0 482073 010009

48-20-73-01
(129.12)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 11 класс, вариант 8

Место проведения Ульяновск
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по МАТЕМАТИКЕ
профиль олимпиады

Кавалерчик Ксении Павловны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«29» МАРТА 2026 года

Подпись участника
К

70 (семьдесят) один

48-20-73-01 (129.13)

Чистовик

Задача 1.

$\sqrt{3(1-tg^2x)} = 2\sqrt{2}\sin x$

$3(1-tg^2x) = 8\sin^2 x$

$3 - \frac{3\sin^2 x}{\cos^2 x} - 8\sin^2 x = 0$

$\frac{3\cos^2 x - 3\sin^2 x - 8\sin^2 x\cos^2 x = 0}{\cos^2 x}$ $\mid \cdot \cos^2 x \neq 0$ на ОГР

$3\cos 2x - 2\sin^2 2x = 0$

$3\cos 2x + 2\cos^2 2x - 2 = 0$

$\cancel{2\cos^2 2x - 3\cos 2x + 2 = 0}$

$\cancel{t = \cos 2x}$

$\cancel{2t^2 - 3t + 2 = 0}$

$t = \cos 2x$

$2t^2 + 3t - 2 = 0$

$t = \frac{-3+5}{4} = 0{,}5$ $\quad t = \frac{-3-5}{4} = -2$

$\cos 2x = 0{,}5$ $\quad \cos 2x = -2$

$2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$ $\quad x \in \varnothing$

$x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$

~~$x = -\frac{\pi}{6}$ противоречит ОГР~~

~~Ответ: $x = \frac{\pi}{6}$~~

~~$x = \pi$~~

$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$

$x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$ – противоречит ОГР

$x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$ – противоречит ОГР

$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$

ОГР:

1) $3(1-tg^2x) \geq 0$

$1 - tg^2x \geq 0$

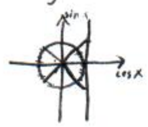
$t = tg\,x$

$(1-t)(1+t) \geq 0$

$-\quad + \quad -$; $-1 \quad 1 \quad t$

$-1 \leq t \leq 1$

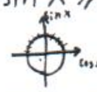
$\begin{cases} tg\,x \geq -1 \\ tg\,x \leq 1 \end{cases}$



$x \in [-\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n], n \in Z$

2) $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$

3) $\sin x \geq 0$, т.к. при $\sin x < 0$ $x \in \varnothing$



$x \in [0 + 2\pi n; \pi + 2\pi n], n \in Z$

Ответ: $\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$; $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$.

Задача 2.

Пусть $n \in A$ и $n = 100x + 10y + z$.

$\frac{100x + 10y + z}{x+y+z} = 9k$ (по усл.), $k \in Z$

$\frac{100x + 10y + z}{9k} = x + y + z \Rightarrow 100x + 10y + z \,\vdots\, 9$ $(x+y+z \in Z)$

По признаку делимости на 9, если число $n \,\vdots\, 9$, то и сумма его цифр $x+y+z \,\vdots\, 9$. Пусть $x+y+z = 9m$, $m \in Z$

$\frac{100x+10y+z}{9k} = 9m \Rightarrow 81km = 100x + 10y + z \Rightarrow n \,\vdots\, 81$.

Рассмотрим все трехзн. числа, кратные 81:

Чистовик

$\frac{162}{9}=18$

$\frac{243}{9}=27$

$\frac{324}{9}=36$

$\frac{405}{9}=45$

$\frac{486}{18}=27$

$\frac{567}{18}$ – не делится

$\frac{648}{18}=36$

$\frac{729}{18}$ – не делится

$\frac{810}{9}=90$

$\frac{891}{18}$ – не делится

$\frac{972}{18}=54$

Таким образом, $A=\{162;243;324;405;486;648;810;972\}$

$*\ 324+486+810=1620$

Ответ: см. множ. A выше; 1620.

Задача №3.

