0 512712 980001

51-27-12-98
(124.5)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 11 класс, 5

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов по математике
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Земцова Евгения Алексеевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Выход 13:11–13:17

Дата

«29» марта 2026 года

Подпись участника

51-27-12-98 (124.5)

черновик.

$\sqrt{6(1-tg^2x)} = 4\sin x \Rightarrow \sin x \geq 0 \quad |^2$

ОДЗ: $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$

$6 - 6tg^2x = 16\sin^2x \quad | \cdot \cos x^2 \neq 0$ (при $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$: не ОДЗ)

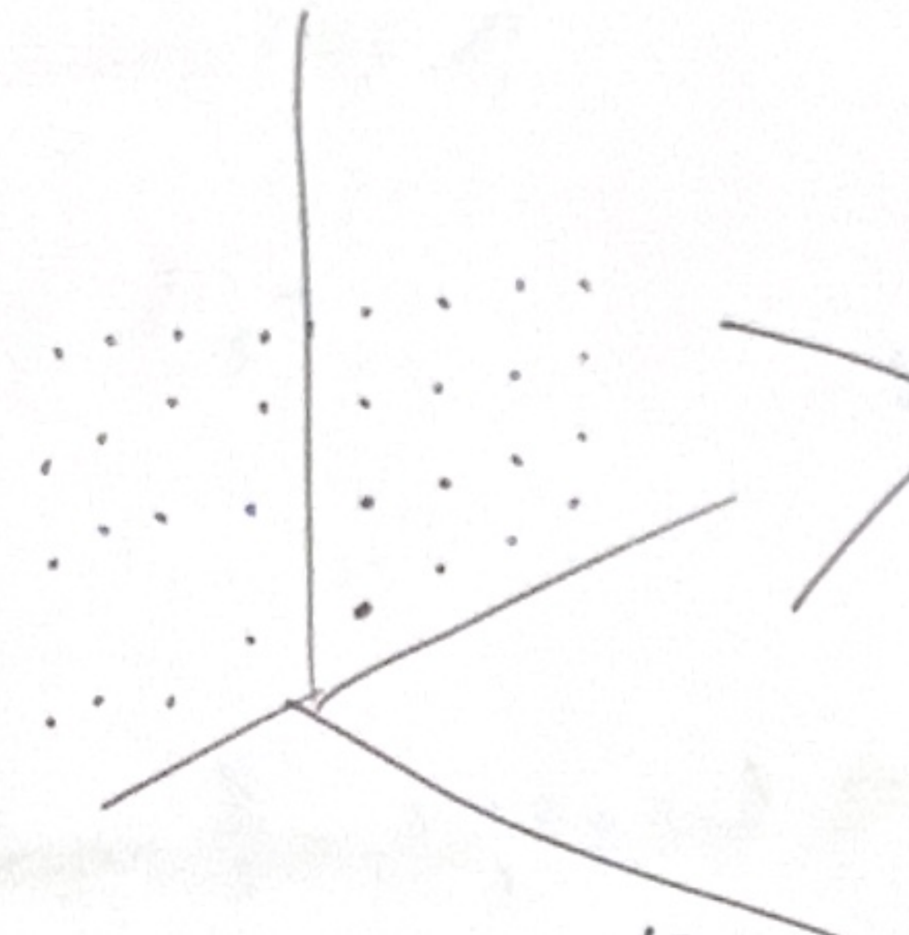
$6\cos^2x - 6\sin^2x = 16 \cdot \sin^2x \cdot 8\cos^2x$

