0 442744 110001

44-27-44-11
(129.10)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 3 11 класс

Место проведения Санкт-Петербург
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Каменевой Марии Сергеевны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«29» марта 2026 года

Подпись участника

90 (девяносто) фили

44-27-44-11
(129.10)

чистовик

Задача 1.

$$\sqrt{3(1-ctg^2x)} = 2\sqrt{2}\cos x$$

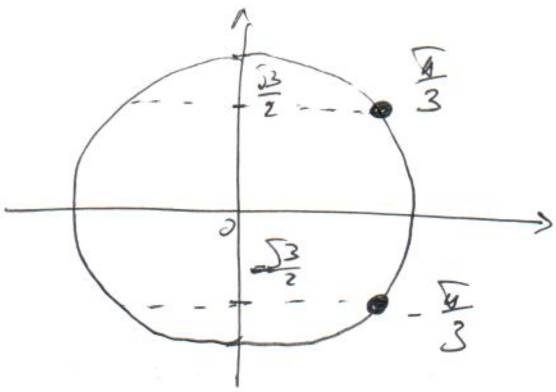
$$\begin{cases} 3(1-ctg^2x) = 8\cos^2x \\ \cos x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-3ctg^2x = 8-8\sin^2x \\ \cos x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3-3\left(-1+\frac{1}{\sin^2x}\right) = 8-8\sin^2x \\ \cos x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8\sin^2x - 2 - \frac{3}{\sin^2x} = 0 \\ \cos x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\sin x \neq 0$
(Z)

$$\begin{cases} 8\sin^4x - 2\sin^2x - 3 = 0 \\ \cos x \geq 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sin^2x = -\frac{1}{2} \\ \sin^2x = \frac{3}{4} \end{array}\right. \\ \cos x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \ k \in Z$$



Ответ: $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \ k \in Z$

Задача 3 чистовик

Рассмотрим Δ, катеты которых ∥ Ox и Oy. Посчитаем кол-во способов выбрать катет параллельный Ox: конечные точки могут иметь координаты от −5 до 5 по условию, т.е. 11 вариантов, значит всего таких катетов $\frac{\cancel{C_{11}^2}}{2}$ C_{11}^2. Аналогично, кол-во способов выбрать катет параллельный Oy − C_{11}^2. Заметим, что Δ в ∀ случае будет прямоуг., т.к. его катеты ∥ Ox и Oy, а $Ox \perp Oy$ ⇒ в 1 плоскости таких
(*) Δ − $4(C_{11}^2)^2$, но заметим, что данные Δ обязательно лежат в пл-ти ∥ Oxy, при этом по координате z таких плоскостей (включая саму Oxy) − 11. Т.е. всего таких Δ − $11 \cdot 4(C_{11}^2)^2$.

Далее заметим, что для пар плоскостей Ox и Oz и Oy и Oz рассуждения и подсчеты аналогичны. Для других вариантов быть не может ⇒ всего получаем

$$3 \cdot 11 \cdot 4(C_{11}^2)^2 = 3 \cdot 11 \cdot \left(\frac{11!}{9! \cdot 2!}\right)^2 = 3 \cdot 11 \cdot 4\,\frac{10^2 \cdot 11^2}{2^2} = \cancel{3 \cdot 11 \cdot 25 = 825}$$
$$= 399300$$

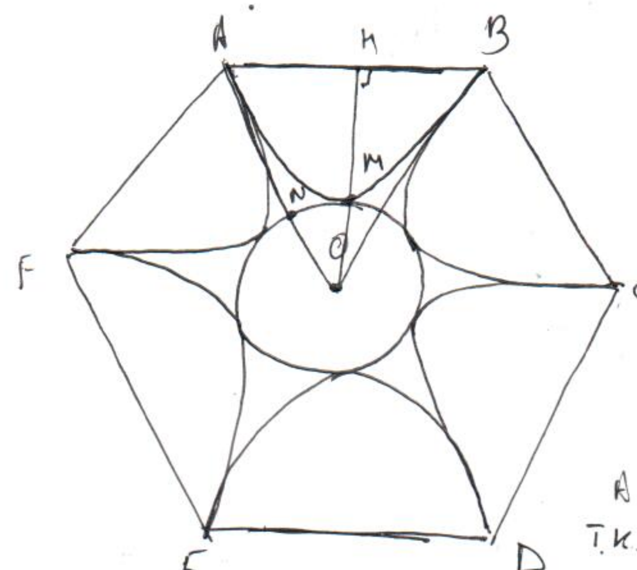
Треугольников 399 300

Ответ: ~~825~~ 399 300 треугольников

(*) Заметим, что таким образом выбираются 4 точки, ∀ 3 из них − вершины подходящего треугольника ⇒ $C_4^3 = 4$ − вариантов треугольников

