выход 12:53
возвращение: 12:56

0 460021 970001

46-00-21-97
(124.22)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 7

Место проведения г. Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Ломоносов"
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Иванова Максима Алексеевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

+1 лист Анненков А.V.

Дата

«29» 03 2026 года

Подпись участника

 85 (восемьдесят пять)

46-00-21-97 (124.22)

№1.

$$\sqrt{3(1-ctg^2 x)} = 2\sqrt{2}\cos x$$

$* \cos x \geq 0$

$$3(1-ctg^2 x) = 8\cos^2 x$$

$$3 - 3\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = 8\cos^2 x \quad \Big| \cdot \sin^2 x$$

$$3(\sin^2 x) - 3\cos^2 x = 8\cos^2 x \cdot \sin^2 x$$

$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

$$3 - 6\cos^2 x = 8\cos^2 x - 8\cos^4 x$$

$$8\cos^4 x - 14\cos^2 x + 3 = 0$$

$t = \cos^2 x$

$8t^2 - 14t + 3 = 0$

$D = 196 - 4\cdot 24 = 4\cdot 25$

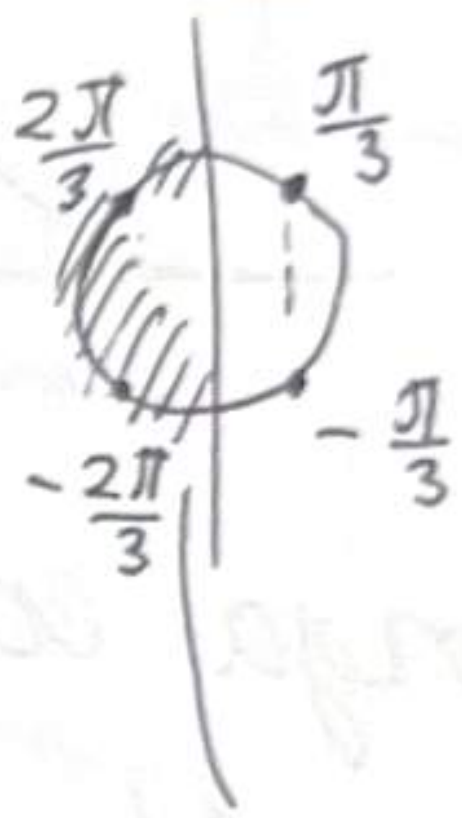
$t = \frac{14 \pm 2\cdot 5}{8\cdot 2}$

$$\left[\begin{array}{l} t = \frac{1}{4} \quad (1) \\ t = \frac{3}{2} \quad (2) \end{array}\right.$$

(1) $\cos^2 x = \frac{1}{4}$

$\cos x = \pm\frac{1}{2}$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + \pi n \\ x = -\frac{\pi}{3} + \pi n \end{array}\right.$$



не подходит*

(2) $\cos^2 x = \frac{3}{2}$

$|\cos x| \leq 1$

$\{\cos^2 x\} \leq 1$

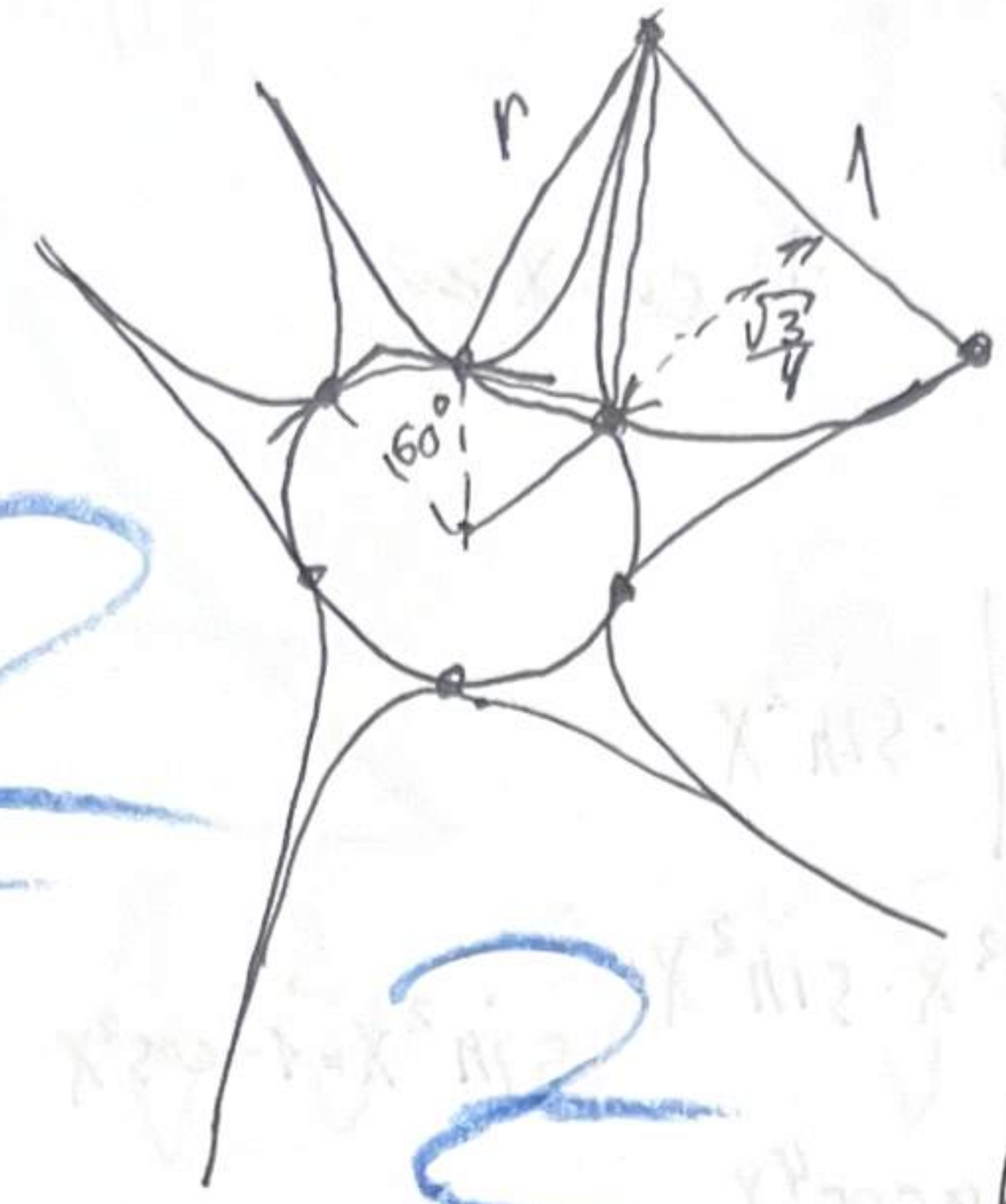
следоват. $\varnothing$

учитывая * получаем $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$

Ответ: $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

Всё, что не черновик — чистовик.