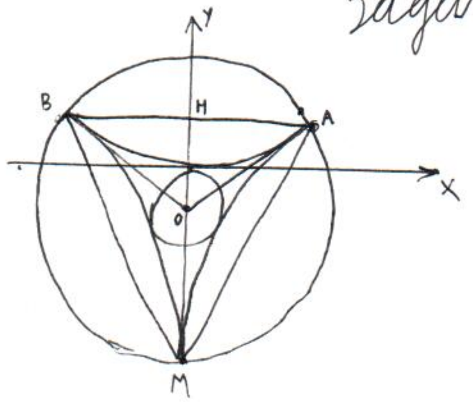
Пусть т. A – вершина прямоугольного угла треугольника. Тогда для неё можно выбрать вершину B, такую, что $X_A=X_B$ 12 способами (т.к. при $x=const$ $\exists$ 13 точек с ординатами $\in Z$, при $|y|\leq 6$). Аналогично вершину C, где $Y_A=Y_C$ можно выбрать 12 способами. Все вышесказанное верно ~~для т $A\in(X,Y)$~~, если все вершины прямоугольника лежат в плоскости (XY) или параллельной ей. ~~Комбинаторно получ~~ ~~Так, для Δ лежащего в плоскости (XY) с вершиной прямого угла в т. А.~~ Так, можно составить $12\cdot12$ треугольников в плоскости (XY) при фиксированной вершине A. Т.к. имеем 13^3 точек, можно составить $13^3\cdot12^2$ прямоугольников в плоскости (XY) или параллельной ей. Столько же треугольников можно составить в осях (YZ) и (XZ). Отсюда ответ: $3\cdot13^3\cdot144=$

$=3\cdot169\cdot144\cdot13=39\cdot144\cdot169=949104$

Ответ: 949104.

Чистовик

Задача ~~4~~5.



$\angle HOA = \frac{360}{3} : 2 = 60^\circ \Rightarrow$ для прямой OA: $y = tg(90^\circ - 60^\circ)x - r$, где r - иском. рад.

$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - r$

Т.к. OA - касательная к параболе:

$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{производная}}}{2Cx} = \frac{\sqrt{3}}{3}x \Rightarrow C = \frac{\sqrt{3}}{6}$

Заметим, что т. O - точка пересения медиан $\Rightarrow OH = \frac{1}{2}OM = \frac{1}{2}\cdot 1 = 0,5$.
$OA = OM = 1$ (по усл.) $\Rightarrow AH = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (по т. Пифагора)

Парабола и прямая OA пересекаются (касаются) только в одной точке, ~~знач~~ причем абсцисса этой точки $= \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{\sqrt{3}}{3}x - r = \frac{\sqrt{3}}{6}x^2$

