72-34-74-50
(128.6)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 10

Место проведения Санкт - Петербург
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Каронова Михаила Эдуардовича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«29» марта 2026 года

Подпись участника

Каронов

 70 (семьдесят)

72-34-74-50 (128.6)

Черновик

$\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2} \geq \sqrt{ab}$ $a=b$

a, b, c - разл.

$\underbrace{\frac{ab}{2} \cdot c}_{\checkmark} + \frac{ab}{\cancel{2}} + bc + ac + \sqrt{a^2+b^2}\, c + 2a + 2b + 3c$
$+ 2\sqrt{a^2+b^2} = 2026$

$c(a+b) \geq c \cdot 2\sqrt{ab}$ $2a+2b \geq 4\sqrt{ab}$

$\sqrt{a^2+b^2}\, c \geq \sqrt{2ab} \cdot c$ $2\sqrt{a^2+b^2} \geq 2\sqrt{2ab}$

$ab \cdot \frac{c}{2} + ab + 2c\sqrt{ab} + \sqrt{ab} \cdot c\sqrt{2} + 4\sqrt{ab} + 3c + 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{ab} \leq 2026$

$ab\left(\frac{c}{2}+1\right) + \sqrt{ab}\left(2c + c\sqrt{2} + 4 + 2\sqrt{2}\right)$

$c \leq$ $c\left(\frac{ab}{2} + 2\sqrt{ab} + \sqrt{2ab} + 3\right) \leq 2026 - ab - 4\sqrt{ab} - 2\sqrt{2}\sqrt{ab}$

$\frac{cx^2}{2}$ $a=b=x$

$\frac{cx^2}{2}\left(\frac{x^2}{2} + 2x + \sqrt{2}\,x + 3\right) \leq \left(2026 - x^2 - 4x - 2\sqrt{2}\,x\right)\frac{x^2}{2}$ $\sqrt{2a^2}$

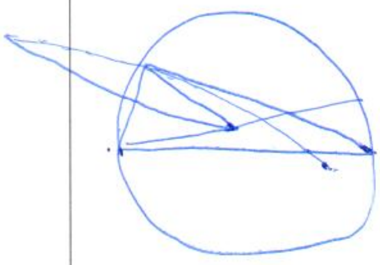
$\frac{cx^2}{2} \leq$ $\cancel{(2026 - x^2 - 4x - 2\sqrt{2}}$ $x=1$ $a=$

$\frac{c}{2} + 1 + 2c + \sqrt{2}\,c + 4 + 3c + 2\sqrt{2} = 2026$

$c\left(\underbrace{\frac{ab}{2} + a + b + \sqrt{a^2+b^2}}_{t} + 3\right) \leq 2026 - ab - 2a - 2b - 2\sqrt{a^2+b^2}$

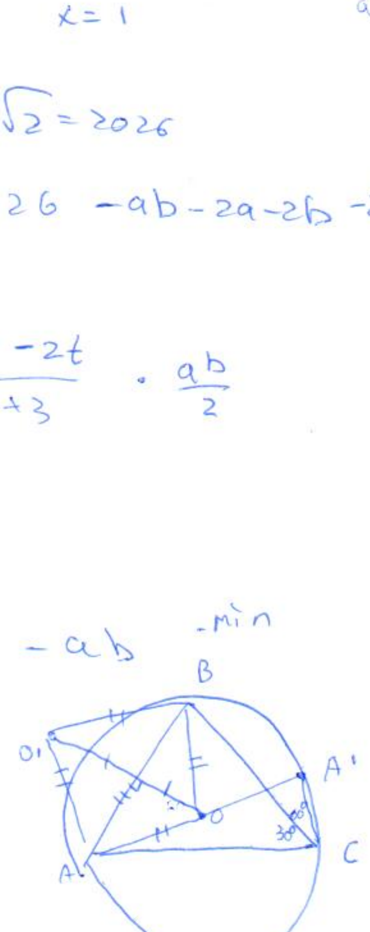
45 $\cancel{2026}$

$\frac{2026 - 2t}{t+3} \cdot \frac{ab}{2}$



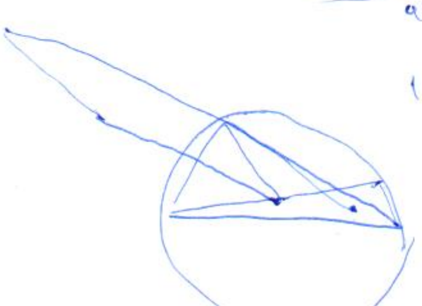
$\left(\frac{2032}{t+3} - 2\right)\frac{ab}{2}$