чистовик

Задача 5



$y = cx^2$

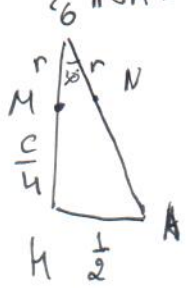
∃ радиус окружности — r

$AB = \ldots = FA = 1$ по условию

∃ O — центр „шестиугольника" $\Rightarrow$ O также центр $AB\ldots F$, а $ABCDEF$ — прав. шестиуг. т.к. $AB = \ldots = FA$, а также „шестиуг." обладает центральной симметрией

Проведем $OH \perp AB$. Т.к. парабола — симметрична $\Rightarrow$ OH проходит через точку её касания с окружностью. ∃ эта точка — M, а $OA \cap \omega = N$

$\angle AOB = 60°$ т.к. $AB\ldots F$ - прав. шестиуг., $\triangle AOB$ - р/б $\Rightarrow$ $\angle AOH = 30°$



$OM = ON = r$

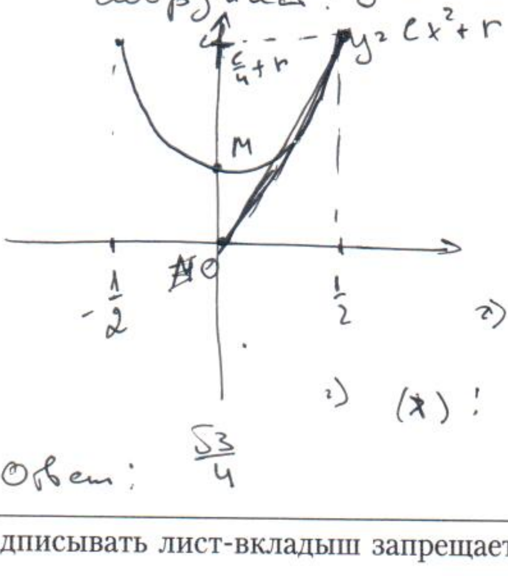
$AH = \frac{1}{2} \Rightarrow MH = f(\frac{1}{2}) = \frac{c}{4}$

$AO = AB = 1$ (т.к. ABO — р/с)

$\Rightarrow \frac{OH}{OA} = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$

$$\frac{r + \frac{c}{4}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{c}{4} \quad (*)$$

Т.к. углы нулевые, то в т. A OA — кас. к параболе. Введем прямоугольную систему координат:



$f'(\frac{1}{2}) = 2c(\frac{1}{2}) = c$

Найдем координаты прямой:

$y = kx + b$

$(0;0)$: $0 = 0 \cdot k + b \Rightarrow b = 0$

$(\frac{1}{2}; \frac{c}{4} + r)$: $\frac{c}{4} + r = k \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow k = 2r + \frac{c}{2}$

$\Rightarrow f'(\frac{1}{2}) = k \Rightarrow c = 2r + \frac{c}{2} \Leftrightarrow c = 4r$

$\Rightarrow (*)$: $r = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{4r}{4} \Leftrightarrow r = \frac{\sqrt{3}}{4}$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{4}$

чистовик

Задача 8

(*) $8x^2 \log_a x - \log_x a - 2x \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$