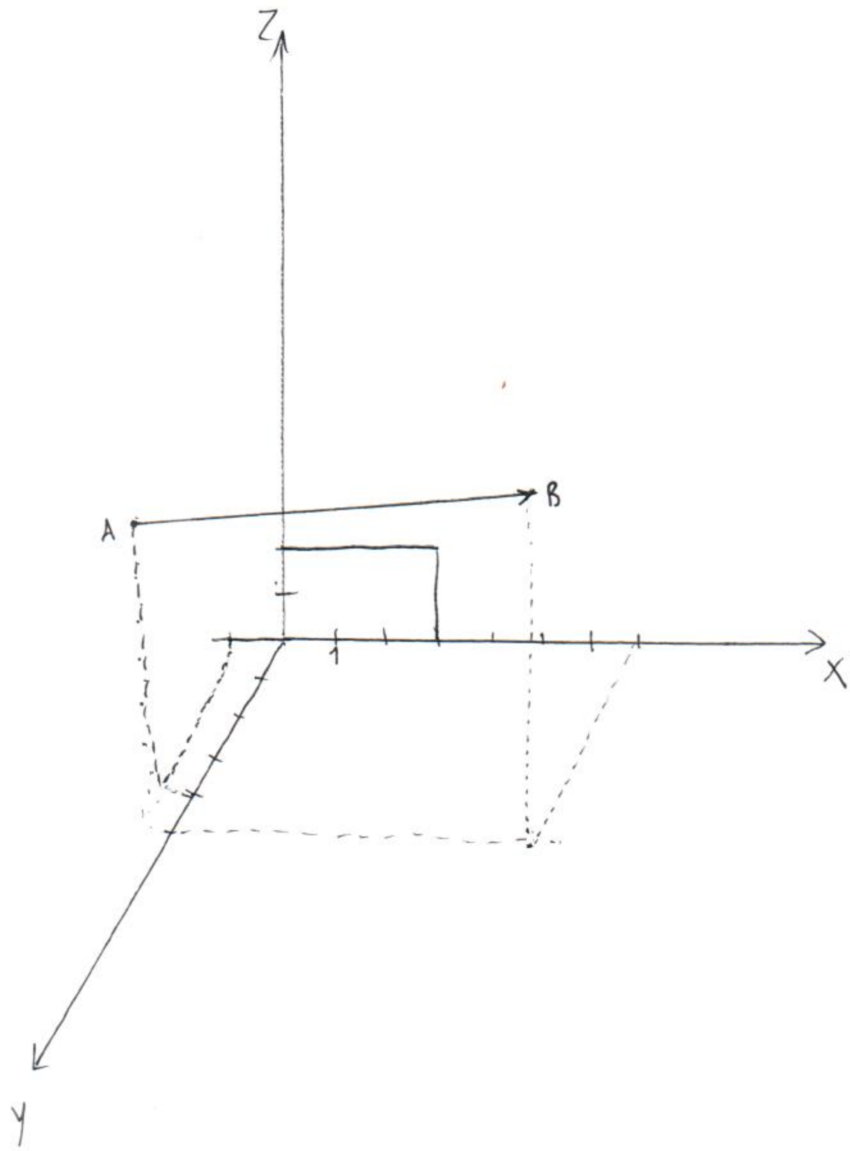
$\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - r = \frac{\sqrt{3}}{6}\cdot\frac{3}{4}$

$0,5 - r = \frac{\sqrt{3}}{8}$

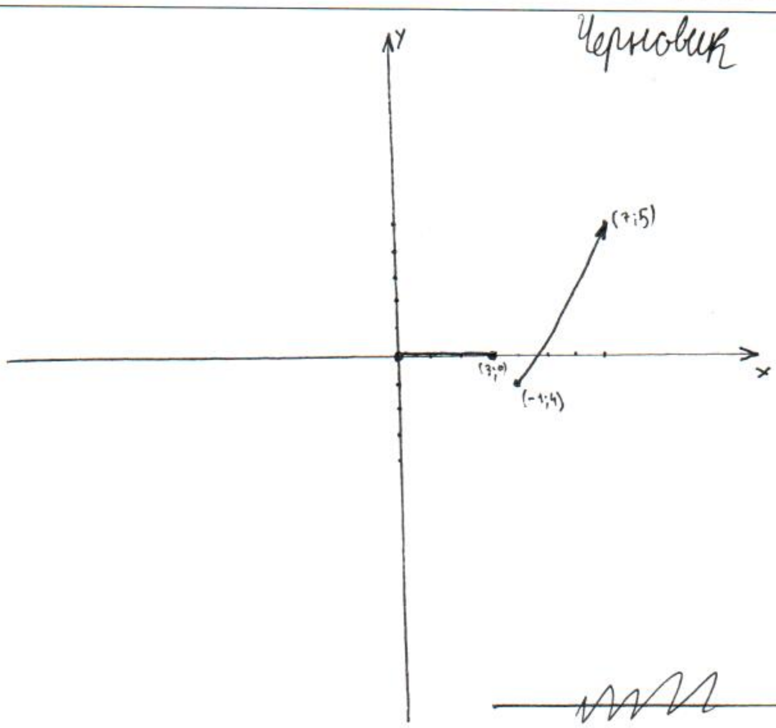
$r = 0,5 - \frac{\sqrt{3}}{8}$

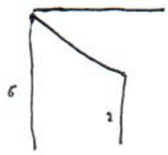
Ответ: $r = 0,5 - \frac{\sqrt{3}}{8}$

Чистовик
Задача 6.



