0 011269 440001

01-12-69-44
(129.10)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 4

Место проведения Калининград
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Каминского Константина Евгеньевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«29» марта 2026 года

Подпись участника

Кт.

60 (Шестьдесят) групп

апелляция: 80 (восемьдесят)

01-12-69-44 (129.10)

№1 Чистовик

$\sqrt{6(1-ctg^2x}=4\cos x \Leftrightarrow \begin{cases}\cos x \geq 0\\ 6-6ctg^2x=16\cos^2x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos x\geq 0\\ 6-6ctg^2x=\frac{16ctg^2x}{ctg^2+1}\end{cases}$

Решим уравнение системы: Пусть $ctg^2x=t$, тогда $6-6t=\frac{16t}{t+1} \Leftrightarrow (3-3t)(t+1)=8t \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -3t^2+3-8t=0 \Leftrightarrow 3t^2+8t-3=0 \Leftrightarrow 3(t+3)(t-\frac{1}{3})=$

$=0 \Leftrightarrow (ctg^2x+3)(ctg^2x-\frac{1}{3})=0 \Leftrightarrow ctg^2x=\frac{1}{3} \Leftrightarrow ctg x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi k, k\in\mathbb{Z}$. Т.к. $\cos x\geq 0$, то подходит только $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$ ($x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi k, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k\\ x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi+2\pi k\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$, $\cos(\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k)=\frac{1}{2}$, $\cos(\pm\frac{\pi}{3}+\pi+2\pi k)=$

$=-\frac{1}{2}$)

Ответ: $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$

P.S. $tg^2x+1=\frac{1}{\cos^2x} \Rightarrow \cos^2x=\frac{1}{1+tg^2x}=\frac{1}{1+\frac{1}{ctg^2x}}=$

$=\frac{ctg^2x}{1+ctg^2x}$

№2

Докажем, что числа из множества A делятся на 81. Пусть x – число из A, а y – сумма его цифр. Тогда из условия $x=9ky$, где $k\in\mathbb{Z} \Rightarrow x \vdots 9$, но тогда $y\vdots 9 \Rightarrow y=9n$, где $n\in\mathbb{Z} \Rightarrow x=81kn \Rightarrow x\vdots 81$, ч.т.д.

Проверим какие из чисел 162, ~~81·3~~ 243, 81·4 324, ..., 972 входят в множество A (это все трёхзначные числа, которые делятся на 81). Очевидно это ~~162 : (1+6+2)~~ 162, 243, 324, 405, 486, ~~567~~ 648, 810, 972.

Ч. 324 + 486 + 810 = 1620

Ответ: 1620

№8

ОДЗ: $x\neq 1$, $x>0$

$3x^2\log_a x-\log_x a-2x\geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{3x^2-\log_x^2 a-2x\log_x a}{\log_x a}\geq 0 \Leftrightarrow$

огр на a: $a\neq 1$, $a>0$

см. на обороте

Чистовик Продолжение (№7)

$\Leftrightarrow \dfrac{(x\cdot\log_a x+1)(3x\cdot\log_a x-1)}{x\cdot\log_a x}\geq 0$ / : $x>0$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{(x\cdot\log_a x+1)(3\cdot x\cdot\log_a x-1)}{x\cdot\log_a x}\geq 0$ пусть $t=x\cdot\log_a x$.

$\dfrac{(t+1)(3t-1)}{t}\geq 0$ по методу интервалов:

$-\ +\ -\ +$; -1, 0, $\frac{1}{3}$, t $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}-1\leq x\cdot\log_a x<0\\ x\cdot\log_a x\geq\frac{1}{3}\end{array}\right.\\ x>0\end{cases}$

Заметим, что если $a\in(1;+\infty)$, то при $x>1$ $x\cdot\log_a x$ - монотонно возрастает, причём при $x\to+\infty$ $\Rightarrow$ $x\cdot\log_a x\to+\infty$ $\Rightarrow$ у неравенства $x\cdot\log_a x\geq\frac{1}{3}$ решением будет являться луч. Тогда $a\in(0;1)$. Рассмотрим $f(y)=y\cdot\log_a y$,

$f'(y)=\log_a y+\frac{1}{\ln a}=0\Leftrightarrow \log_a y=\log_a\frac{1}{e}\Leftrightarrow y=\frac{1}{e}$.

~~Заметим, что $y=\frac{1}{e}$~~ - $+\ -$; $\frac{1}{e}$, y $\Rightarrow$ $y=\frac{1}{e}$ - т. максимума.

