0 166047 350000

16-60-47-35
(124.1)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 1

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Кармаксвой Марии Алексеевны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«___» 29. 03. 2026 года

Подпись участника

КМариа

16-60-47-35
(124.1)

Черновик

① $\sqrt{6(1-tg^2x)} = 4\sin x$

$ctg^2x + tg^2x = 1$ $\qquad 4\sin x = \cancel{4\sin x}\ 2\sin^2 x \cdot 2\cos^2 x$

$\Rightarrow ctg^2x = 1 - tg^2x$ $\qquad 2\sin x = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$\sqrt{6ctg^2x} = 2\sin^2 x \cdot 2\cos^2 x$

| $\cos 2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$
| $\cos\alpha = \cancel{2\cos\alpha - \sin\alpha}$
| $\cos\alpha = 2\cos\alpha - 1$

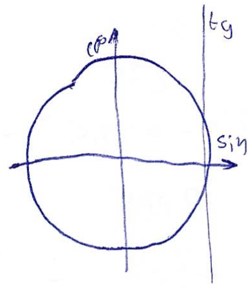
$\sqrt{6ctg^2x} = 2(\sin^2x \cdot \cos^2x)$

$tgx = \frac{\sin x}{\cos x}$ $\qquad ctgx = \frac{\cos x}{\sin x} = ctg^2x = \frac{\cos^2x}{\sin^2x}$

$\Rightarrow \sqrt{6\frac{\cos^2x}{\sin^2x}} = 2(\sin^2x \cdot \cos^2x)$

$6\frac{\cos^2x}{\sin^2x} = 4(\sin^2x \cdot \cos^2x)$

$6\frac{\cos^2x}{\sin^2x} = 4\sin^2x \cdot 4\cos^2x$



$6\frac{\cos^2x}{\sin^2x} = \frac{4\sin^2x \cdot 4\cos^2x}{1}$

$6\cos^2x = 4\sin^2x \cdot 4\cos^2x(\sin^2x)$

$6\cos^2x = 4\sin^2x \cdot$

9 { ~~18~~ 9, 36, 63; 18, 45, 72; 27, 54, 81

117
216
315
414
513
612
711
810

~~9~~ 909
108

$\Leftarrow$

111 - 3	211	311
112 - 4	212	312
113 - 5	213	313
114 - 6	214	314
115 - 7	215	315
116 - 8	216	316
117 - 9	217	317
118 - 10	218	318

② Пусть в множество A входят все натуральные числа при делении на сумму своих цифр дают целое число, кратное 9.

$\Rightarrow$ число > 10 + число > 100 (трехзн.)

Тогда натуральное число > 10

Найти: трехзначное число

$\Rightarrow$ натуральное число > 100

$x \in [100; 999]$, $x \in [990; 999]$

Т. Безу: остаток от деления $P(x)$ на $(x-a)$ равен $P(a)$

кратное 9:

11 - 2	15 - 6	21 - 3
12 - 3	17 - 8	22 - 4
14 - 5	18 - 9	23 - 5
13 - 4	19 - 10	24 - 6

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Черновик

9 { 18 27 36 45 54 63 72 81 90

108
117
126
135
144
153
162
171
180

18 { 36 72 54 90 216

108 144 180
126 162 198

110 990 → 111 999

216
225
234
243
252
261
270

108 → 117 → 126 → 135 → 144

117 + 144 = 261

261 + 990 = 1251

1251

③

$x \leq |4|$

Пусть F - множество точек в пространстве, а координаты - целые числа, которые $\leq |4|$

Найти: n/y Δ, вершины $\in F$

⑧ $8x^2\log_a x - \log_x a - 2x \leq 0$

при каких значениях параметра a множество решений неравенства состоит из полуинтервала и точки $\notin$ полуинтервалу и не является его концом

$8x^2\log_a x + \log_a x - 2x \leq 0$

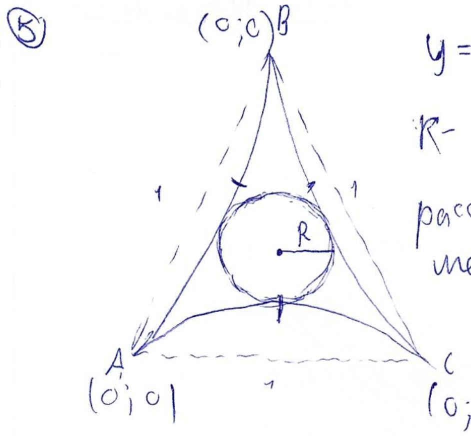
$8x^2 + 2\log_a x - 2x \leq 0$

$8x^2\log_a x + \log_a x \leq 2x$

16-60-47-35
(124.1)

