0 585078 310003

58-50-78-31
(124,2)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 11 класс №7

Место проведения г. Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „ЛОМОНОСОВ"
наменование олимпиады

по МАТЕМАТИКЕ
профиль олимпиады

Зенина Алексея Николаевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«29» 03. 2026 года

Подпись участника

75 (семьдесят пять) Журавлёв

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

58-50-78-31 (124.2)

Черновик

$1-ctg^2x=\frac{1}{\sin^2x}$ $\quad 1-\frac{\cos^2x}{\sin^2x}=\frac{\sin^2x-\cos^2x}{\sin^2x}=$

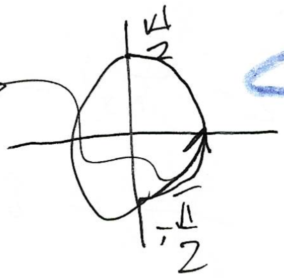
$=\frac{2\sin^2x-1}{\sin^2x}=2-\frac{1}{\sin^2x}$

$\frac{\cos x}{\sin x}$

Одз

$3(1-ctg^2x)=8\cos^2x$

$3-3ctg^2x$



$1-ctg^2x\geq0$

$ctg^2x\leq1$

$3\left(2-\frac{1}{\sin^2x}\right)=8\cos^2x$

$6-\frac{3}{\sin^2x}=\cancel{8\cos^2x}\;8-8\sin^2x$

$2-8\sin^2x$

$-\frac{3}{\sin^2x}=\cancel{2\cos^2x-6\sin^2x}$

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

Чистовик.

1

№1

$$\sqrt{3(1-ctg^2x)} = 2\sqrt{2}\cos x$$

Возведем в квадрат, $2\sqrt{2}\cos x \geq 0 \Leftrightarrow \cos x \geq 0 \Leftrightarrow$

~~$x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}$~~ $x \in [-\frac{\pi}{2}+2\pi k; +\frac{\pi}{2}+2\pi k; k\in\mathbb{Z}]$

$$3(1-ctg^2x) = 8\cos^2 x$$

$$* \quad 3\left(2-\frac{1}{\sin^2 x}\right) = 8\cos^2 x$$

$$6-\frac{3}{\sin^2 x} = 8-8\sin^2 x$$

$$\frac{3}{\sin^2 x} = -2+8\sin^2 x; \ \sin^2 x = t$$

$$\frac{3}{t} = -2+8t \quad \Big| \cdot t \quad t\neq 0 \text{ т.к иначе } \sin^2 x = 0 \text{ а значит } ctg x \text{ не сущ.}$$

$$3 = -2t+8t^2$$

$$8t^2-2t-3=0$$

$$t^2-\frac{1}{4}t-\frac{3}{8}=0$$

$$t^2-\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right)t-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}=0$$

$$\left(t-\frac{3}{4}\right)\left(t+\frac{1}{2}\right)=0$$

$t=\frac{3}{4}$ или $t=-\frac{1}{2} \Rightarrow \sin^2 x=\frac{3}{4}$ или $\sin^2 x = -\frac{1}{2}$

↑ невозможно

$$\sin^2 x = \frac{3}{4}$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{4}$$

$\cos x = \frac{1}{2}$ или $\cos x = -\frac{1}{2}$ ← не подходит под ограни.

$$\cos x = \frac{1}{2}$$

$$x = \pm\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$$

Ответ: $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$.

$$* \quad 1-ctg^2x = 1-\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{-1+2\sin^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}+2$$

58-50-78-31
(124.2)

№2 Чистовик

2

А $\quad x \quad x = \overline{abc}$

$$\frac{x}{(a+b+c)} = n \vdots 9$$

$$x = (a+b+c) \cdot n$$

$n \vdots 9 \Rightarrow x \vdots 9$, а значит $(a+b+c) \vdots 9$ по признаку делимости на 9 $\Rightarrow x \vdots 81$

$\frac{162}{9} = 18$

$\frac{243}{9} = 27$ – второе

$\frac{324}{9} = 36$

$\frac{405}{9} = 45$

$\frac{486}{9} = 54$ – пятое

$\frac{567}{9} = 63$

$\frac{648}{9} = 72$

$\frac{729}{9} = 81$

$\frac{810}{9} = 90$

$\frac{891}{9} = 99$

$\frac{972}{9} = 108$

Следующие числа не 3-х знач.