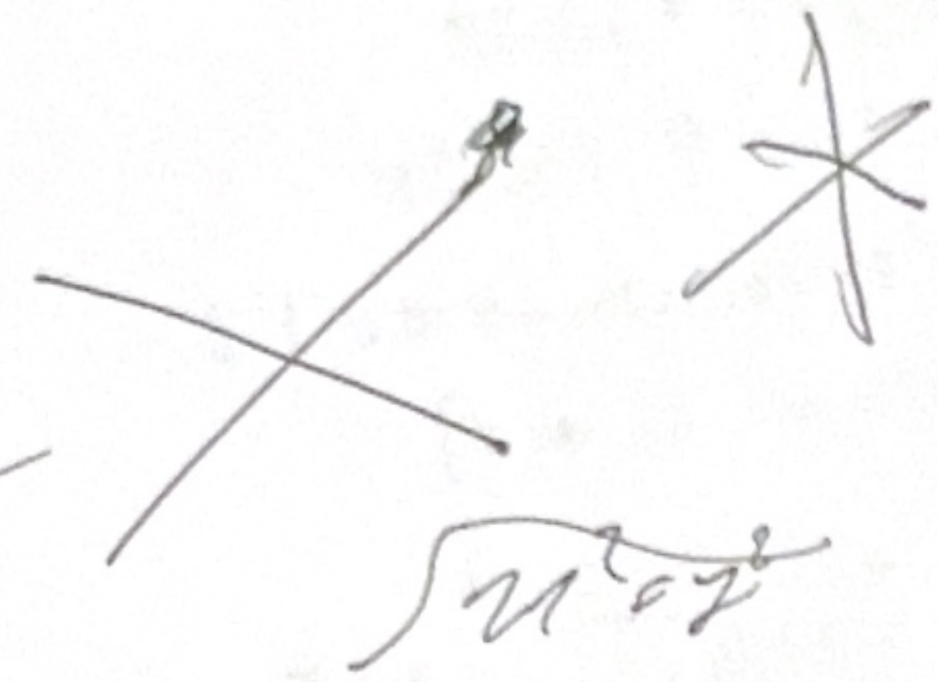
$\frac{9k+r}{9n+r} = 9m.$ $\quad 2\cos^2x - 1 =$ $\cos^2x - (1-\cos^2x) =$

$6\cos 2x = 4 \cdot \sin^2 2x = 4 - 4\cos^2 2x.$

$\frac{9k+1}{9n+1} = 1 + \frac{9(k-n)}{9n+1}$

$9^3 \cdot 2(9^2 - 4) -$





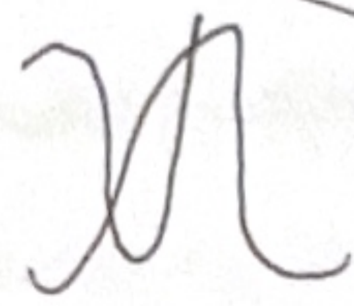
81.

$\sqrt{u^2+7^2}$

$\sqrt{124+49} = \sqrt{170}$

972
+810
1782

ОДЗ:



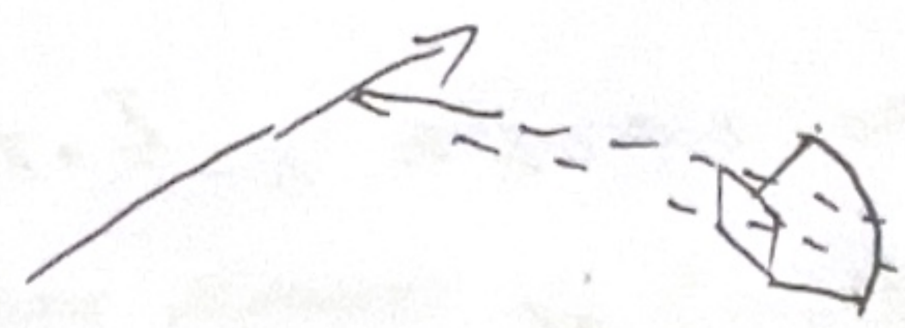
$8x^2\log_a x - \log_x a - 2x \geq 0.$

$x, a > 0$

$x, a \neq 1.$

$8x^2 \cdot \log_a x - \frac{1}{\log_a x} - 2x \geq 0 \quad | \cdot \log_a x > 0:$