Черновик

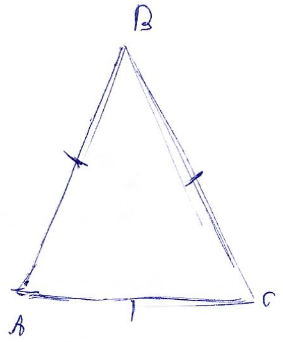
(5)



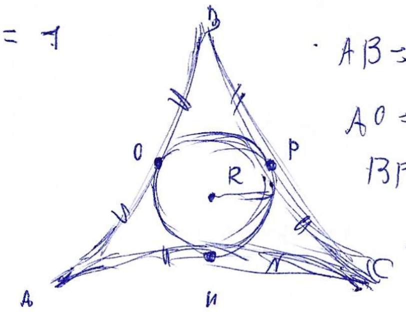
$y = Cx^2$

R - ?

расстояние между A, B, C = 1



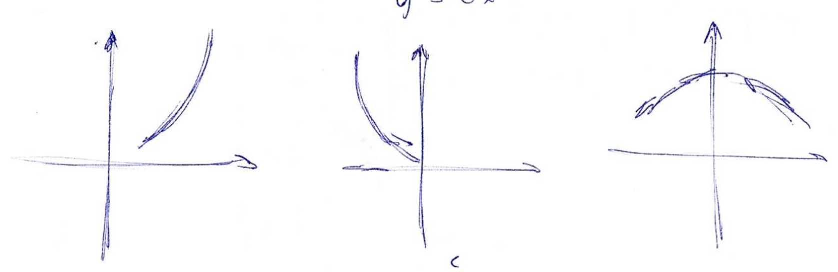
[C = 1



$AB = BC = AC$ (р/с Δ)

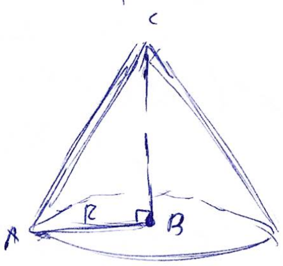
$AO = OB$
$BP = PC$
$AH = HC$]

$y = Cx^2$



$C = \Pi R^2$

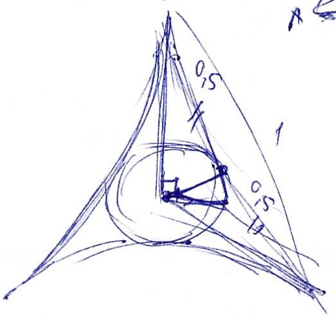
R^2 - ?