$\Rightarrow$ 2-ое число 243; 5-ое число ~~405~~ 486; предпоследнее 891

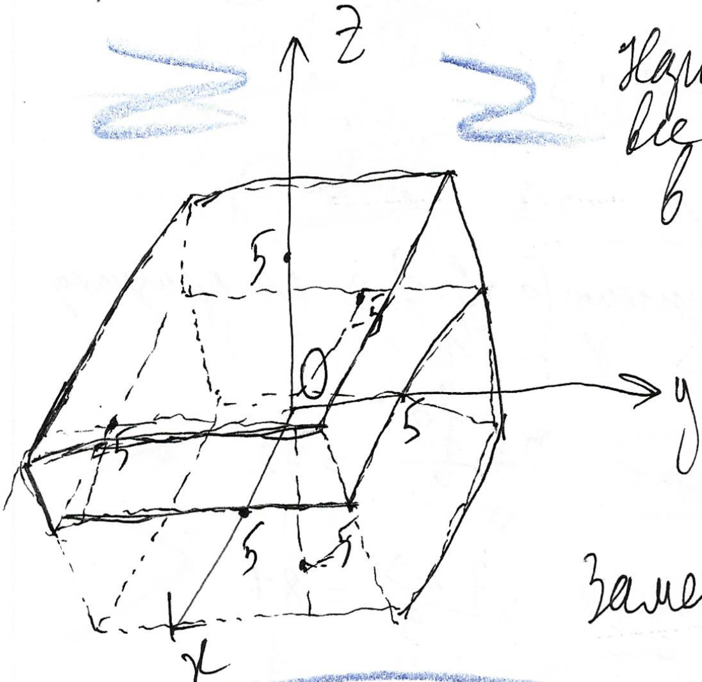
$$\begin{array}{r} 243 \\ +405 \\ \hline 648 \\ +891 \\ \hline 1539 \end{array}$$

~~Ответ: 1539~~

$$\begin{array}{r} 243 \\ +486 \\ \hline 729 \\ +891 \\ \hline 1620 \end{array}$$

Ответ: 1620.

№3 Чистовик (3)



Нарисуем ~~всю фигуру~~ все ограничения ~~на~~ в пространстве. Получим что все множество F лежит в кубике ~~10x~~ ~~10~~ 10×10×10 с центром в начале координат.

Заметим что 2 катета не могут быть параллельны ~~одному лучу~~ одной оси иначе через точку пересечения этих катетов проведены ~~прямая~~ 2 прямые параллельные данной (~~лучу~~ оси), что невозможно.

~~содержащей луч~~

В таком случае в каждом тр-ке 2 катета параллельны двум разным ~~лучам~~ осям, а значит ⊛ можно рассмотреть 2 разл. оси, ~~а итоговое~~ и потом умножить получившееся число способов на 3 ~~к~~ т.к если рассматривать xy, то xz и yz ~~аналогично~~ рассматриваются аналогично.