$8x^2 \cdot \log_a^2 x - 2x \cdot \log_a x - 1 \geq 0.$



$x \cdot \log_a x = t$

$8t^2 - 2t - 1 \geq 0.$

$t = \frac{2 \pm \sqrt{4+32}}{16} = \frac{2 \pm 6}{16} = \frac{1}{2}; -\frac{1}{4}.$

$120°$

$\left[\begin{array}{l} x \cdot \log_a x \geq \frac{1}{2} \\ x \log_a x \leq -\frac{1}{4} \text{ — нет реш.} \end{array}\right.$

$\sin(11\pi x) = \sin(15\pi x)$

$2\sin(2\pi x) \cdot \cos(13\pi x) = 0$

$\frac{\sqrt{3}}{3}x = f'(x)$

$f \frac{\sqrt{3}}{6} x^2 + C$

$\log_a(x^x) \geq \frac{1}{2}$

$\log_a(x^x) \geq \sqrt{a}$

$x = 0; \frac{1}{2}; 1$

$x = \frac{1}{26}; \frac{3}{26}; \frac{5}{26}; \frac{7}{26}; \frac{9}{26}; \frac{11}{26}; \frac{13}{26}; \frac{15}{26}; \frac{17}{26}; \frac{19}{26}; \frac{21}{26}; \frac{23}{26}; \frac{25}{26}$

$\sin(15\pi x) = \sin(17\pi x)$

$2\sin(\pi x) \cdot \cos(16\pi x) \Rightarrow x = 0; 1$

$\sin(11\pi x) = \sin(17\pi x)$

$\frac{m}{n} = k \,\vdots\, 9 \Rightarrow$

$2\sin(3\pi x) \cdot \cos(14\pi x) \Rightarrow x = 0; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 1$

$\Rightarrow m = nf$ или $m = 3nf$; $f \,\vdots\, 3.$

81

162; 243; 324; 405; 486; 567;

чистовик:

Лист 1, Задача 1:

$\sqrt{6(1-tg^2x)} = 4\sin x \quad |^2$

ОДЗ:

$\begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + \pi f;\ f \in \mathbb{Z}. \\ 1 - tg^2x \geq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} \sin x \geq 0 \\ 6 - 6tg^2x = 16\sin^2x \quad | \cdot \cos^2x \neq 0 \text{ (в силу ОДЗ)} \end{cases}$

$\begin{cases} \sin x \geq 0 \text{, применим условие после решения 2-го ур-я.} \\ 6\cos^2x - 6\sin^2x = 16 \cdot \sin^2x \cdot \cos^2x \end{cases}$

$6 \cdot \cos 2x = 4 \cdot \sin^2 2x$

$6\cos 2x = 4 - 4\cos^2 2x$

$4\cos^2 2x + 6\cos 2x - 4 = 0. \ |:2$

$\cos 2x = t \in [-1; 1]$

$2t^2 + 3t - 2 = 0$

$t = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 \pm 5}{4} \Rightarrow t_1 = -2;\ t_2 = \frac{1}{2}$

t_1 не подх в силу ограничения на „t".

$\cos 2x = \frac{1}{2}$

$2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k;\ k \in \mathbb{Z}$

$x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k$

Т.к. $\sin x \geq 0$, то подходят $x = \frac{\pi}{6} + \pi n$ и $x = \frac{5\pi}{6} + \pi n;\ n \in \mathbb{Z}$.

Оба корня удовл. ОДЗ. и явл. реш. исходного ур-я.

Ответ: $x = \frac{\pi}{6} + \pi n;\ x = \frac{5\pi}{6} + \pi n;\ n \in \mathbb{Z}$.