$\log_a x \cdot 8x^2 - 2x - \log_x a \geq 0$

Решим ур-е: $\log_a x \cdot 8x^2 - 2x - \log_x a \geq 0$

$D_1 = 1 + \log_x a \cdot \log_a x \cdot 8 = 9$

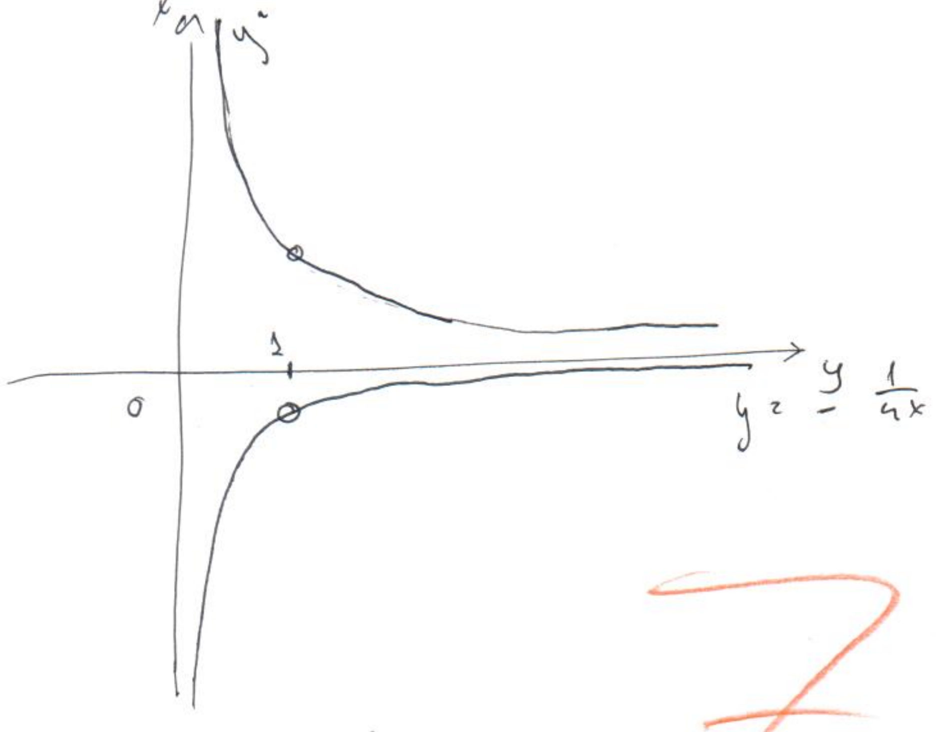
$x = \dfrac{1 \pm 3}{8 \log_a x} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\log_a x} \\ x = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\log_a x} \end{array}\right.$

1) $\log_a x > 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\log_a x} \\ x \leq -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\log_a x} \end{array}\right. \overset{x>0}{\Leftrightarrow} \log_a x \geq \frac{1}{2x} \overset{\text{т.к. } x>0}{>} 0$

2) $\log_a x < 0$ $\quad \left[\begin{array}{l} x \geq -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\log_a x} \\ x \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\log_a x} \end{array}\right. \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x \geq -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\log_a x} \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_a x \leq -\dfrac{1}{4x} \overset{\text{т.к. } x>0}{<} 0$

$\Rightarrow$ (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \log_a x \geq \frac{1}{2x} \\ \log_a x \leq -\frac{1}{4x} \end{array}\right. \\ x \neq 1 \\ y = x \end{cases}$



А4-27-44-11 (129.10)

чистовик

Задача 8 (продолжение)

Т.к. в решении присутствует полу интервал, то вероятно $\log_a x$ проходит через выколотую точку

$$\text{т)}\quad \begin{cases} \log_a 1 = \frac{1}{2} \\ \log_a 1 = -\frac{1}{4} \end{cases} \quad (\text{т})$$

чистовик

Задача 2

Заметим, что все числа в множестве $A \vdots 9$ => Σ их цифр также $\vdots 9$ из признака делимости на 9

Все числа из A - трехзначные => Σ может быть равна только 9, 18 или 27, при чем $\Sigma = 27$ только в 1 случае — при 999, при этом ~~999 ⋮ 27~~

$999 : 27 = 37 \not\vdots\, 9$ => не подходит

=> может быть только 9 и 18

Т.е. $\forall$ число из A при делении на 9 или 18 - целое $\vdots 9$

=> $\forall$ число из $A \vdots 81$

=> в A могут быть только:

162, 243, 324, 405, 486, 567, 648, 729, 810, 891, 972

Числа 162, 243, 324, 405, 810 - подходят, т.к. $\Sigma_{цифр} = 9$, они $\vdots 81$

числа 486, 648, 972 - подходят, т.к. $\Sigma_{цифр} = \cancel{9}\ 18$, они $\vdots 81 \cdot$ $\vdots 2$, остальные не подходят, т.к. их $\Sigma_{цифр} = 18$, но они $\not\vdots\, 2$

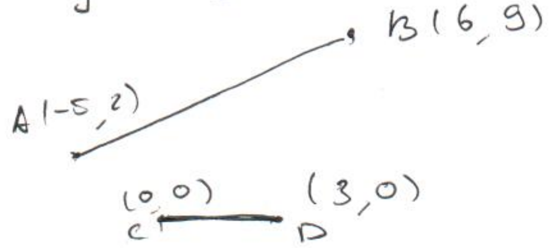
=> подходят: 162, 243, 324, 405, 486, 648, 810, 972