Заметим, что если $x\in(1;+\infty)$, то $f(t)$ - убывает и при таких x $x\cdot\log_a x<0$, и т.к. $f(\frac{1}{a})=-\frac{1}{a}<-1$ и $f(t)$ - непрерывна $\Rightarrow$ решение первого неравенства это полуинтервал (при $x\in(0;1)$ решений нет, т.к. $x\cdot\log_a x>0$)

Рассматривая второе неравенство не трудно понять, что при $x\in(1;+\infty)$ - решений нет $\Rightarrow$ $x\in(0;1)$. Если $\frac{1}{e}\cdot\log_a\frac{1}{e}\geq\frac{1}{3}$, то решением неравенства будет отрезок, а если $\frac{1}{e}\cdot\log_a\frac{1}{e}<\frac{1}{3}$, то решений не будет, тогда $\frac{1}{e}\cdot\log_a\frac{1}{e}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\log_a\frac{1}{e}=\frac{e}{3}\Leftrightarrow \frac{-1}{\ln a}=\frac{e}{3}\Leftrightarrow \ln a=-\frac{3}{e}\Leftrightarrow a=e^{-\frac{3}{e}}$. ~~При таком~~

ответ $e^{-\frac{3}{e}}$

см. след лист

~~См. лист~~

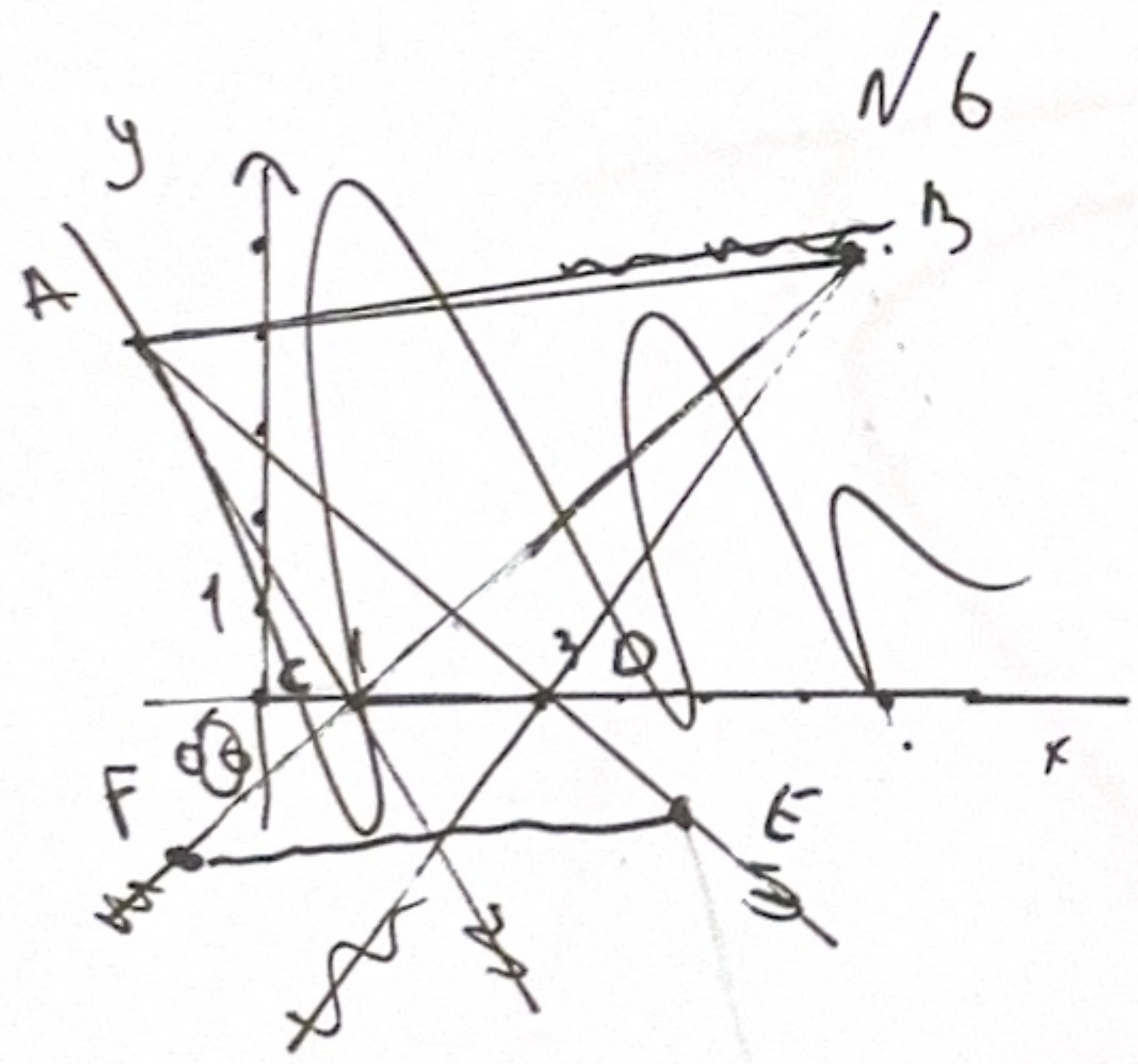
№3

Чистовик

Если два катета параллельны двум осям, то плоскость ~~в которой бу~~ треугольника параллельна одной из осевой плоскости, тогда и только тогда какая-то координата точек этого треугольника совпадает. Тогда выберем совпадающую координату и её значение всего способов так сделать $3\cdot 7=21$. Дальше выберем вершину прямого угла, всего целочисленных, не превосходящих 3 по модулю, точек ~~вершин~~ в выбранной плоскости: $7\cdot 7=49$. Очевидно оставшиеся две вершины, из которых в купе вершиной прямого угла, ~~ра~~ можно выбрать $(7-1)(7-1)=36$ способами (существует лишь $6\cdot 6$ целочисленных точек ~~не~~ лежащих на одной прямой с вершиной, при чём любая комбинация будет давать прямоугольный треугольник. Тогда по правилу произведения всего треугольников: $21\cdot 49\cdot 36=37044$.

Ответ: 37044

№6



см рис 2 CDEF – фигура ~~на~~, в которой хотя бы одна точка оказалась в тени забора. ~~найдём координаты E и F~~.

Т.к. высота полёта светлячка 6м, а забора 2м $\Rightarrow \frac{AD}{DE_1}=\frac{BC}{CF}=$
$=\frac{6}{2}=3$ (см. рис 1, $\triangle AHE \sim \triangle DH_1E$, ~~аналогично~~, ~~для получается для $\frac{BC}{CF}=\frac{6}{2}=3$~~ $\triangle BH_2F \sim CH_3F$.)

$\Rightarrow \frac{AD}{3}=DE \Rightarrow \frac{4\sqrt{2}}{3}=DE$, $CF=4\frac{\sqrt{41}}{3} \Rightarrow$

~~Ft~~ Заметим, пусть $AD\cap BC=L$, что $\triangle ALB \sim \triangle FLE \Rightarrow$ Т.к. через A и D проходит прямая $y=-x+3$ и через B и C (см. оборот