№5.

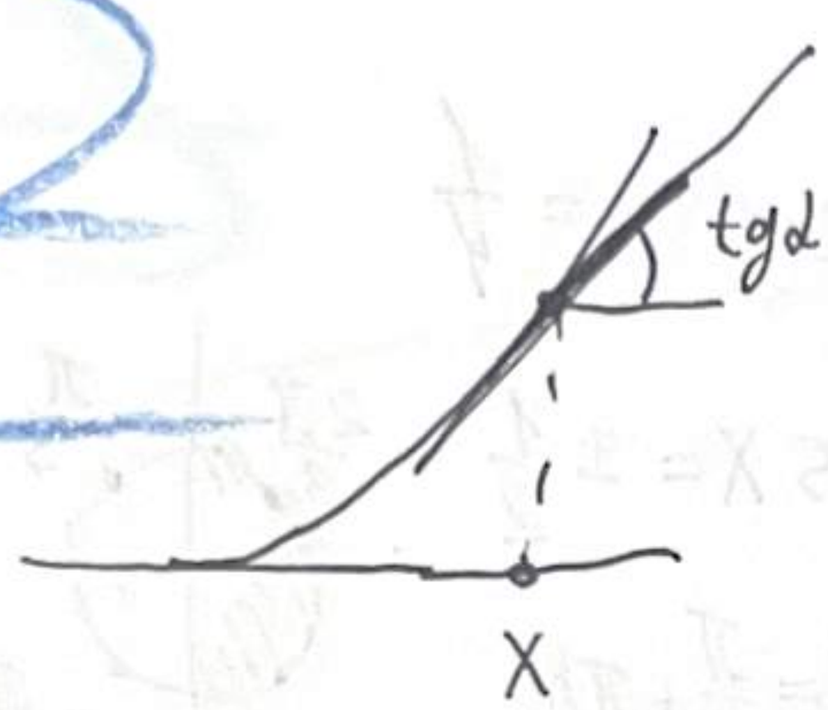


$y = cx^2$

углы шестилучальника равны
поэтому касательные ~~в пар~~ вершинах шестиуг. совпадают.

$tg\,\alpha = 2cx$

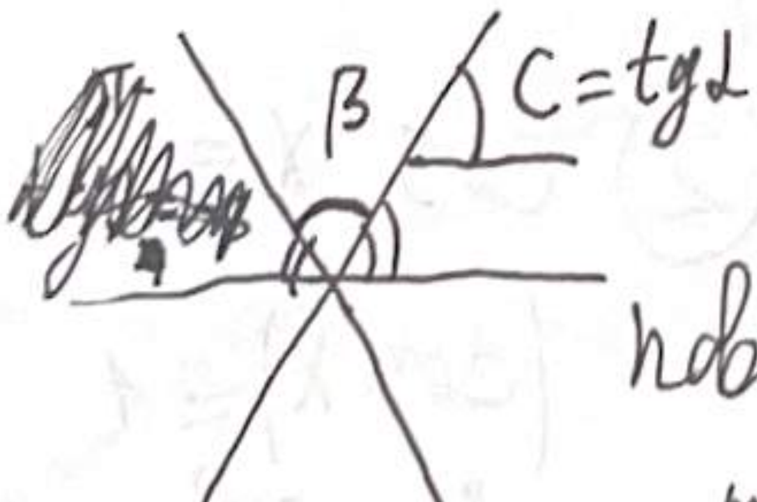
в силу симметрии парабол
1 — расстояние между симметричными точками, значит



$y' = tg\,\alpha = 2cx$

$y'(0{,}5) = c$

Тогда если поворота нет, то касательные пересекаются под каким-то углом β, а после поворота они совпадают.



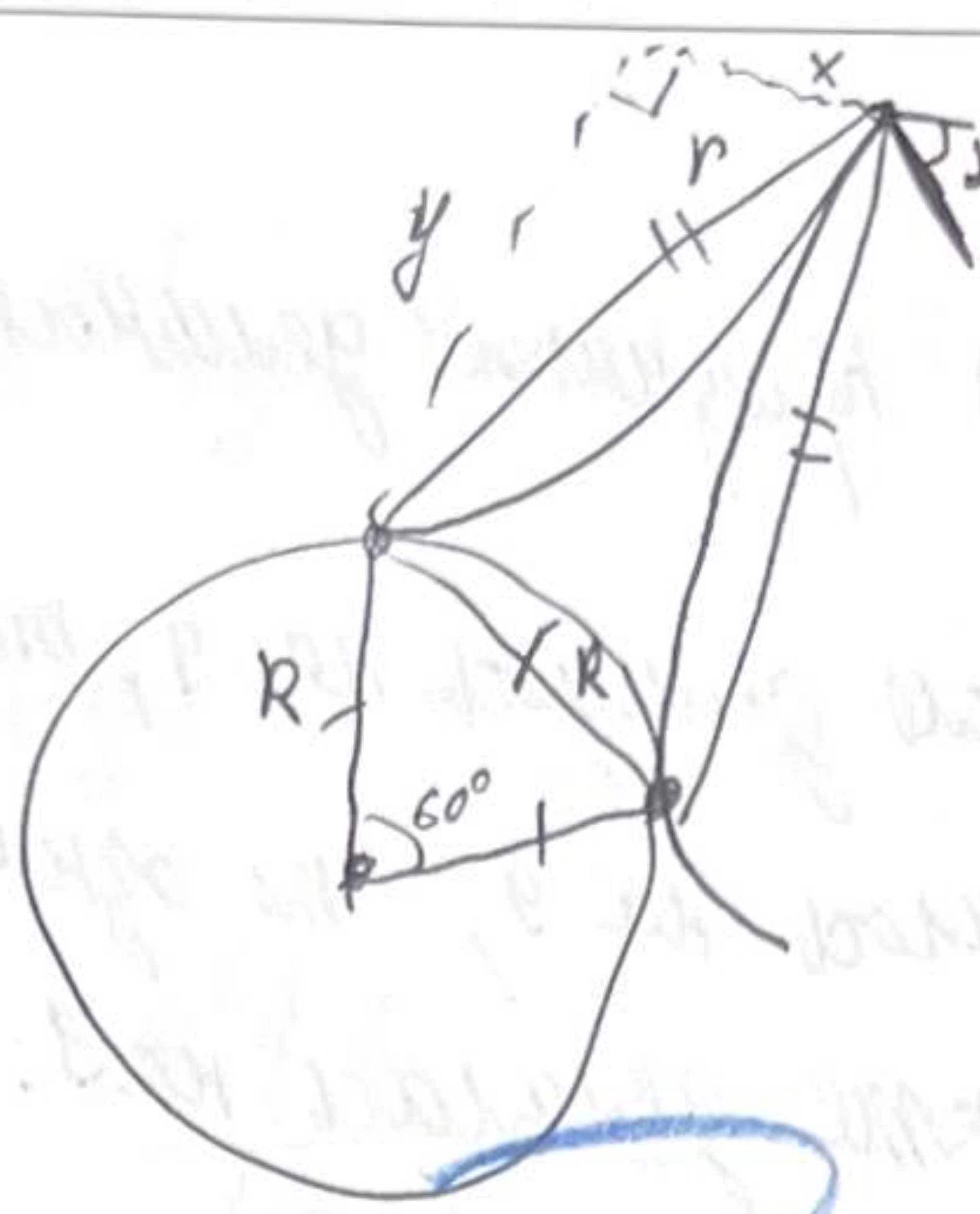
Чтобы парабола вернулась на то же место, нужно совершить 6 поворотов $\beta \cdot 6 = 360° \Rightarrow \beta = 60°$