~~Стоить за~~ ~~Стоит заметить~~

~~Итим~~

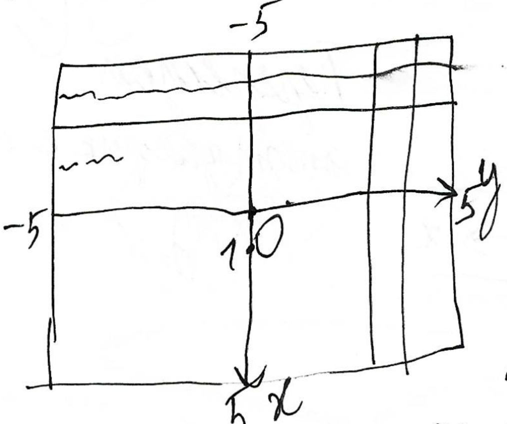
⊛ параллельны или пл-ти xy ~~или~~ или xz или yz, а значит

т.е будем рассматривать ~~10~~ 10 плоскостей параллельных xy ~~или совп с ней~~, а также саму пл-ть xy, очевидно ~~что если мы~~ что число способов выбрать тр-к на плоскости xy равен кол-ву способов выбрать тр-к на любой из 10 оставшихся плоскостях, а значит рассмотрим в пл-ти только плоскость xy.

58-50-78-31
(124.2)

Черновик

(4)



Посчитаем на такой фигуре кол-во способов выбрать прямоугольный тр-к с целыми координатами так чтобы катеты были параллельны или совп с xy осями x и y, а тр-к был внутри квадрата нарисованного на рисунке выше, кол-во способов K

~~Заметим что кол-во~~ Заметим что $K = 4 \cdot \Pi$, где Π — кол-во способов выбрать прямоуг. с целочисленными коорд. и сторонами параллельными xy т.к если мы выбираем прямоугольник, то в нем находится 4 тр-ка, разделенных ~~одно~~ одной из диагоналей. Это ~~тр-ки~~ a, b, c, d

~~Кол-во способов в~~ $\Pi = C_{2}^{11} C_{11}^{2} \cdot C_{11}^{2}$ — это выбрать 2 прямые $\parallel y$ и 2 прямые $\parallel x$

$$K = 4 \cdot \Pi = 4 \cdot C_{11}^2 \cdot C_{11}^2 = 4 \cdot \frac{11! \cdot 11!}{9! \cdot 9! \cdot 2! \cdot 2!} =$$

$$= 10 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 11 = 110^2 =$$

$$= 12100$$

$110^2 = 110 \times 110$, 110, 110

Значит кол-во способов выбрать 3-ка на плоскости параллельных или совп с xy это $12100 \cdot 11$, а значит всего способов $3 \cdot 11 \cdot 12100 = 36300 \cdot 11$

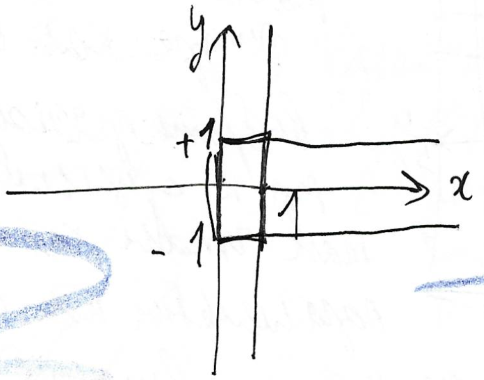
$$\begin{array}{r} 36300 \\ \times\ 11 \\ \hline 363 \\ +\,363 \\ \hline 399300 \end{array}$$

Ответ: 399300

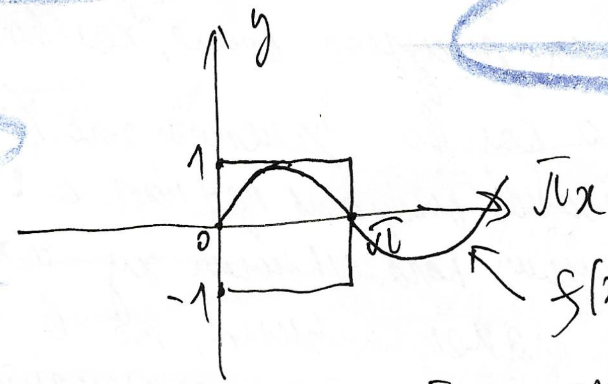
Чистовик.