Чистовик

рис 2

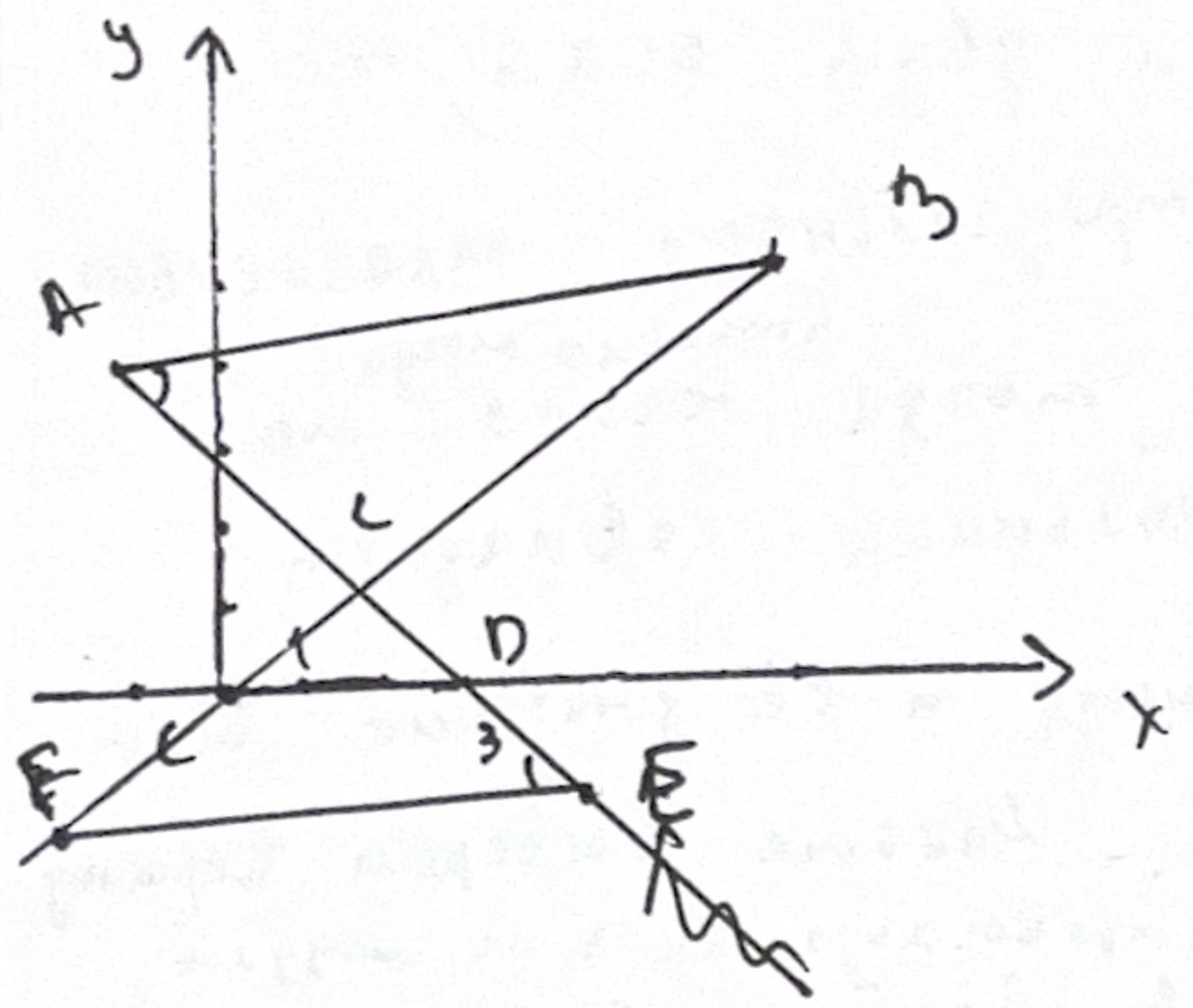