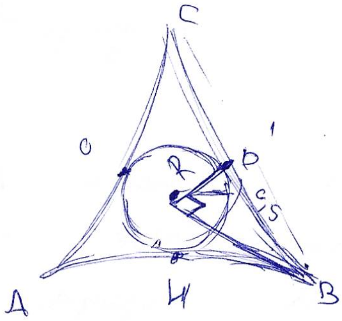


$AB = R$

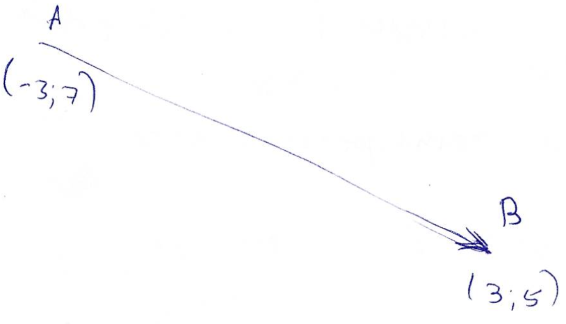
~~ΔABC~~

ΔABC - п/у



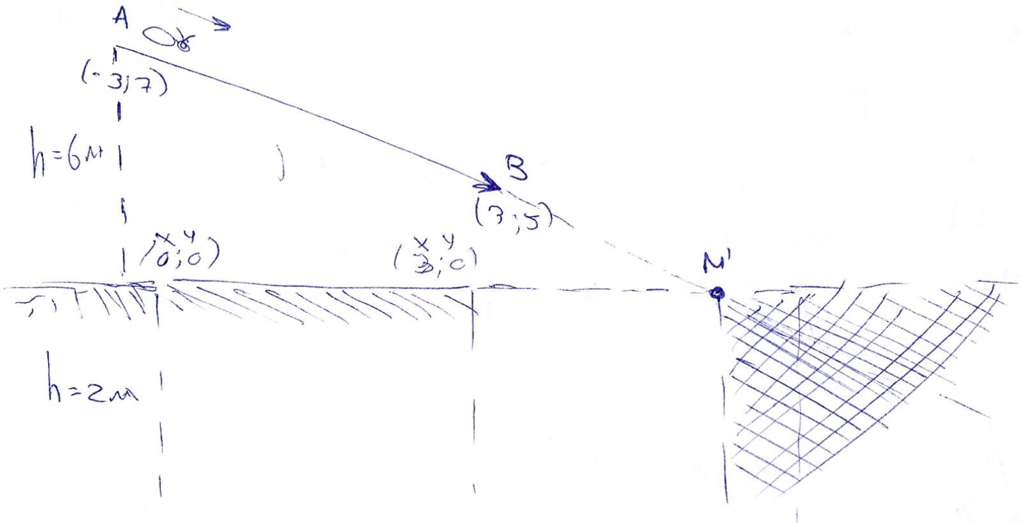


(3)



AH = 2 метра
высота 3 забора
AB - const h

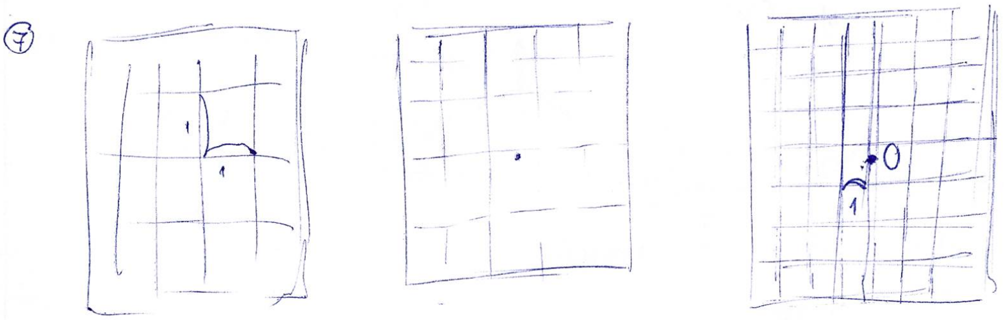
Черновик



M' – точка на земле затемненная

Найти: S пустыря, оказавшейся затемненной

7



(высота х ширина)
210 х 297 мм

Дано

Пусть у старой тетради линии сетки являются параболами $y = \frac{\pm x^2}{2} + c$, где $c \in \mathbb{Z}$.

Тогда начало системы координат в точке O, а ее оси параллельные его сторонам, а единичный отрезок равен 1 см

Размер тетрадной страницы $(a \times b) = 210 \times 297$

Найти наибольшую S четырехугольника

16-60-47-35
(124.1)

Черновик

(4) $0 \le x \le 1$, $y = \sin k\pi x$

$-1 \le y \le 1$ $k \in \{13; 15; 17\}$

Найти: на сколько непересекающихся областей окажется разделена данная полоса

$\sin 13\pi x = \sin 15\pi x = \sin 17\pi x$ (рис.2)

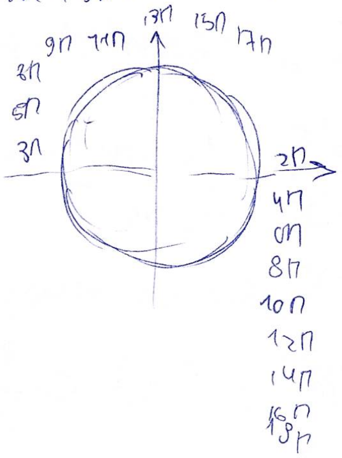
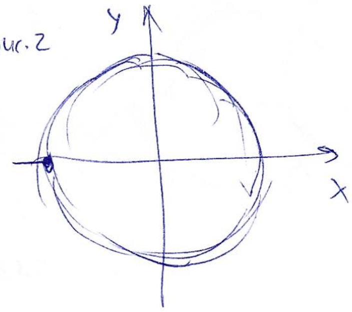