тогда $2\alpha + \beta = 180°$ $\alpha = 60°$

$c = tg\,60° = \sqrt{3}$ $c = \sqrt{3}$

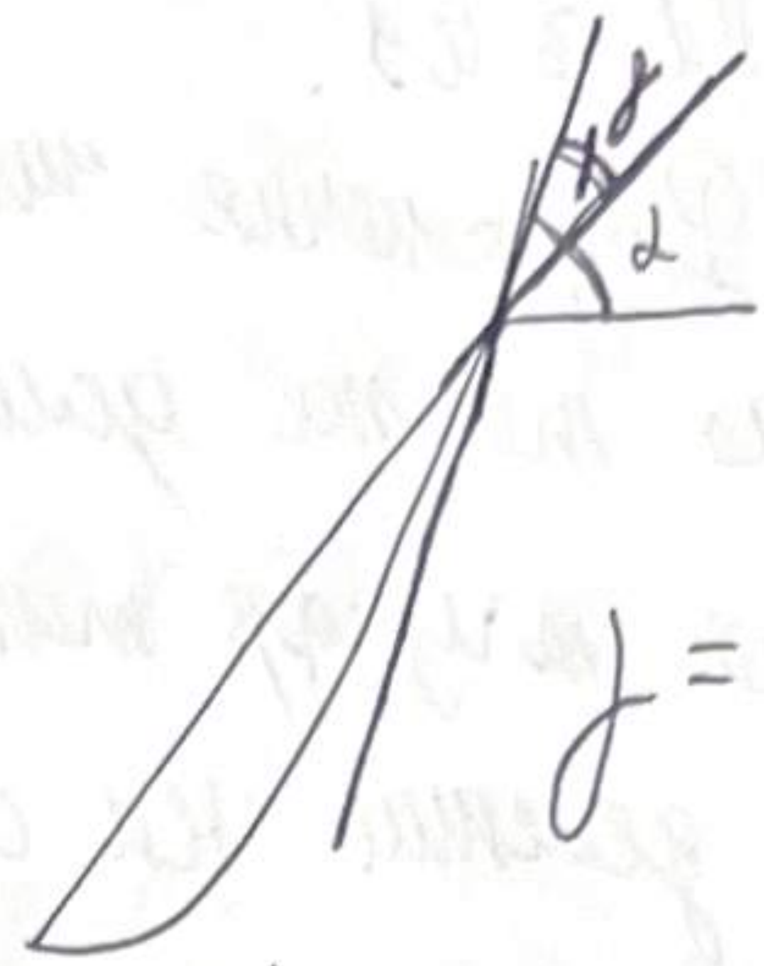
$y = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{4}$

46-00-21-97
(124.22)



$2r=\sqrt{x^2+y^2}$

$r=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{16}}=\frac{\sqrt{7}}{4}$



$\gamma=\alpha-\beta$

$tg\,\gamma = tg\,(\alpha-\beta) = \frac{tg\,\alpha - tg\,\beta}{1+tg\,\alpha\cdot tg\,\beta}$

$tg\,\beta=\frac{y}{x}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$tg\,\alpha=\sqrt{3}$

$tg\,\gamma=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{5}$

$R=2r\cdot\sin\gamma$

$\frac{1}{\sin^2\gamma}=1+\frac{1}{tg^2\gamma}$

$R=2\cdot\frac{\sqrt{7}}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{3}{7}}=\frac{\sqrt{3}}{4}$

$\frac{1}{\sin^2\gamma}=1+\frac{25}{3}$

$\sin\gamma=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{28}}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{3}{7}}$

Ответ: $R=\frac{\sqrt{3}}{4}$.

№2.

$A : S = n$ Воспользуемся признаком делимости

$n : 9$ на 3 и 9.

Раз конечное число делилось на 9, то и начальное число также делилось на 9, что означает, что его сумма ~~ц~~цифр также делилась на 9. А значит при делении на свою сумму цифр число поделилось на 9 и продолжило делиться на 9. Минимальный множитель числа – 81.

81 162 243 324 ...

$81 \cdot 3$ $81 \cdot 4$ +81 +81

a_1 a_2 a_3 a_4

$a_1 = 81$ $d = 81$ арифметическая прогрессия

$81 + 81 \cdot (n-1) < 1000$

$81n < 1000$

$n < \frac{1000}{81}$

$n < 12\frac{28}{81}$

$n_{max} = 12$

$a_{n_{max}} = a_{12} = 972$

предпоследний

S_0 ~~m~~ $= a_2 + a_5 + a_{11} = 3 \cdot a_1 + (1+4+10)d = 18 \cdot 81$

$S_0 = 1458.$

Ответ: $S_0 = 1458.$

$1000 : 81 = 12$ (ост. 28): $1000 - 81 = 190$; $190 - 162 = 28$

972

$81 \cdot 18 = 648 + 81 = 1458$

№8.