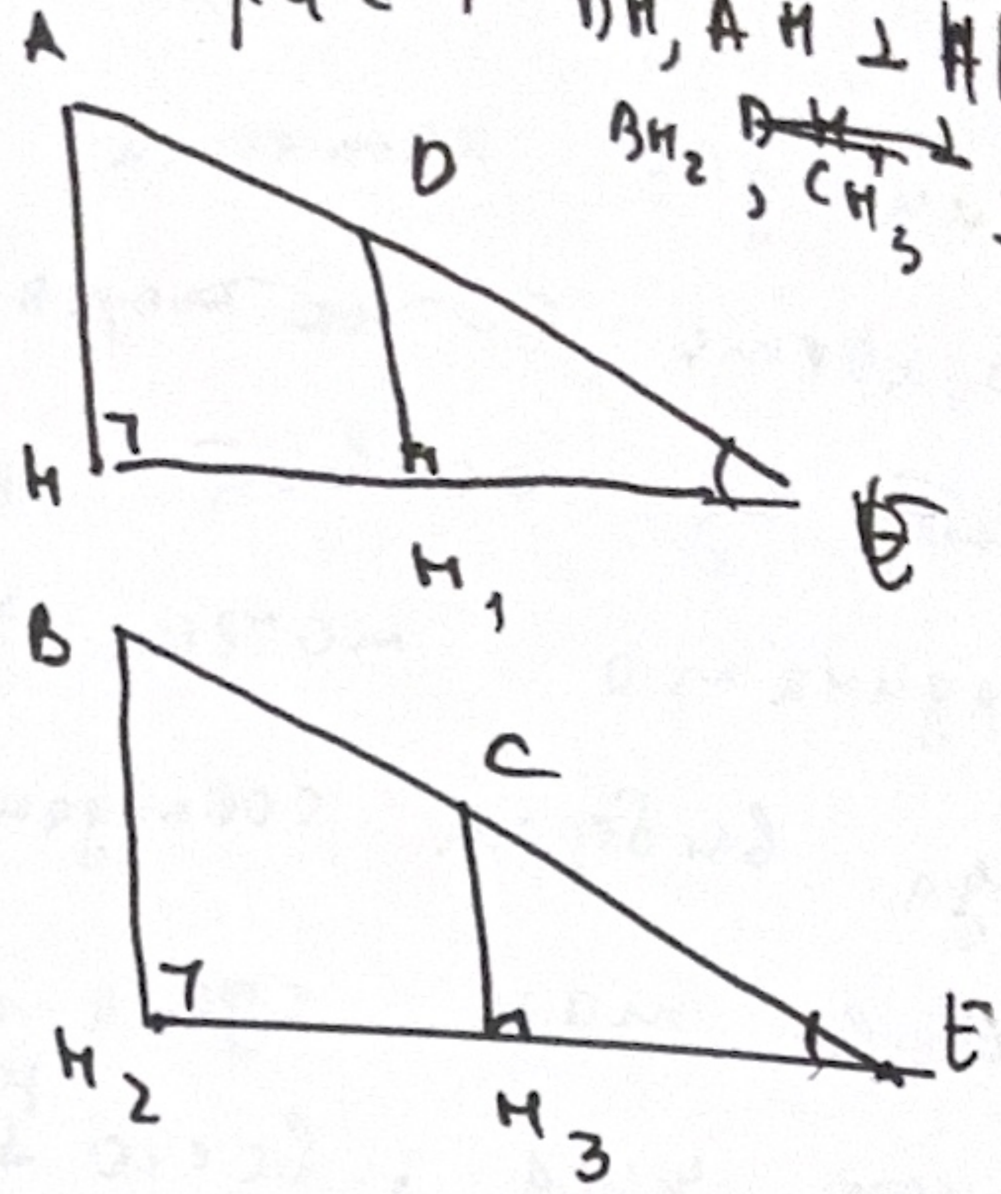