$243 + 648 + 972 = 1863$

Ответ: 1863

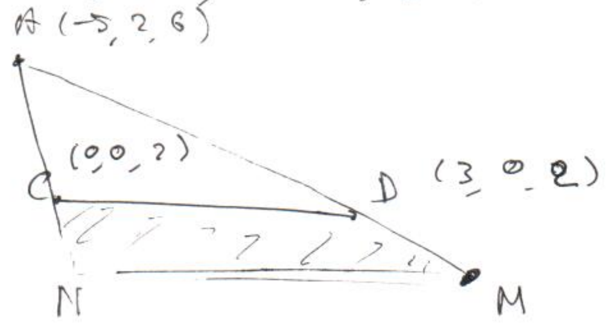
черновик

Задача 6



Найдем крайние точки тени от точки A

$A(-5, 2, 6)$; $D(3; 0, 2)$

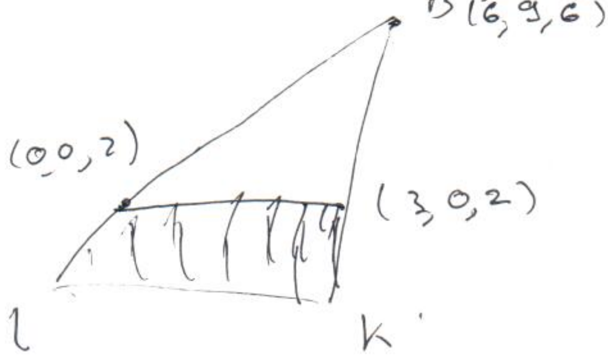


$\cancel{AD = \sqrt{(-5-3)^2+4^2}}$

$\Rightarrow \frac{AD}{DM} = \frac{4}{2} = \frac{2}{1}$

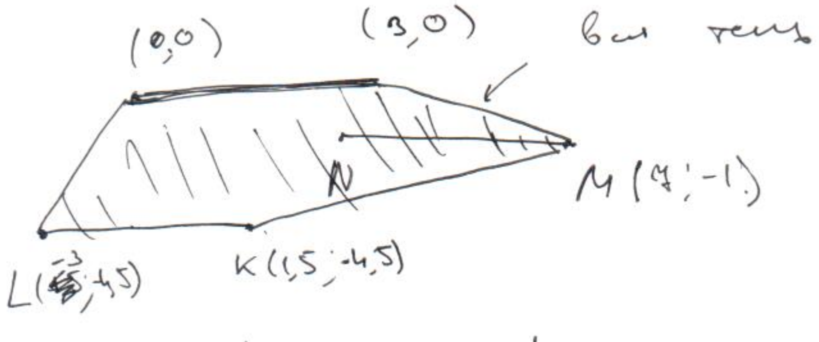
$\Rightarrow M(7; -1, 0)$

Аналогично, $N(-2,5; -1; 0)$



$K(1,5; -4,5; 0)$

$L(-3; -4,5; 0)$

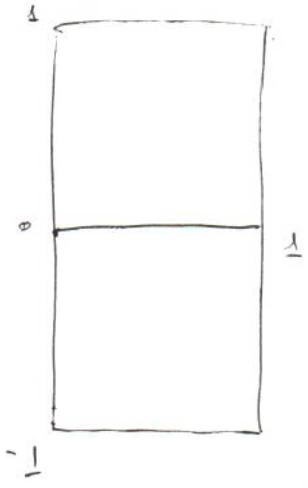


$S = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4{,}5 + 1{,}5\cdot 4{,}5 + \frac{1}{2}\cdot 4{,}5\cdot 5{,}5 - \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 4 =$

$= \frac{27}{2} + \frac{27}{4}$

черновик

Задача 4



$y = \sin 11\pi x$

$y = \sin 15\pi x$

$y = \sin 17\pi x$

Рассмотрим 2 из них

$y = \sin 11\pi x$ и $y = \sin 15\pi x$

Заметим, что $y = \sin 11\pi x$ будет пересекать отрезок $(0;1)$ в точках $0, \frac{1}{11}, \frac{2}{11}, \ldots, \frac{10}{11}, 1$, а $y = \sin 15\pi x$ в точках $0, \frac{1}{15}, \ldots 1$