$$8x^2 \log_a x - \log_x a - 2x \le 0$$

$$\log_a x = \frac{1}{\log_x a} \qquad \begin{cases} x \ne 1 \\ a \ne 1 \\ x > 0 \\ a > 0 \end{cases} *$$

$$\frac{8x^2 \cdot 1}{\log_x a} - \log_x a - 2x \le 0$$

$$\frac{8x^2 - 2x \cdot \log_x a - (\log_x a)^2}{\log_x a} \le 0$$

$$\boxed{\begin{aligned} &8A^2 - 2AB - B^2 = 0 \\ &B^2 + 2AB - 8A^2 = 0 \\ &D = 4A^2 + 4 \cdot 8A^2 = 4 \cdot 9 \cdot A^2 \\ &B = \frac{-2A \pm 6A}{2} \\ &\underline{B = -4A} \text{ или } \underline{B = 2A} \end{aligned}}$$

$$-\frac{(\log_x a - 2x)(\log_x a + 4x)}{\log_x a - \log_x 1} \le 0$$

По методу эквивалентности:

$$-\frac{(x-1)^2(a - x^{2x})(a - x^{-4x})}{(a-1)(x-1)} \le 0$$

ТВПЗ – точки возможной перемены знака

$$\frac{(x-1)(a-x^{2x})(a-x^{-4x})}{(a-1)} \geq 0$$

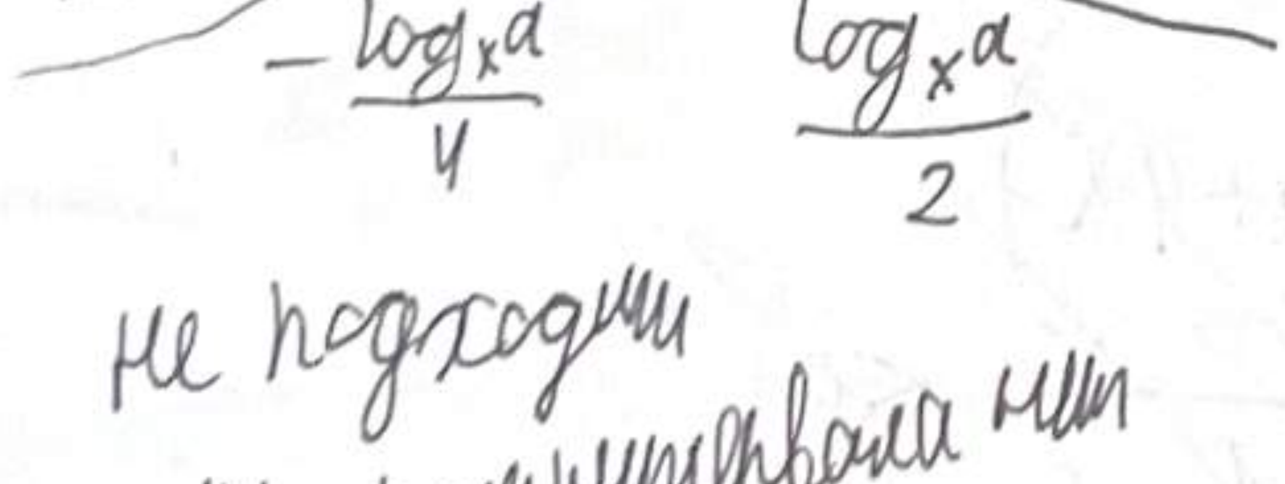
$$\frac{(x-1)(x^{2x}-a)(x^{-4x}-a)}{(a-1)} \geq 0$$

$$\frac{(\log_x a - 2x)(\log_x a + 4x)}{\log_x a} \geq 0$$

② $\log_x^{-1} a < 0$

① $\log_x a > 0$

тВПЗ: $\frac{\log_x a}{2}$ $\quad -\frac{\log_x a}{4}$



не подходит
полуинтервала нет

№8. (продолжение)

$$\frac{8x^2(\log_a x)^2 - 1 - 2x\log_a x}{\log_a x} \le 0$$

$$8x^2 - \frac{1}{\log_a^2 x} - \frac{2x}{\log_a x}$$

см. прошлый лист

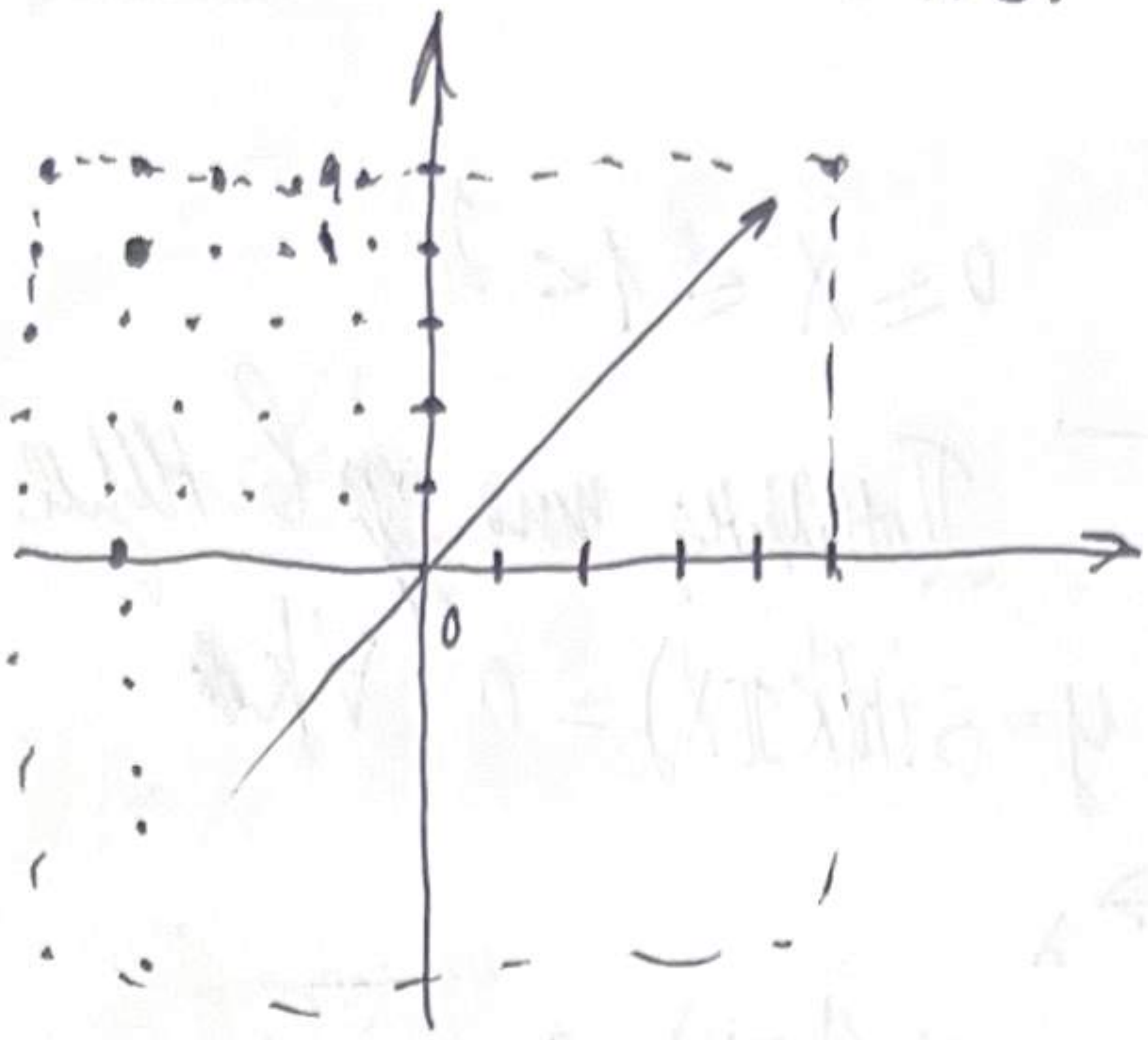
$$\log_a x = \frac{1}{\log_x a}$$

$$\frac{-\left(\frac{1}{\log_a x}-2x\right)\left(\frac{1}{\log_a x}+4x\right)}{\log_a x} \le 0$$

$$\frac{\left(2x-\frac{1}{\log_a x}\right)\left(4x+\frac{1}{\log_a x}\right)}{\log_a x} \le 0$$

~~ТВВ~~ $x = \frac{1}{2\log_a x}$ или $x = -\frac{1}{4\log_a x}$

№3.