рис.2



$\left[\begin{array}{l} x \in [0; 1] \\ y \in [-1; 1] \end{array}\right.$

(2) $\sqrt{6(1-\text{tg}^2 x)} = 4\sin x$

$\sqrt{6\,\text{ctg}^2 x} = 2\sin^2 x \cdot 2\cos^2 x$

$\sqrt{6 \cdot \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}} = 2\sin^2 x \cdot 2\cos^2 x$

$\sqrt{\frac{6\cos^2 x}{\sin^2 x}} = 2\sin^2 x \cdot 2\cos^2 x$

$\frac{6\cos^2 x}{\sin^2 x} = 4\sin$

$\text{tg}\,x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$\text{ctg}\,x = \frac{\cos x}{\sin x}$

$2\sin\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos^2\alpha$

$2\sin\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$

$4\sin\alpha = 2\sin\alpha \cdot 2\cos\alpha$

$\sqrt{6\,\text{ctg}^2 x} = 2\sin x \cdot 2\cos x$

$6\,\text{ctg}^4 x = 4\sin^2 x \cdot 4\cos^2 x$

$6\,\text{ctg}^4 x = 4(\sin^2 x \cdot \cos^2 x)$

$6 \cdot \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = 4(\sin^2 x \cdot \cos^2 x)$

$\frac{6\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{4\sin^2 x \cdot 4\cos^2 x}{1}$

$6\cos^2 x = 4\sin^2 x \cdot 4\cos^2 x \cdot \sin^2 x$

$6\cos^2 x = 4\sin^4 x \cdot 4\cos^2 x$

Черновик

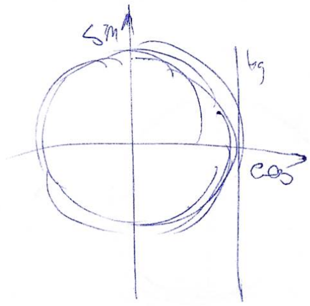
$\sqrt{6(1-tg^2x)}=4\sin x$

$\begin{cases}1-tg^2x=ctg^2x\\ ctg^2x+tg^2x=1\end{cases}$

$\Rightarrow \sqrt{6\,ctg^2x}=2\sin x 2\cos x$

$\begin{cases}4\sin x=2\sin x 2\cos x\\ 2\sin x=2\sin x\cos x\end{cases}$

$\sqrt{6\frac{\cos^2x}{\sin^2x}}=4\sin x$



$6\frac{\cos^2x}{\sin^2x}=16\sin^2x$

$\frac{6\cos^2x}{\sin^2x}=\frac{16\sin^2x}{1}$

$16\sin^2x\cdot\sin^2x=6\cos^2x$

$16\sin x(\sin x\cdot 1)=6\cos^2x$

$16\sin x=6\cos^2x$

② 9 $\begin{cases}108\\117\\126\\135\end{cases}$
144
153
162
171
180

sux

$x\in[100;999]$

I - 117 $(1+1+7)=9$

IV - 144 $(1+4+4)=9$

предпоследнее - $[990;999]$ $\Rightarrow (9+9+0)=18$

$108 \,|\, 18$, 108, 6, 0

118, 5, 9

$\Rightarrow$ $117+144=261$

861, 990, 1161

$117+144=261$

$261+990=1251$

⑧ $8x^2\log_a x-\log_x a-2x\le 0$

$8x^2\log_a x+\log_a x-2x\le 0$

$8x^2\log_a x=0$

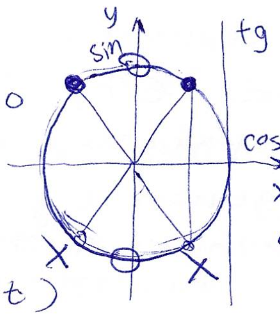
Чистовик

① $\sqrt{6(1-tg^2x)} = 4\sin x \quad \sin x \geq 0 \quad x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$

$1 - tg^2x = ctg^2x \qquad 4\sin x = 2\sin x \cdot 2\cos x \qquad \cos^2x = 1 - \sin^2x$

$ctg^2x + tg^2x = 1 \qquad 2\sin x = 2\sin x \cdot \cos x$

$\sqrt{6\, ctg^2x} = 2\sin x \cdot 2\cos x$



$t_1 = \frac{3}{4}$

$t_2 = -\frac{1}{2} \quad \varnothing$

$ctg x = \frac{\cos x}{\sin x} \qquad 6 - 6\,\frac{1-\cos^2x}{\cos^2x} = \quad t \geq 0$