черновик

12 111

⋮9 ⋮Σ

108 12 9 x

:9 → Σ ⋮9 или 18

117 13

A

14

15

черновик

$8x^2\log_a x - 2x - \log_x a \geq 0$

$8x^2\log_a x - 2x - \log_x a \cdot \log_a x \cdot 8 = 9$

$D_1 = 1 + \log_x a \cdot \log_a x$ $\quad x = \frac{1}{2\log_a x}$

$x = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{8\log_a x}$ $\quad x = -\frac{1}{4\log_a x}$ $\quad A = \pi z$

$a^{4x} =$

$81 \cdot 4 = 4$ $\quad 81 \cdot 2 = 162$

81 81 891 $\quad 81 \cdot 3 = 243$

$\sin 11\pi x = 0$ $\quad 81 \cdot 12 = 162$

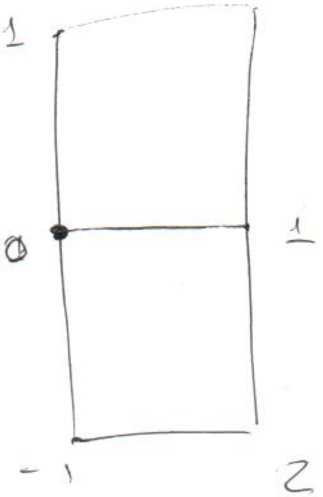
$\sin 15\pi x$

$\sin 17\pi x$ $\quad 81 \quad 972$

$11\pi x = \pi z$ $\quad \log_2 2 = 1$

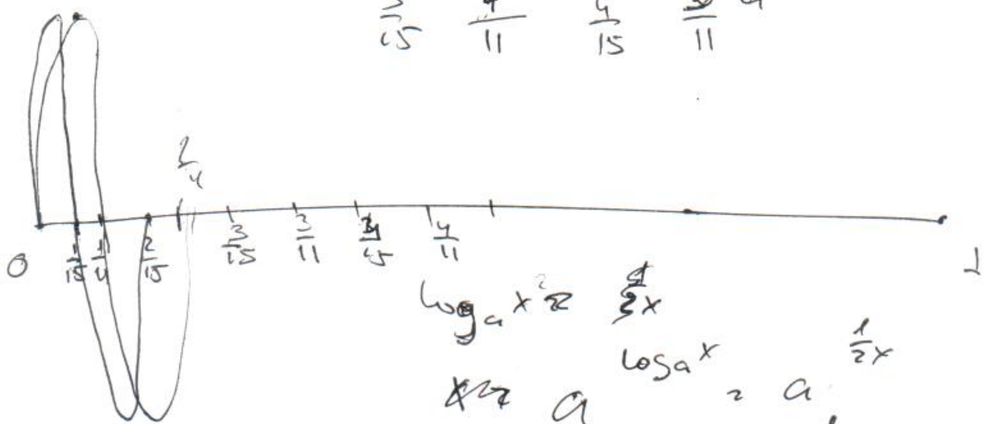
$11x = z$ $\quad 2^1 = 2$

$x = \frac{z}{11}$



$\frac{2}{15} < \frac{2}{11} < \frac{3}{15}$ $\quad \log_a 6 = c$

$\frac{3}{15}$ $\frac{4}{11}$ $\frac{4}{15}$ $\frac{3}{11}$ $\quad a^c = 6$



$\log_a x^2 = \frac{1}{2x}$

$x = a^{\log_a x} = a^{\frac{1}{2x}}$

$x = a^{\frac{1}{2x}} = \sqrt[2x]{a}$

$a^{\log_a x} = N$

$\log_a x \log_a a = \log_a N$

$N = x$

$\frac{1}{11}$ $\frac{2}{11}$ $\frac{5}{11}$

$\frac{1}{15}$ $\frac{2}{15}$

$\frac{4}{15}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{5}{15}$ $\frac{4}{11}$

Черновик

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad | \cos^2 x \quad | \sin^2 x$

$tg^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad ctg^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1$

$\frac{1}{ctg^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$

$8t^2 - 2t - 3 = 0$

$18 \cdot 6 = 108 \qquad 999 \,|\, 18 \qquad 333$

$D_1 = 1 + 24 = 25$

$x = \frac{1 \pm 5}{8} \qquad x = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

$x = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}$

9

A:

$\{$ 3 цифр 1 … 27

$12 \ldots 27 \times 9$

$6 \ldots 27 \times 18$

$\frac{5}{10 \cdot 11}$

$75 \cdot 75 = 825$

$25 + 275 = 275 \cdot 3 = 825$

$\frac{\pi}{9! \cdot 2!}$