5

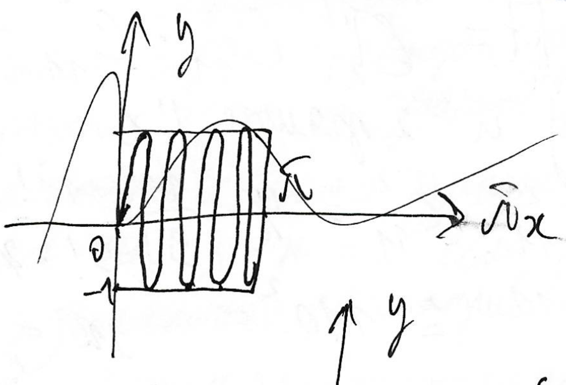
№4

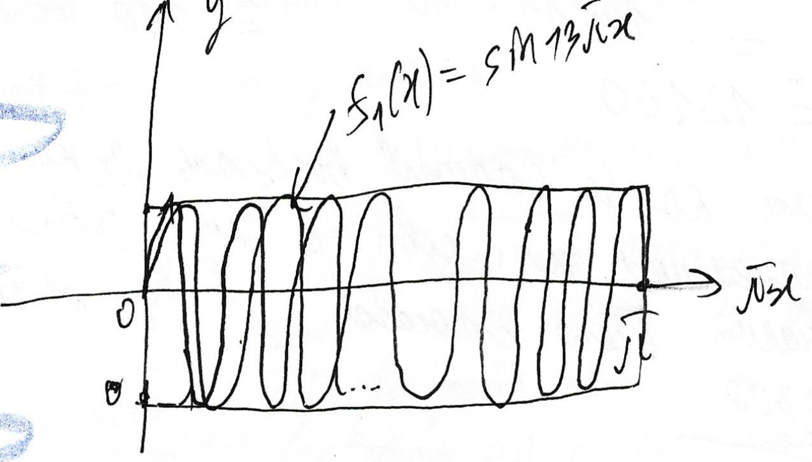


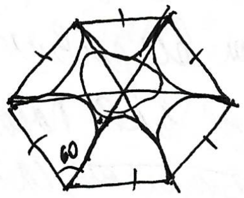
Перерисуем этот график с осями πx, y



графики sin 13πx, sin 15πx, sin 17πx получаются ~~растя~~ сжатием графика по оси πx

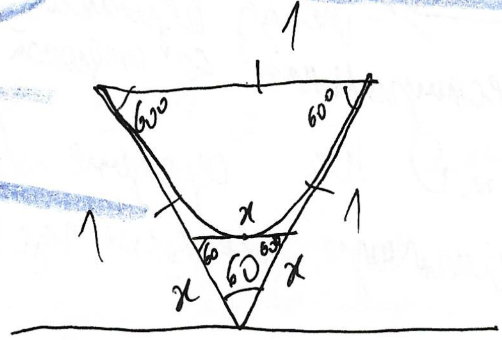






$180 \cdot 4 = 720 \div \cancel{6} =$

$720 : 6 = 120$



$\cancel{\angle x}$

$$\begin{cases} a\left(x^2 - \frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3}\,x + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 2ax = -\sqrt{3} \end{cases}$$

