}}{\sqrt{\frac{2(C+1)}{3}} + \sqrt{\frac{2(C-1)}{3}}} = \frac{\frac{4}{3}}{\sqrt{\frac{2(C+1)}{3}} + \sqrt{\frac{2(C-1)}{3}}}$$ — ф-ия убывающ по C

значит $S_{max} = \sqrt{\frac{2}{3}}$

№8 $3x^2 \log_a x - \log_x a - 2x = 0$

при каких значениях параметра a

множество состоиз и точки и полуинтерва

Ответ: $(3;2)$