$tg x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad = 16(1-\cos^2x) \qquad \cos x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

$6 - 6\,\frac{1-t}{t} = 16(1-t)$

$16t^2 - 4t - 6 = 0$

$\sqrt{6 \cdot \frac{\cos^2x}{\sin^2x}} = 2\sin x \cdot 2\cos x$

$\sqrt{6 \cdot \frac{\cos^2x}{\sin^2x}} = 2(\sin x \cdot \cos x)$

Ответ: $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$

$x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$

② Дано:

Пусть в множество A входят все такие натуральные числа, которые при делении на сумму своих цифр дают целое число, кратное 9, и являются трехзначными.

Найти: все трехзначные числа $\in A$; сумму второго, пятого и предпоследнего

Тогда n-ое число $\in [100; 999]$

Пусть N - такое число $N = 9k \cdot S$, где S - сумма цифр

Решение:

$N \vdots 9 \Rightarrow$ по признаку делимости на 9 $S \vdots 9 \Rightarrow N \vdots 81$

✓162 ✓486 ✓810
✓243 ~~564~~ ~~891~~
✓324 ✓648 ✓972
✓405 ~~729~~

$9 \begin{cases} 108 & 144 & 180 \\ 117 & 153 & \\ 126 & 162 & \\ 135 & 171 & \end{cases}$

$\Rightarrow$ второе число: 243

пятое число: 486

предпоследнее число

$\Rightarrow$ предпоследнее число: 810 ✓

$\Rightarrow$ 243 + 486 + 810 = 1539

$$\begin{array}{r} +243 \\ 486 \\ 810 \\ \hline 1539 \end{array}$$

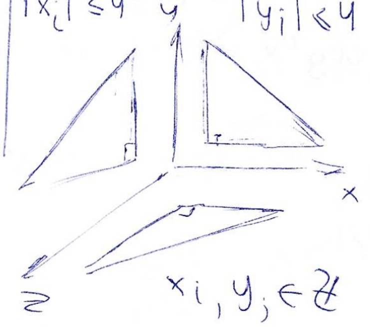
Ответ: 1539

③ Дано:

Пусть F - множество точек в пространстве, все координаты которых являются целыми числами, не превосходящими |4|, тогда все вершины прямоугольных треугольников $\in F$, а каждый из катетов параллелен одной из трех координатных осей.

Найти:

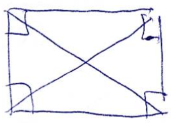
П/у треугольники $|x_i| \le 4$ и $|y_i| \le 4$

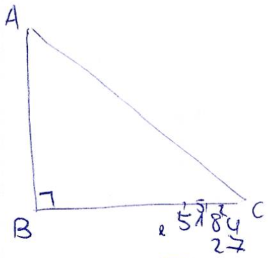


$x_i, y_i \in \mathbb{Z}$

Решение: Рассмотрим плоскости $\parallel z=0$ => 9верт + 9гориз. прямых

4





A, B, C - вершины п/у $\triangle ABC$

A, B, C $\in$ F

$C_n^k = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$

AB // одной из трех координатных осей

BC // одной из трех координатных осей

$5184 \cdot 27$: $36288 + 10368 = 139968$

$(C_9^2) = \dfrac{9!}{2!\cdot 7!} = \dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot \cancel{5}\cdot \cancel{6}\cdot \cancel{7}\cdot 8\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 1\cdot \cancel{7}\cdot \cancel{6}\cdot \cancel{5}\cdot \cancel{4}\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{2}\cdot \cancel{1}}$

$(C_9^2)^2 = 36^2 = (35+1)^2 = 1225+1+70 = 1296$

$1296\cdot 4 = 4000+800+360+24 = 5184$

Ответ: 139968

④ Дано:

$0 \le x \le 1$, $-1 \le y \le 1$

$y = \sin k\pi x$

$k \in \{13, 15, 17\}$

$\sin 13\pi x = \sin 15\pi x$

$2\cos(14\pi x)\sin(-\pi x) = 0$

$14x = \frac{1}{2}+n$ $x = 0, 1$

$x = \dfrac{\frac{1}{2}+n}{14}$ 14

$\sin 13\pi x = \sin 17\pi x$

$\sin(2\pi x)\cos(15\pi x) = 0$

$x = 0, \frac{1}{2}, 1$ $x = \dfrac{\frac{1}{2}+n}{15}$ 15

Найти:

На сколько непересекающихся областей окажется разделена полоска

$0 \le x \le 1$, $-1 \le y \le 1$

$\sin 15\pi x = \sin 17\pi x$

$\sin \pi x \cos 16\pi x = 0$

$x = 0, 1$ $x = \dfrac{\frac{1}{2}+n}{16}$ 16

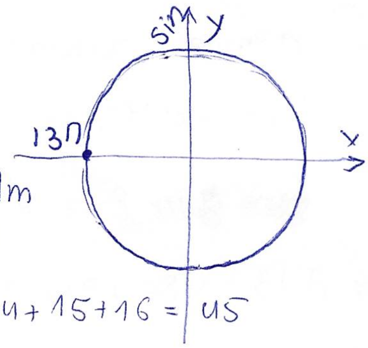
Решение:

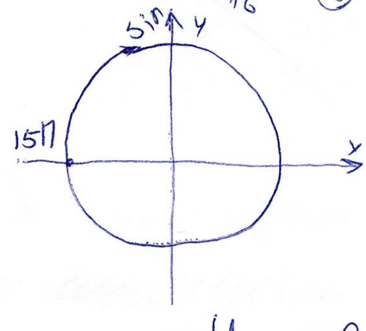
$k \in \{13; 15, 17\}$

Если $\sin k\pi x = 1$ или -1

$k\pi x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m$ $k\pi x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi m$

$x = \dfrac{1+4m}{2k}$ $x = \dfrac{4m-1}{2k}$

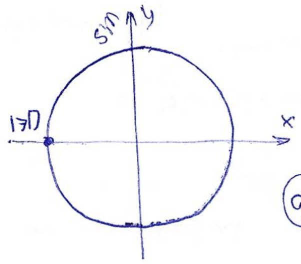




$k=13 \Rightarrow 13$ $k=17 \Rightarrow 17$ $14+15+16 = 45$

$k=15 \Rightarrow 15$

Чистовик



93

$y = -1 \Rightarrow 21$
$y = 1 \Rightarrow 23$

Чистовик

такие углы, что есть 45 внутр. пересечений
суммируя все: 93

Ответ: 93

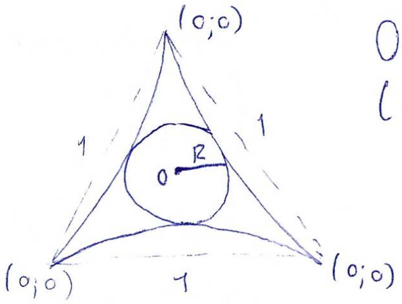
5 Дано:

Пусть три графика параболы $y = Cx^2$ повернули и получили равносторонний симметричный треугольник с нулевыми углами, тогда расстояние между соседними вершинами равно 1

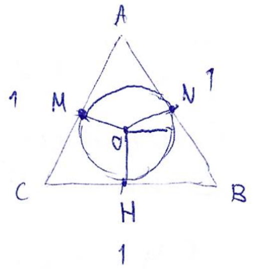
Найти:

R - ?

Решение:



O - центр
C - 1



△ABC - р/с
AB = BC = AC

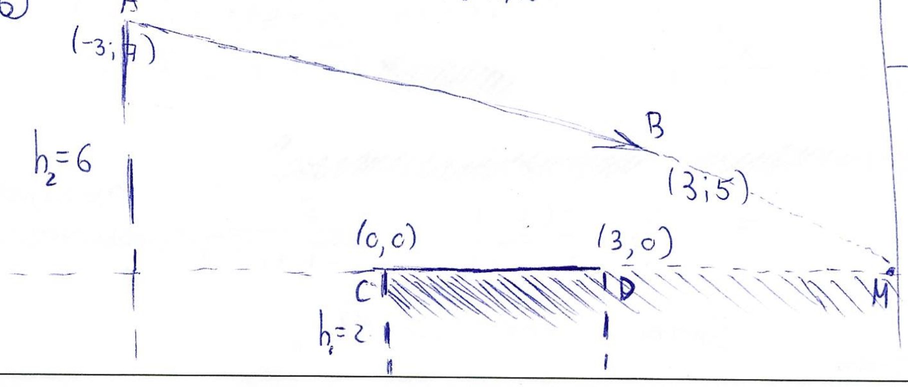
M - середина AC
N - середина AB
H - середина BC

OM, ON, OH - радиусы
⇓
AM = MC; AN = NB; CH = HB

R - радиус окружности
$C = \Pi R^2$

Ответ:

6 Дано:



Найти:

S пустыря зат. т.