Задача 3: Заметим, что если каждый из катетов параллелен одной из координатных осей, то ~~прямоугольник~~ тре всегда прямоугольный (оси взаимно перпендикулярны). Тогда, посчитаем ем треугольники таким образом: 1) выберем точку „A" в пространстве, которая будет являться вершиной треугольника при угле в 90°; 2) выберем вторую точку „B", которая будет принадлежать ~~плоскостям~~ отрезкам (в пределах F), ~~образуемым~~ ~~А~~ построенным параллельно ~~двум осям~~ одной из осей (пусть ось Ψ), через A. 3) Третью точку „C" на отрезках, образованных в пределах F параллельно одной из осей (не Ψ), ~~[illegible]~~. Поделим ~~[illegible] количество~~ произведение величин в 1), 2), 3) на 2 т.к. можно было посчитать точки B и C в другом порядке.

~~4) Посчитаем (выберем прост.. Тогда выбираем A, B, однако C~~

чистовик:

лист 2.

· посчитаем вар-и для т. A:

Точка в F: 9^3

· посчитаем вар-и для т. B:

3 отрезка, в каждом по 8 точек (без A)

$3 \cdot 8 = 24$.

· посчитаем вар-ы для т. C:

2 отрезка, в каждом по 8 точек (без A)

$2 \cdot 8 = 16$.

Итого: $\frac{9^3 \cdot 24 \cdot 16}{2} = 9^3 \cdot 12 \cdot 16 = 2^6 \cdot 3^7$

Ответ: $2^6 \cdot 3^7$.

Задача 2: ~~Пусть~~ Предположим, что в A есть число $\not\vdots\, 9$.

Представим его и его сумму чисел как $9m+r$ и $9n+r$ соответственно. $m, n \geq 0$; $m, n \in \mathbb{Z}$; $r \in \{1, 2, 3, \dots, 8\}$. (по признаку равноостаточности при дел. на 9: сумма цифр числа имеет тот же остаток). Тогда:

$$\frac{9m+r}{9n+r} = 9k; \quad k \in \mathbb{N}.$$

$$\Downarrow$$

$9m+r = (9n+r) \cdot 9k$. Правая часть делится на 9, левая – нет. Противоречие.

Тогда, все числа в A $\vdots\, 9$.

Заметим, что сумма всех трёхзначных чисел, кроме „999" имеет степень вхождения „3" не более чем 2. ⇒ Все ~~подходящие~~ трёхзначные числа, делящиеся на $9^2 = 81$ подойдут (рассмотрим 999 отдельно).

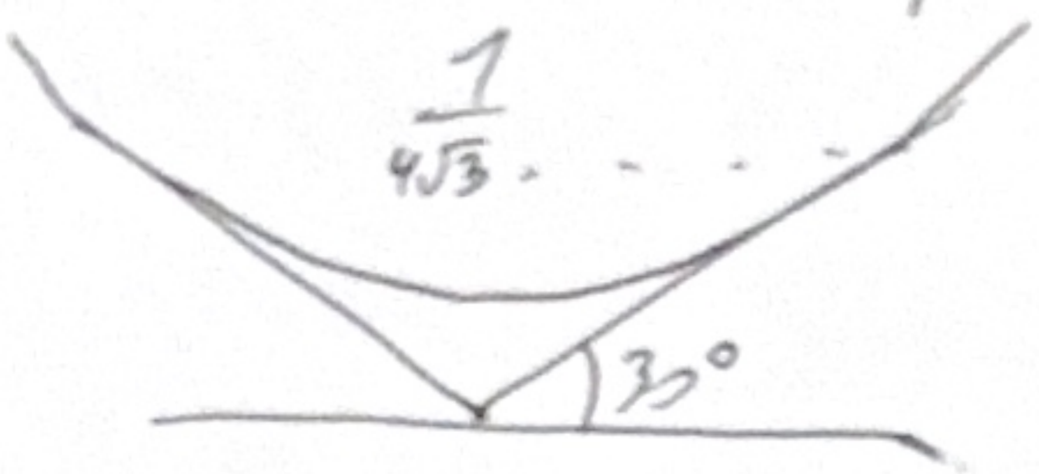
Подходят числа: 162; 243; 324; 405; 486; 567; 648; 729; 810; 891; 972.