Рассмотрим плоскость, тогда раз катеты ||-нн оси, то совпадающие с осью не подходят.

можем выбрать одну из 100 не на осях или из 20 на оси.

должно быть 9 поэтому — 200

$$100 \cdot (18 \cdot 20 + 2 \cdot 10) + 20 \cdot (10 + 10 \cdot 10) - 200$$

не на оси, не на оси, на оси, на оси

в одной плоскости (0;0) — не подходит сразу

$$C = \frac{100 \cdot 20 \cdot 30 + 20 \cdot 110 - 200}{3!} =$$

число совпавших Δ-ков

$C \cdot 11 \cdot 3$ — искомое

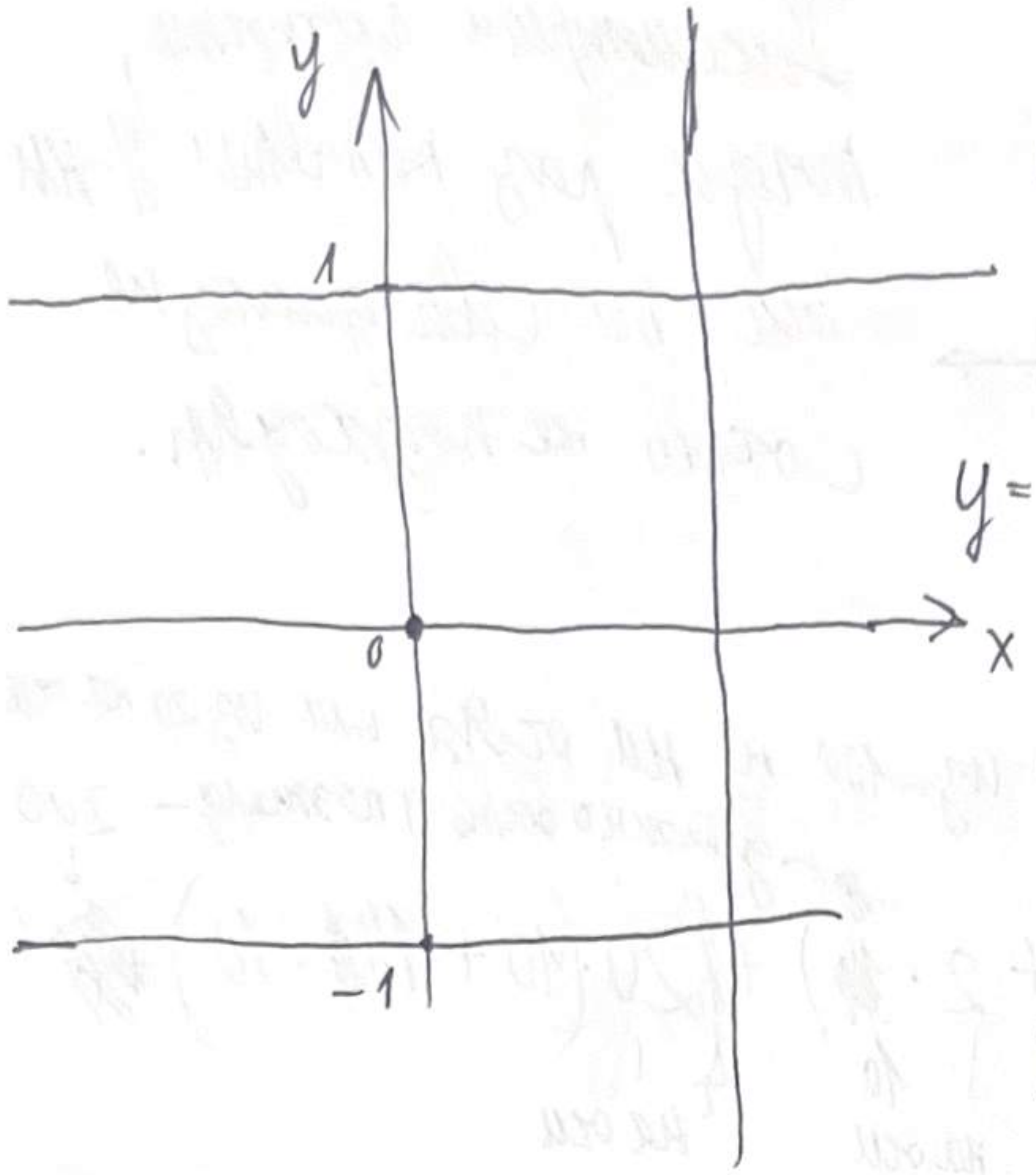
$$\begin{array}{r} \times\ 41 \\ 11 \\ \hline 451 \end{array}$$

$410 \cdot 10 \cdot 11$

$$\frac{\cancel{20}^{10}(100 \cdot 30 + 110)}{\cancel{3 \cdot 2}} \cdot 11 \cdot 3 = 45100 - 1100 = 44000$$