рис 1 $DH_1, AH \perp HH_1C$

$BH_2, CH_3 \perp HH_1C$



$y = \frac{5}{7}x \Rightarrow \frac{5}{7}x = -x + 3 \Rightarrow \frac{12}{7}x = 1 \Rightarrow x = \frac{7}{4} \Rightarrow$

~~$y = \frac{5}{4}$ — точка пересечения AD~~ $C\left\{\frac{7}{4}; \frac{5}{4}\right\}$.

Тогда $CA = \sqrt{\left(\frac{7}{4}+1\right)^2 + \left(4+\frac{5}{4}\right)^2} \Rightarrow CD = DA - CA$.

$S_{CDEF} = S_{\Delta ACB} \cdot \frac{CE}{AE} - S_{\Delta} S_{CCD}$.

$CE = CD + DE$. $\qquad \vec{CA} = \left(\frac{3}{4};\right.$

$S_{\Delta ACB} =$

черновик

$7 \cdot 7^2 \cdot 6^2$

$21 \cdot 49$

$980 + 49 = 1000 + 29 = 1029$

$$\begin{array}{r} 1029 \\ \times \quad 36 \\ \hline 6174 \\ 13087 \\ \hline 37044 \end{array}$$

$x_1 -$

$0;3$

$(-1;4)$

$y = cx^2 + a$

$c > 0$

$y = kx + b$

$2a + cl^2 = \frac{1}{2}$

$cl^2 = l$

$cl = 1$

$4x + 3$

$a + l = \frac{1}{2}$

~~$2l + a = \frac{1}{2}$~~

~~$2l = \frac{1}{2}$~~

$y = -x + 3$

$l = \frac{1}{4}$

$a + \frac{c}{16} = \frac{1}{2}$

$y = -x + 3$

$81 - 32$

$\sqrt{x^2 + (x-3)^2} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$

$2x^2 - 6x + 9 - \frac{32}{9} = 0$

Z

Черновик

$3x^2\log_a x - \frac{1}{\log_a x} - 2x \geq 0$ $\quad a \in (1;+\infty)$ $\quad \frac{1}{4} \quad 2$

$x >$ $\quad \log$

$3x^2\log_a x - 2\log_a x \cdot x - 1 \geq 0$ $\quad \log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2}}$

$3x^2y^2 - 2xy - 1 \quad xy(3x - 2) - 1 \quad y \geq 0 \quad x \in (0;1) \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$

$\cancel{y(3x^2}$ $\quad 3yx^2 - 2yx - 1 \quad y(3x^2 - 2x) - 1 \geq 0$

$y \geq \frac{1}{3x^2-2x}$

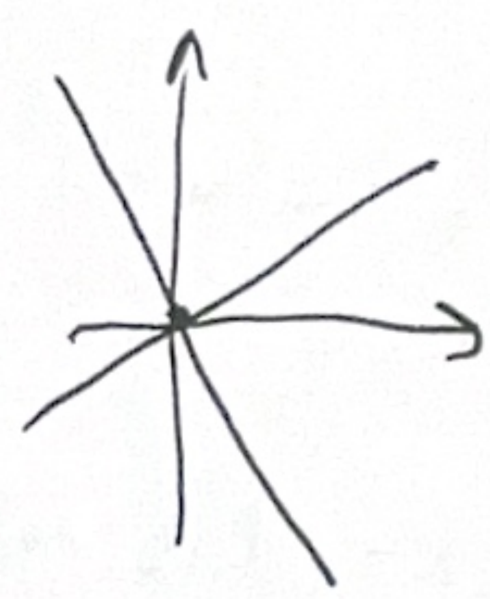
$4x^2y^2 - (xy-1)\frac{y^2(3x^2-2x) - 1}{y}$