999 $\vdots$ 27 но не делится на 81.
Сумма цифр: $9+9+9 \,\vdots\, 27$ | ⇒ их частное не делится на 9.

Сумма второго, шестого и последнего чисел равна:

$243 + 567 + 972 = 972 + 810 = 1782$

Ответ: 162; 243; 324; 405; 486; 567; 648; 729; 810; 891; 972; 1782 черновик:



$f(x) = Cx^2$

$f'(x) = 2Cx$
$k = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\Rightarrow 2Cx = \frac{1}{\sqrt{3}}$; $x = \frac{1}{2C\sqrt{3}}$

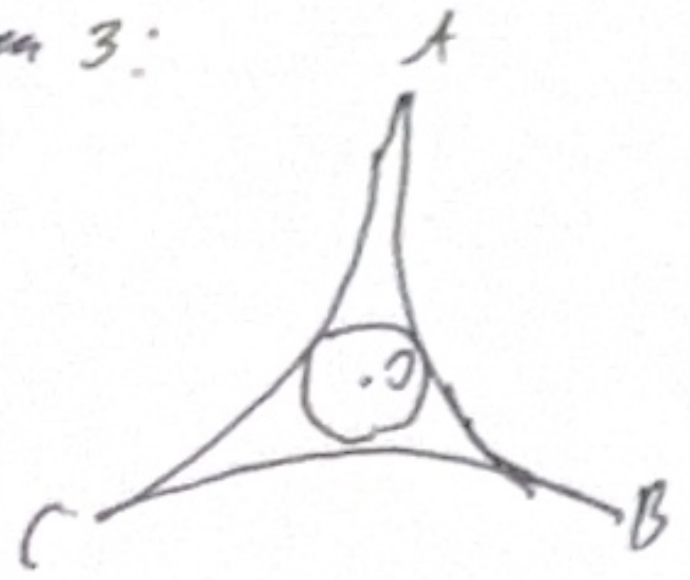
$2x = \frac{1}{2C\sqrt{3}}$ $= 1 \Rightarrow 1 = \frac{1}{4\sqrt{3}\cdot C}$; $C = \frac{1}{4\sqrt{3}}$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot x$

$f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4\sqrt{3}}$

Чистовик.

Лист 3:

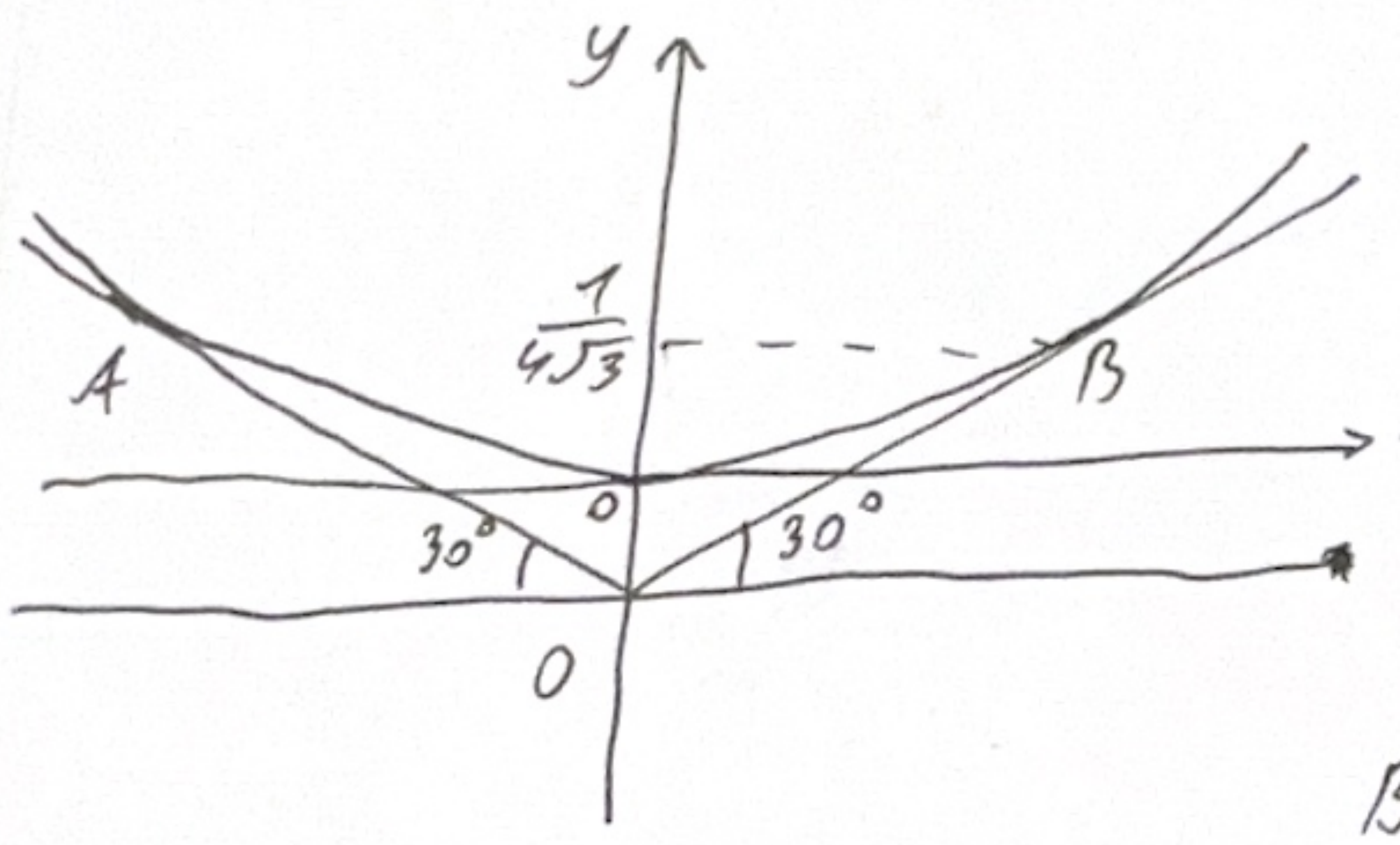


В силу симметрии картинки и параболы получаем, что ближайшая точка к центру окр. - вершина параболы.
Введём точки: A, B, C, O.

$\triangle AOB$ - р/б; $\angle AOC = \angle AOB = \angle BOC$, их сумма равна $360°$. =>
=> каждый угол равен $120°$.

Т.к. „треугольник" с нулевыми углами, то в т. A, B, C: AO; BO; CO — касательные.

Рассмотрим на коорд. плоскости $\triangle ABO$ и параболу. Вершина параболы в $(0;0)$; взаимное расположение AO и BO как на „треугольнике".



По условию: расстояние AB равно 1 => $2x = 1$; $x = \frac{1}{2}$.
$\pm\frac{1}{2}$ - абсцисса A и B.
т.к. угол между осью „x" и OB равен $30°$, то касательная в точке B имеет коэф. $tg 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$, произв. в этой точке равна $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

$f(x) = cx^2$;

$f'(x) = 2cx$

$f'(\frac{1}{2}) = c = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4\sqrt{3}}$

$OB^2 = \left(\frac{1}{4\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{48} + \frac{1}{4} = \frac{13}{48} \Rightarrow OB = \sqrt{\frac{13}{48}}$

угол между осью x и OB равен $30°$ => высота из т B на прямую, парал. оси x через т. O равна $\frac{OB}{2} = \sqrt{\frac{13}{4 \cdot 48}}$. Расстояние от $(0;0)$ до т. O равно $\sqrt{\frac{13}{4 \cdot 48}} - \frac{1}{4\sqrt{3}}$ и равен радиусу окр. впис. в треуг.

Ответ: $\sqrt{\frac{13}{4 \cdot 48}} - \frac{1}{4\sqrt{3}}$.