-1100

№4



$0 \le x \le 1 < \frac{\pi}{3}$

Понятно, что в нуле x=0

$y = \sin(k\pi x) = 0 \quad \forall k$

$\sin(k\pi x) = 0$

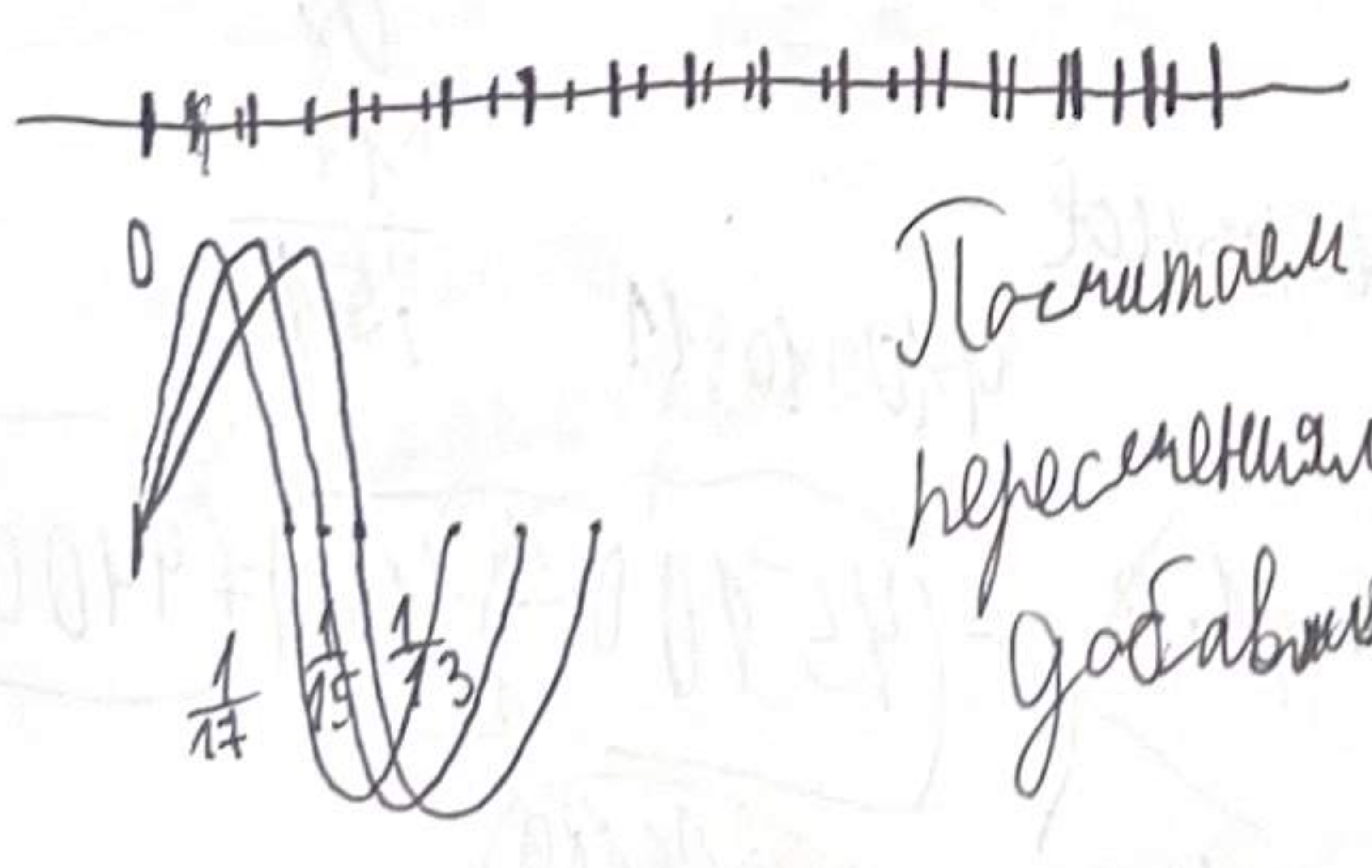
$k\pi x = \pi n \quad n \in \mathbb{Z}$

$x = \frac{n}{k}$ значит

для $k = 13$ $x = \frac{n}{13}$ $n \in \mathbb{Z}$

для $k = 15$ $x = \frac{n}{15}$

для $k = 17$ $x = \frac{n}{17}$ соответственно



Посчитаем для $\frac{1}{13}$ а затем пересечениями найдём сколько добавиться областей.

№7.

$y = (21)$ для параболы с центром $(0;0)$

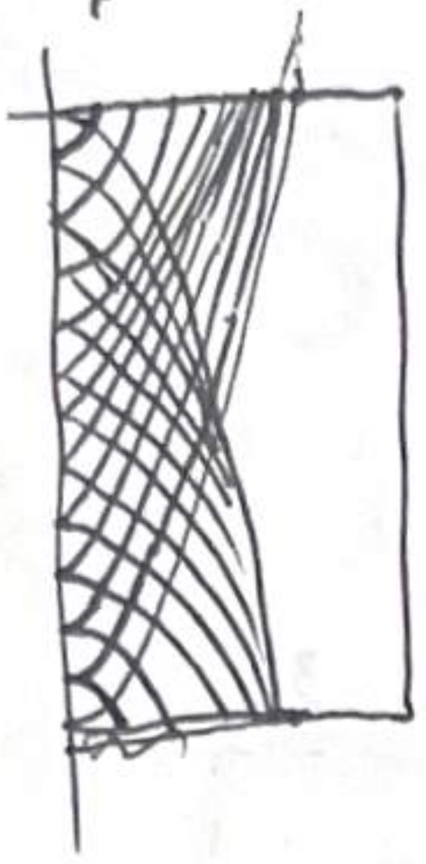
$y = 4141 \pm c$ (см, явно больше длины листа)