$y \leq 0$

$\frac{(xy+1)(3xy-1)}{\cancel{3x^2 - 2x\, y - \frac{1}{y}}} \geq 0$ $\quad y \leq \frac{1}{3x^2-2x}$

$\left(0; \frac{2}{3}\right)$ $\quad \log_x a$

$\left[\begin{array}{l} \log_x a < -5x \\ \begin{cases} \log_x a \leq 3x \\ \log_x a > 0 \end{cases} \end{array}\right.$ $\quad a \in (0;1)$ $\quad \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}}$



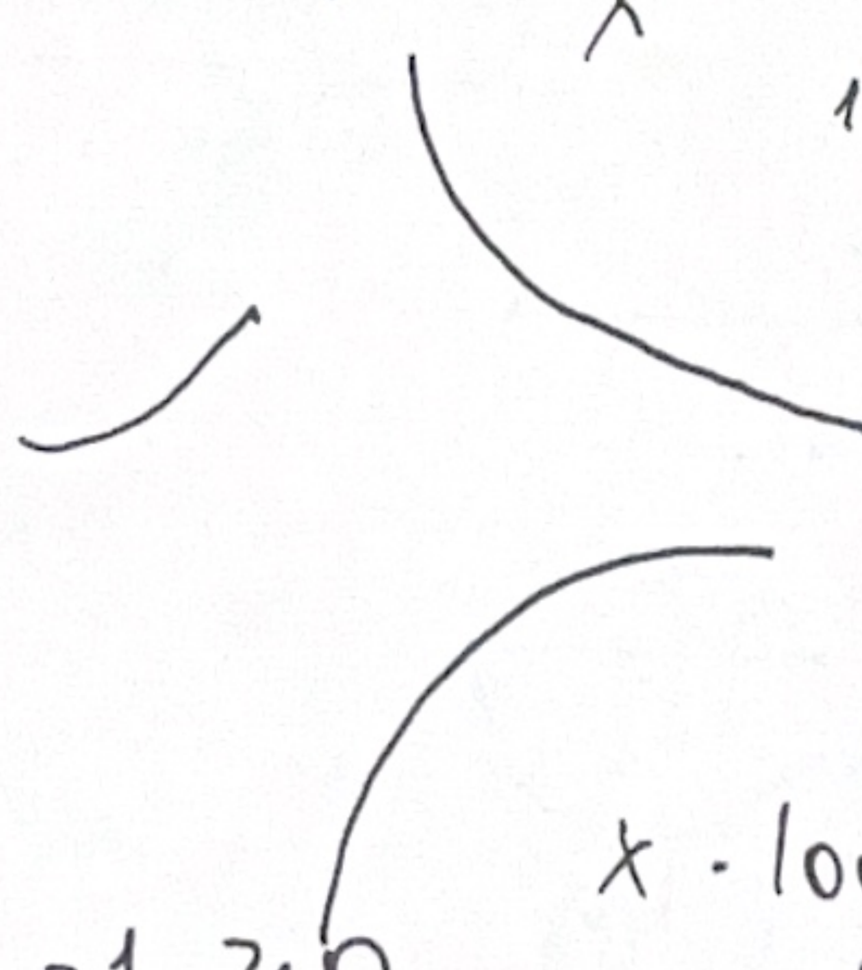
x^{-5x}

$x \in (0;1)$

x^x

$1 + \infty$

$\log_x a < -5x$



$x \in (0,1)^x$

$x \cdot \log_a x$

$3x\log_a x - 1 \geq 0$

$x \in (1;+\infty)$ $\quad e \cdot \log_a e$

$\log_a x \geq 3x$

$x \geq a^{3x}$

Z

Черновик

$9 \quad 1 + ctg^2 x = \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x}$

$1 + tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

$6 - 6\,ctg^2 x = 16\cos^2 x$

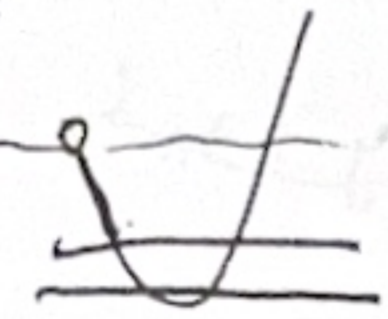
$\cos^2 x = \frac{1}{1+tg^2 x} \quad 16\,ctg^2 x$