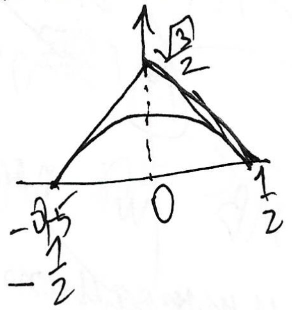
$y =$

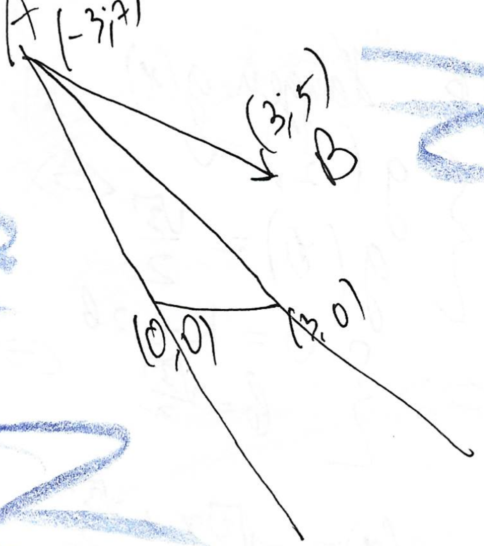
$\frac{\sqrt{3}}{2} = k \cdot 0 + b$

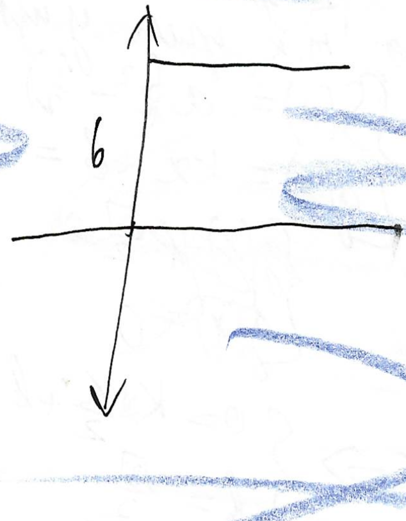
$b = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$0 = \frac{1}{2}k + \frac{\sqrt{3}}{2}$

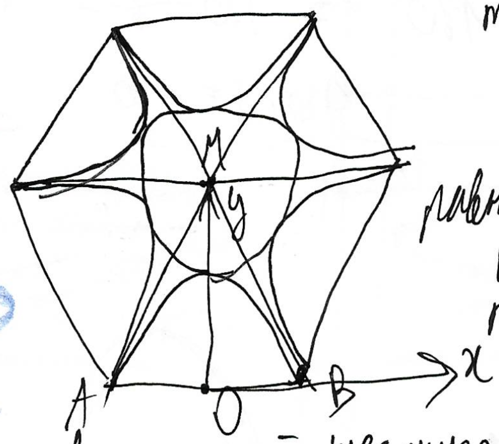
$k = -\sqrt{3}$





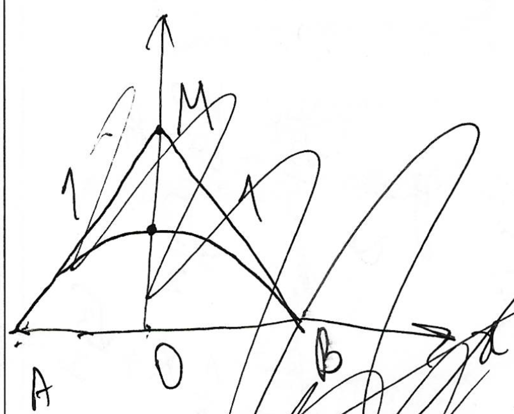


№5



т.к расстояние между вершинами все равны 1, а также все параболы равны ~~симметричны~~, сам шестиугольник симметричен, то если провести отрезки между вершинами, то получим равносторонний шестиугольник со стороной 1 $\Rightarrow MA = MB = AB$

Возьмем ~~за т. А~~ т. O на середине AB и введем координатную плоскость, где $Ox = AB$



$A\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$; $B\left(\frac{1}{2}; 0\right)$

$M\left(\cancel{\sqrt{3}}\ 0; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

~~M~~ Касат-ая MB и параболу, они касаются, т.к углы у изначального шестиугольника $0°$.