$y(max) < 21$ см

2890

$5,2^2 = 25 + 2 + 0,04$

~~$x < 1,7$ см~~



$y_1 = x^2 + 1$

$y_2 = x^2$

$y_1 - y_2 = 1 = const$

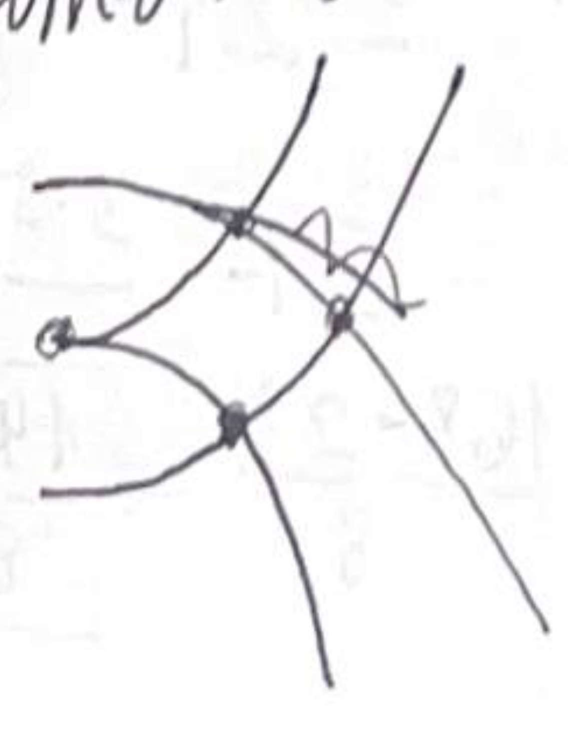
dx $dy = 2x \cdot dx$

dy остается постоянным

$x \uparrow$ поэтому $dx \downarrow$

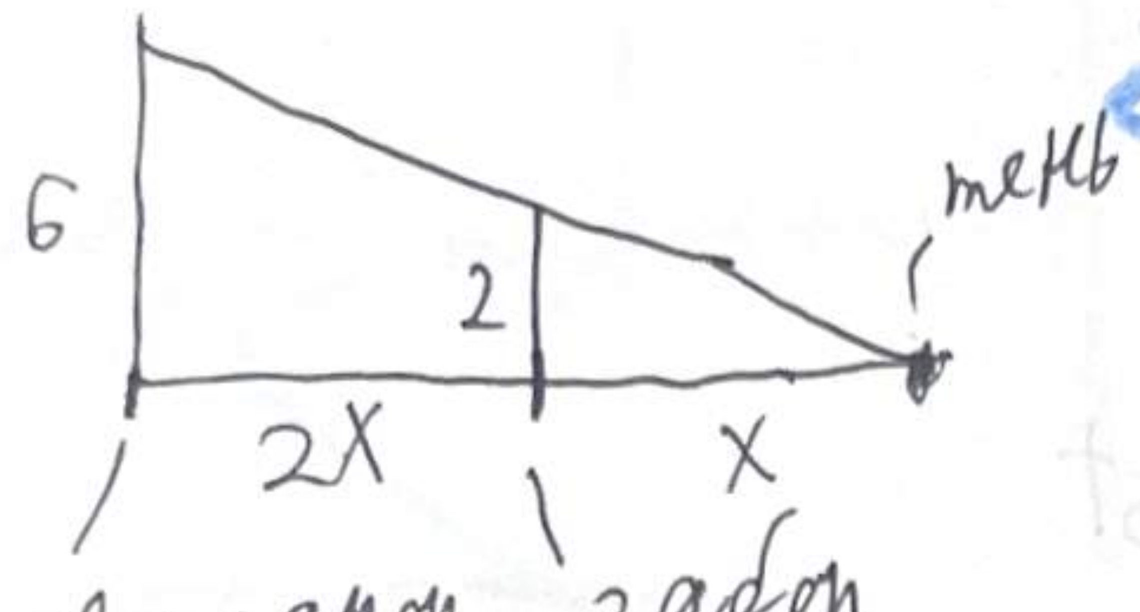
Все клеточки образованы двумя парами соседних парабол с коэффициентом $+1$ и -1.

Тогда понятно, что наибольшая площадь будет там, где параболы пересекаются в начале.

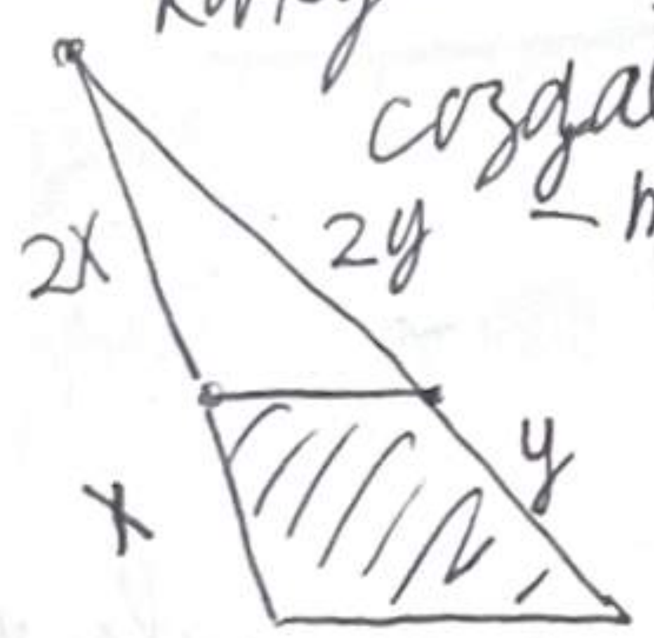


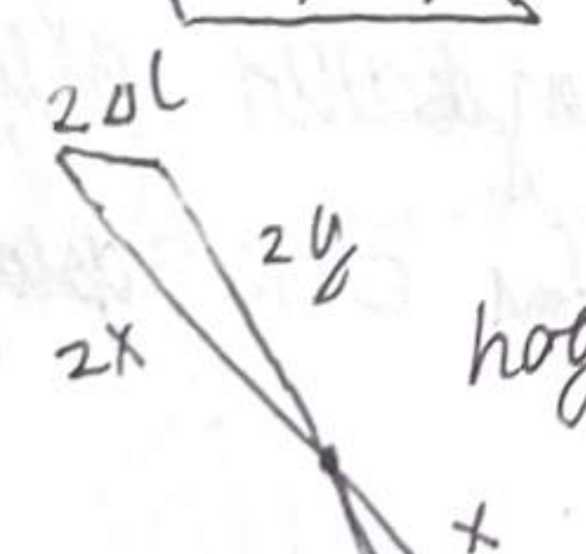
№6.

Так как высота забора 2 м, а светлячка 6 м, и они постоянны, можно рассматривать точки тени как такие точки, которые делят отрезок соединяющий тень и светлячка в данный момент 1:2 забором.