$\frac{1}{y}$ $\quad a \neq 1$

$a > 0$ $\quad ctg^2 x + 1$

$3x^2 \cdot \log_a x \quad - \log_x a - 2x$

$\frac{16}{1+tg^2 x}$



$\frac{3x^2}{y} - y - 2x \quad \geq 0 \quad \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \pm \frac{\pi}{3}$

$81k \quad x \in (0,1) \quad \geq 0 \quad :81 \quad x > 0$

$(x \cdot \log_a x)' - \quad \frac{81}{+12}{162} \quad 3x^2 - y^2 \; :9 \quad \frac{-2xy}{y}$

$\log_a x + \frac{x}{x \cdot \ln a} \Rightarrow x = e \quad \frac{+81}{972}$

162 +	486 + 81 = 567	
243 +	567 + 81 = 648	
324 +		
405 +		$\frac{2}{11}$
486 +	648 + 81 = 729	$a \in (0;1)$
567 −		$x \in (0,1)$
648 +		
729 −	729 + 81 = 810	
810 +		
891 −		
972 +		

(m, k, n)

$4x^2 - (y+x)^2$

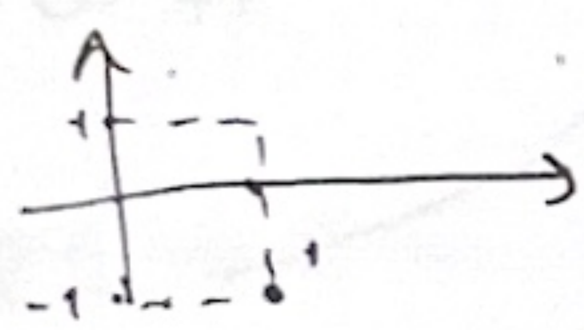
$x \cdot \log_a x$

3

$\left[\begin{array}{l} a < x^{-5x} \\ a \leq x^{3x} \end{array}\right.$

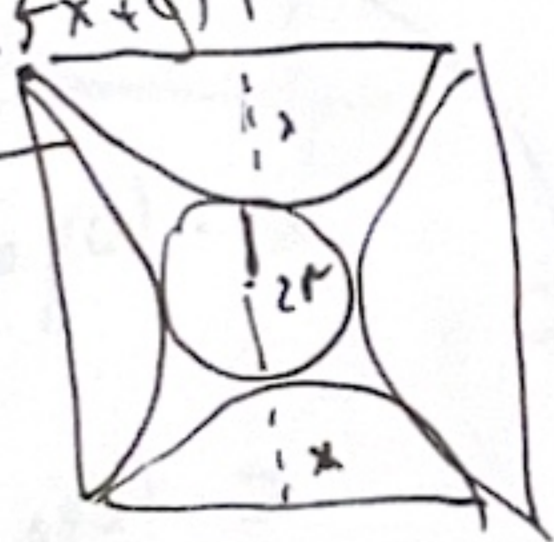
$\frac{(3x-y)(5x+y)}{y}$

$(3x - y)(5x - y)$



$\geq 0 \quad \sin 11\pi x$

$\frac{(3x-y)(5x+y)}{y} \quad 1$



$11\pi(x+k) = 11\pi x + 2\pi k$

$2r + 2x = 1$

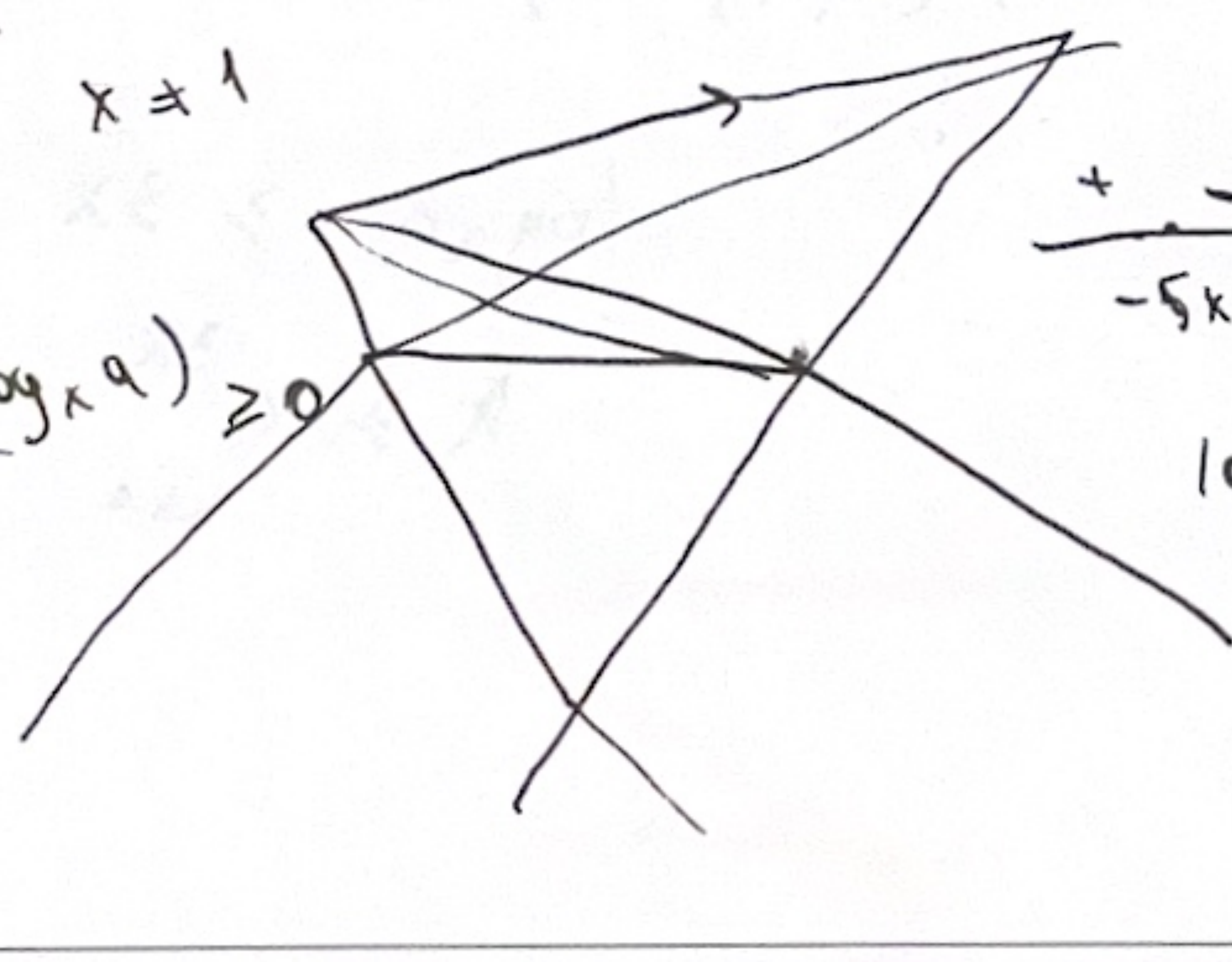
$3x - \log_x a \geq 0$

$r + x = \frac{1}{2}$

$x \neq 1$

$C x^2 > 0$

$\frac{(3x - \log_x a)(5x + \log_x a)}{\log_x a} \geq 0$