Пусть: высота сплошного забора = 2 метра, Чистовик
тогда постоянная высота светлячка =
= 6 метров.

Тогда точка M является затененной точкой на земле.

A (-3,7)
B (3,5) => AB(6; -2) - полное расстояние полета светлячка

C (0,0)
D (3,0) => CD(3; 0) - полное расстояние забора

(8) Ответ:

(7) Дано:

Пусть мальчику досталась тетрадь, у которой линии сетки являются параболами вида $y = \pm \frac{x^2}{2} + c$, где $c \in \mathbb{Z}$, а система координат в которой написаны уравнения, имеет начало в центре листа, её оси параллельны его сторонам

Тогда единичный отрезок = 1 см, а размер тетрадной страницы $(a \times b) = 210 \times 297$ мм

Найти

$S_{\text{наибольшее}}$

$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 \\ y = 1 - \frac{1}{2}x^2 \end{cases}$

$\frac{1}{2}x^2 = 1 - \frac{1}{2}x^2$

$x^2 = 1 \quad x = \pm 1$

$S_4 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1$

(диагонали $\perp$-ны)

Решение:

$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 \\ y = -\frac{1}{2}x^2 + 1 + c \end{cases}$

$\frac{1}{2}x^2 = -\frac{1}{2}x^2 + 1 + c$

$x^2 = c + 1$

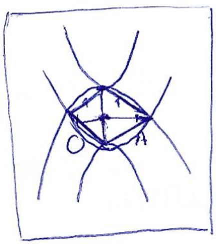
$x_1 = \sqrt{c+1}$

$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 + 1 \\ y = -\frac{1}{2}x^2 + c \end{cases}$

$\frac{1}{2}x^2 + 1 = -\frac{1}{2}x^2 + c$

$x^2 = c - 1$

$x_2 = \sqrt{c-1}$



O - центр листа

OA - 1 см

1 клетка (1×1)

$y = \pm \frac{x^2}{2} + c$,

$x_1 - x_2 = \sqrt{c+1} - \sqrt{c-1} \Rightarrow d = \frac{(\sqrt{c+1} - \sqrt{c-1})(\sqrt{c+1} + \sqrt{c-1})}{\sqrt{c+1} + \sqrt{c-1}} =$

$= \frac{(c+1) - (c-1)}{\sqrt{c+1} + \sqrt{c-1}} = \frac{2}{\sqrt{c+1} + \sqrt{c-1}}$ - функция убывающая

$\left[\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1 \end{array}\right.$, по условию

Значит макс. $S_4 = 1$

⑧ Чистовик

$8x^2\log_a x - \log_x a - 2x \le 0$

ОДЗ: $x \ne 1$, $a > 0$, $a \ne 1$, $x > 0$

$\log_a x = \frac{1}{\log_x a}$; $-\log_x a = \frac{1}{\log_a x}$

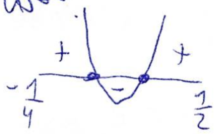
$\log_a x \to t \Rightarrow x = a^t$

$8a^{2t}t^2 - 2a^t t - 1 \le 0$ при $t > 0$

$8a^{2t}t^2 - 2a^t t - 1 \ge 0$ при $t < 0$

$f(t) = 8a^{2t}t^2 - 2a^t t - 1$ $\quad u = a^t \cdot t$

$f(u) = 8u^2 - 2u - 1$ $\quad f(u) = 8(u - \frac{1}{2})(u + \frac{1}{4}) \Rightarrow f(u) = (2u-1)(4u+1)$



$a^t \cdot t \nearrow (0, +\infty)$ $\quad a^t t = \frac{1}{2}$

$(-\infty, 0)$ min в $\frac{-1}{\ln a} \Rightarrow -\frac{1}{e\ln a}$ $\quad \exists!$ корень $t > 0$

$a^t t = -\frac{1}{4}$ $\quad e\ln a = 4$ $\quad \exists!$ корень

Ответ: $a = e^{4/e}$