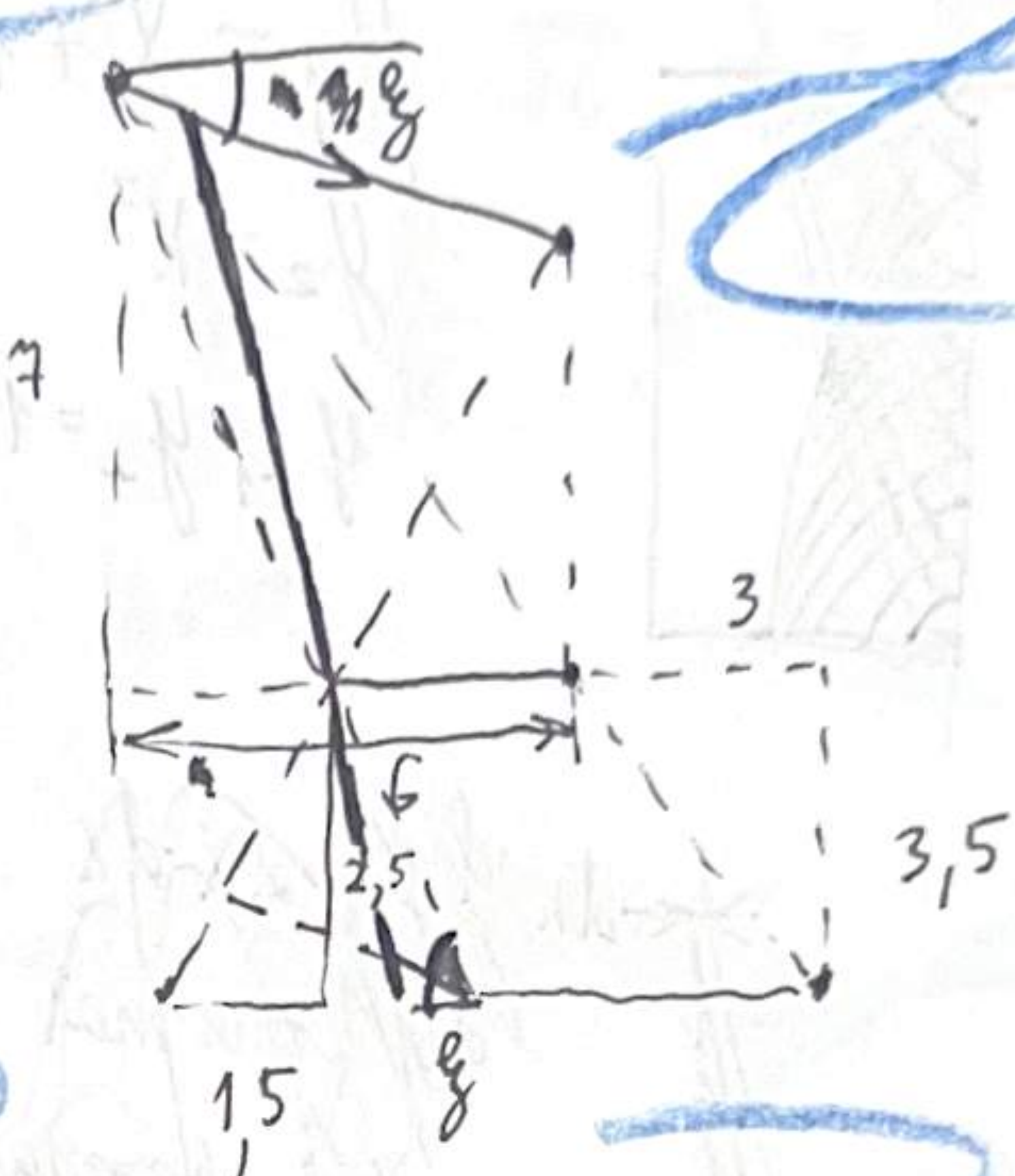


каждая точка создает область - трапецию





подобие сохраняется



Значит наклон у тени сохраняется т.к. углы сохраняются.

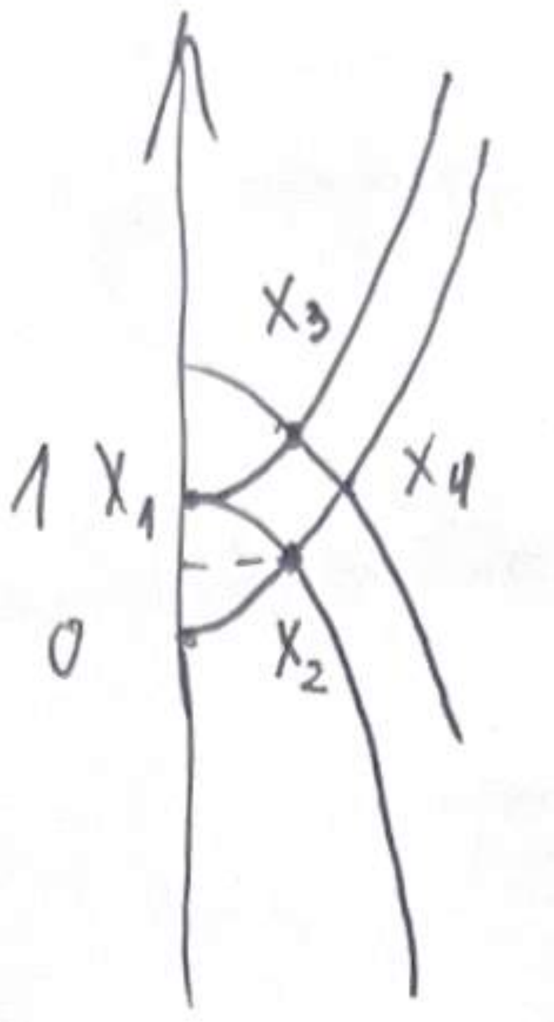
$\operatorname{tg} \xi = 2/6 = \frac{1}{3}$

3,5

$$S = S_{\triangle} - S_1 - S_2 = \frac{\left(\frac{9}{2} + \frac{15}{2}\right)}{2} \cdot \frac{7}{2} - S_1 - S_2 = 21 - \frac{3 \cdot 5}{8} - \frac{3}{2} = 21 - \frac{3 \cdot 5 + 3 \cdot 4}{8} = \frac{168 - 27}{8} = \frac{141}{8}$$

Ответ: $S = \frac{141}{8}$ (м²)

№7 (продолжение)



$x^2 = 1 - x^2$

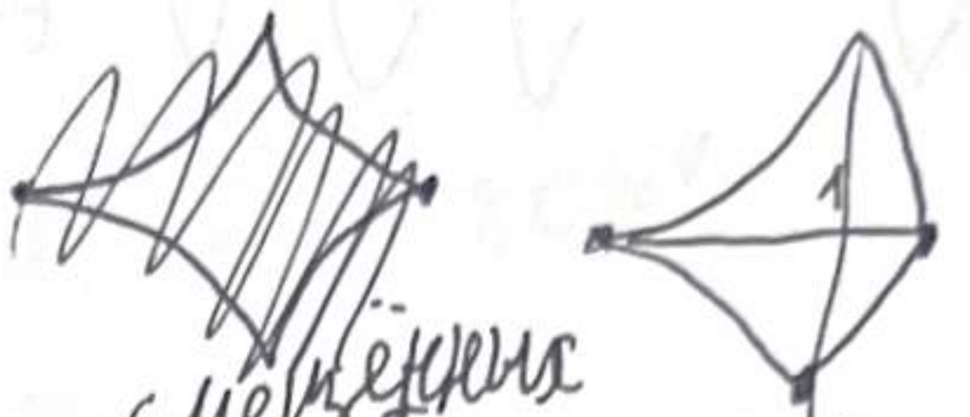
$2x^2 = 1$

$x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$

в силу симметрии $x_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$x_4^2 = 2 - x^2$

$x_4 = 1$



x_2 и x_3 на ~~одной~~ смежённых параболах, тогда их расстояние -1

$S = \frac{d_1 d_2}{2}$ (диагонали $\perp$-ны)

$S = \frac{1}{2}$

$x^2 = C - x^2$

$x^* = \sqrt{\frac{C}{2}}$

Так как шаг одинаковый $\Delta C = 1$, а Δx каждый раз всё меньше, то и диагональ при удалении от оси Oy $d_1 \downarrow$, а $d_2 = 1 = const$

значит действительно максимальная площадь

$\boxed{S = \frac{1}{2}}$

$2^{-1} = \frac{1}{2}$ черновик.

$\log_2 8 = \frac{1}{\log_8 2}$

3

1 2 3 4 5 6 7 8

V V V V V V +-