Черновик





$(-3;0;2)$ $(-1;4;6)$

$39 \cdot 144 \cdot 169$

$\frac{100 \cdot x+10y+z}{x+y+z} = 9k$

$100x+10y+z = 9x+9y+9z$

$91x+y-8z=0$

$100x+10y+z \vdots 9$

$x+y+z \vdots 9$

$x+y+z=27$

$x=y=z=9$

Число кратно 9

Сумма цифр кратна 9

Число кратно 81

$\frac{162}{9} = \frac{54}{3} = 18$

$\frac{243}{9} = 27$

$\frac{324}{9} = 36$

$\frac{405}{9} = 45$

$\frac{486}{18} = 27$

$\cancel{\frac{567}{18}}$

$\frac{648}{18} = 36$

$\cancel{\frac{729}{18}}$

$\frac{810}{9} = 90$

$\cancel{\frac{891}{18}}$

$\frac{972}{18} = 54$

$\frac{999}{27} = \frac{111}{3} = 37$

$\frac{100x+10y+z}{9} = x+y+z$

$x+y+z=18$

$\frac{666}{18} = \frac{222}{9} = \frac{74}{3}$

$\cancel{\frac{981}{18}} = \cancel{\frac{109}{2}}$ $\frac{918}{18} = \frac{102}{2} = 51$

$405 : 9 = 45$

$\frac{486}{18} =$

$\frac{648}{18} = \frac{324}{9}$

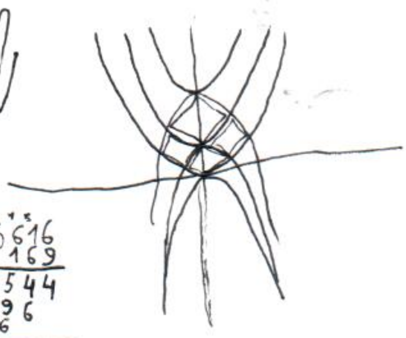
$\frac{810}{18} = \frac{405}{9} =$

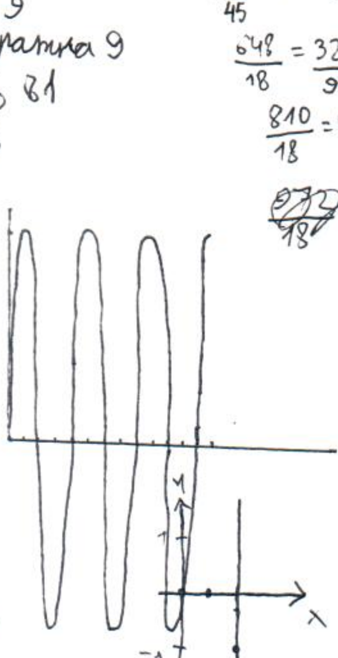
$\cancel{\frac{972}{18}} = \cancel{476}$