$\Rightarrow \begin{cases} f(x) = a\left(x^2 - \frac{1}{2}\right) \\ g(x) = kx + b = MB \end{cases}$, Найдем $g(x)$

$\begin{cases} \cancel{g(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}} \\ \cancel{g(x) = 0} \end{cases}$

$\begin{cases} g\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \\ g(0) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = k\cdot\frac{1}{2} + b \\ b = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = k + 2b \\ b = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} k = -\sqrt{3} \\ b = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

$g(x) = -\sqrt{3}x + \frac{\sqrt{3}}{2}$

Условия для касания

$$\begin{cases} f'(x)=g'(x) \\ f(x)=g(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2ax=-\sqrt{3} \\ a(x^2-\frac{1}{2}) = \cancel{\sqrt{3}x} -\sqrt{3}x+\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{\sqrt{3}}{2a} \\ a\left(\frac{3}{4a^2}-\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3}\cdot\frac{-\sqrt{3}}{2a}+\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} =$$

$$\frac{3}{4a}-\frac{1}{2}a = \frac{3}{2a}+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{3}{4a}-6$$

$$0=\frac{a}{2}+\frac{3}{2a}-\frac{3}{4a}+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$0=\frac{a}{2}+\frac{3}{\cancel{2a}\,4a}+\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Big|\cdot 2a \neq 0$$

$$0=a^2+\frac{3}{2}+\sqrt{3}a$$

$$D \quad a^2+\sqrt{3}a+\frac{3}{2}=0$$

$$D=3-4\cdot\frac{3}{2}$$

$$\sqrt{x}$$

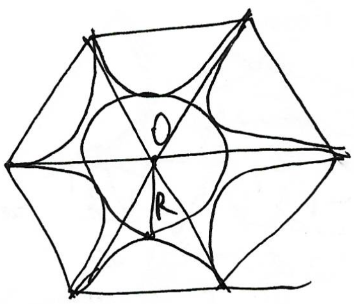
$$x^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1\cdot 1}{2\sqrt{x}}\frac{x}{x}$$

$$\frac{\sqrt{x}}{2x} = \sqrt{x}=0 \text{ не}$$

№5



парабола касается окр-ти в одной точке

Запишем условие для этого y ~~05~~

Окружность $\cancel{f(x) = x^2+y^2 = R^2}$ $\quad y^2 = |\sqrt{\ }\sqrt{|R^2-x^2|}|$

парабола $g(x) = -(x^2 - R = y$

Условие: $\cancel{x^2+y^2}$ $\begin{cases} \cancel{f(x) = g(x)} \\ \cancel{f(0) = g(0)} \end{cases}$

$\cancel{g(x) = f(x)}$ $\quad R =$

Условие: $\begin{cases} f'(x) = g'(x) \\ f(x) = g(x) \end{cases} \Leftrightarrow \{$

Чистовик

№4 графики создают новую область, если в промежутке между корнями ур-ия $f(x) = g(x)$ ⑥

$\sin 13\pi x = \sin 15\pi x$

$$\left[\begin{array}{l} 13\pi x = 15\pi x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 13\pi x = \pi - 15\pi x + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2\pi x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 28\pi x = (2n+1)\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -k, k \in \mathbb{Z} \\ 28x = 2n+1, n \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -k, k \in \mathbb{Z} \text{ — 2 подх} \\ x = \frac{n}{14} + \frac{1}{14}, n \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

Итого 2 подх из первого и 14 из второго

$\sin 15\pi x = \sin 14\pi x$, получим реш

$$\left[\begin{array}{l} x = -k, k \in \mathbb{Z} \text{ — 2 подх} \\ x = \frac{n}{16} + \frac{1}{16}, n \in \mathbb{Z} \text{ — 16 подх} \end{array}\right.$$

Итого 2 + 16

$\sin 13\pi x = \sin 17\pi x$

$$\left[\begin{array}{l} 2\pi x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 30\pi x = (2n+1)\pi, n \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \frac{k}{2}, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{n}{15} + \frac{1}{15}, n \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

Итого: 3 подх. + 15 подх.

~~Итого 40~~ 2 из 1-ого и 2-ого 3-его случая не считаем

получаем $14 + 16 + 15 + 1 = 46$

Ответ: 46