$+ \quad - \quad + \quad -$

$-5x \quad 0 \quad 3x \quad 5y$

$\log_x a < -5x$

$\log_x a > 0$

$\log_x a \leq 3x$

Повысить оценку
на 20 баллов
(старая оценка - 60 б.,
новая оценка - 80 б.)

Председателю апелляционной комиссии
олимпиады школьников «Ломоносов»
Ректору МГУ имени М.В. Ломоносова
академику В.А. Садовничему
от участника заключительного этапа по
профилю Математика
Каминского Константина Евгеньевича

Апелляция.

Прошу пересмотреть мой индивидуальный предварительный результат заключительного этапа, а именно 60 баллов, поскольку считаю, что в задаче № 8 приведено верное рассуждение, полностью соответствующее первому пункту критериев (учет параметров и логика решения неравенства). Допущенная техническая ошибка при факторизации (ошибка в знаке) прямо подпадает под определение "арифметической ошибки в выкладках", за которую предусмотрена оценка "±", а в задаче № 6 описывающий тень многоугольник найден верно. Прошу пересмотреть выставленный балл (0).

Подтверждаю, что я ознакомлен с Положением об апелляциях на результаты олимпиады школьников «Ломоносов» и осознаю, что мой индивидуальный предварительный результат может быть изменён, в том числе в сторону уменьшения количества баллов.

Дата 23.04.2026 Кт. (подпись)