$972 : 18 = 54$

$39 \cdot 144 = 5616$

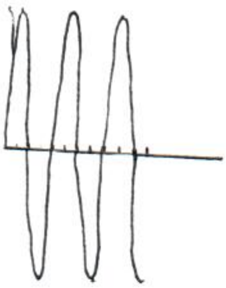
$5616 \cdot 169 = 949104$

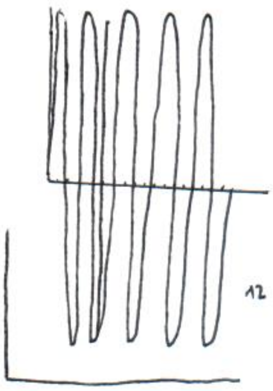




№3

$12 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 169$





Черновик

Задача 1

$\sqrt{3(1-tg^2x)} = 2\sqrt{2}\sin x \quad |\hat{}2$

$3(1-tg^2x) = 8\sin^2x$

$3 - 3tg^2x - 8\sin^2x = 0$

$3 - \frac{3\sin^2x}{\cos^2x} - 8\sin^2x = 0$

$\frac{3\cos^2x - 3\sin^2x - 8\sin^2x\cos^2x}{\cos^2x} = 0$

$\frac{3\cos 2x - 2\sin^2 2x}{\cos^2x} = 0$

$3\cos^2x - 5\sin^2x = 0$

$\cos^2x = \frac{5\sin^2x}{3}$

$1 = \frac{5}{3}tg^2x$

$tg^2x = \frac{3}{5}$

$tg\,x = \pm\frac{\sqrt3}{\sqrt5}$

$x = arctg\frac{\sqrt3}{\sqrt5} + \pi n, n\in Z$

$x = arctg(-\frac{\sqrt3}{\sqrt5}) + \pi n, n\in Z$

Т.к. $-1 \le \frac{\sqrt3}{\sqrt5} \le 1$ и $-1 \le -\frac{\sqrt3}{\sqrt5} \le 1$, обе серии корней не противоречат огр.

ОГР:

1) $3(1-tg^2x) \ge 0$

$1 - tg^2x \ge 0$

$t = tg\,x$

$(1-t)(1+t) \ge 0$

$-\quad + \quad -$

$-1 \quad 1$

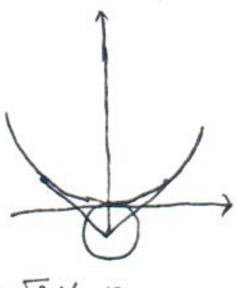
$-1 \le tg\,x \le 1$

$\begin{cases} tg\,x \le 1 \\ tg\,x \ge -1 \end{cases}$

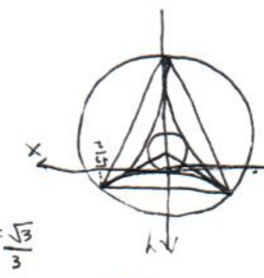
$x \in [-\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n],\ n\in Z$

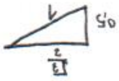
2) $x \ne \frac{\pi}{2} + \pi n, n\in Z$

Задача 5



$k = tg\,30° = \frac{\sqrt3}{3}$





~~y = kx~~ $y_1 = \frac{\sqrt3}{3}x - r$

$y_2 = -\frac{\sqrt3}{3}x - r$

$2cx = \frac{\sqrt3}{3}x$

$c = \frac{\sqrt3}{6}$

$\frac{39}{144}$

6

$2cx = \frac{\sqrt3}{3}x$

$-r + \frac{\sqrt3}{3}x = \frac{\sqrt3}{6}x^2$

$x = \frac{\sqrt3}{2}$

$\frac{\sqrt3}{3}x - r = \frac{\sqrt3}{6}x^2$

$\frac{\sqrt3}{6}x^2 - \frac{\sqrt3}{3}x + r = 0$

$x^2 - 2x + \frac{6}{\sqrt3}r = 0$

$x^2 - \frac{6}{\sqrt3}\cdot\frac{\sqrt3}{3}x + \frac{6}{\sqrt3}r = 0$

$(x - \frac{\sqrt3}{2})^2 = x^2 - \sqrt3x + \frac{3}{4}$

$\frac{\sqrt3}{6}x^2 = \frac{\sqrt3}{3}x - r$

$x = \frac{\sqrt3}{2}$

$\frac{\sqrt3}{6}\cdot\frac{3}{4} = \frac{\sqrt3}{3}\cdot\frac{\sqrt3}{2} - r$

$\frac{\sqrt3}{8} = \frac{1}{2} - r$

$r = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt3}{8}$