$\frac{2032\, ab}{2(t+3)} - ab$ - min

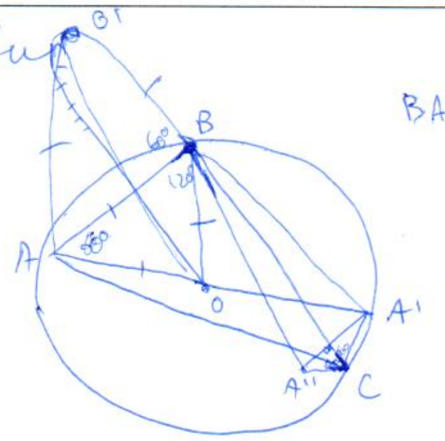


$\frac{2032}{\frac{ab + 2a + 2b + 2\sqrt{a^2+b^2}}{ab}}$

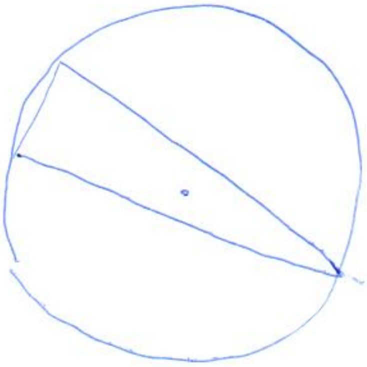
1



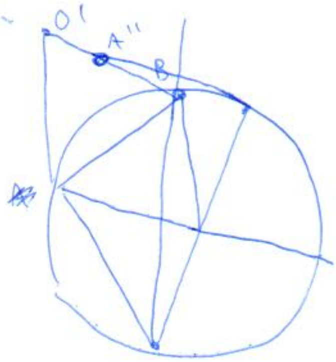
Черновик

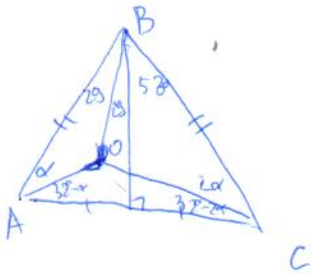


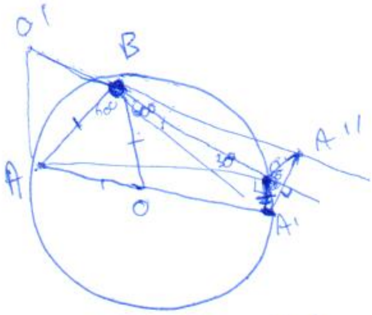
BA''||AG

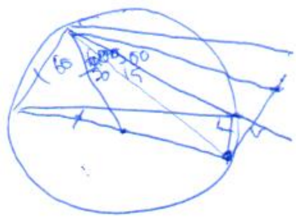


151







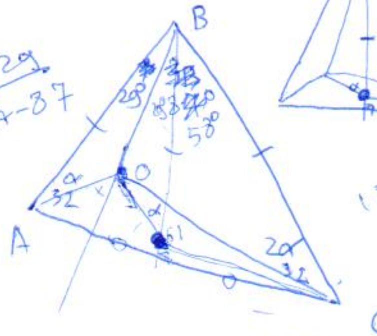


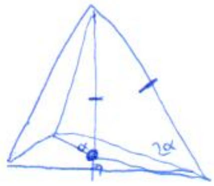
$4\beta = 180^\circ - 64 = 116$

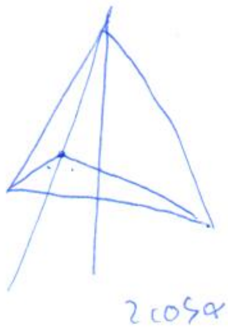
$\frac{\sin(\alpha+2\alpha)}{\sin\alpha} = \frac{\sin(87^\circ+2\alpha)}{\sin 2\alpha}$

25

$\frac{180^\circ-\alpha-2\alpha}{180^\circ-2\alpha-87}$







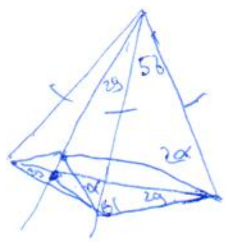
$180-58=$
$=122$

$2\cos\alpha\cos(61-\alpha) = \cos(13-2\alpha)$

$\cos(61)+\cos(61-2\alpha) = \cos(13-2\alpha)$

$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta}\cdot\frac{AO}{OC} = \frac{\sin\beta}{\sin 3\beta}$

$(2\alpha+3\beta)$



$\frac{AO}{OB}\cdot\frac{OB}{OC}$ $\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\cdot\frac{\sin 2\alpha}{\sin 3\beta}$

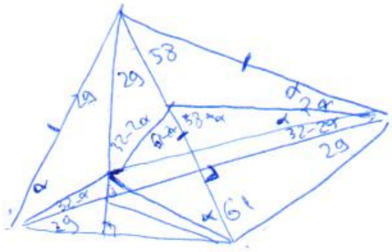
$\sin 2\alpha\ \sin\alpha\cos 29^\circ + \cos\alpha\sin 29^\circ$ $\frac{\sin(\alpha+29^\circ)}{\sin(2\alpha+87^\circ)} = \frac{\sin\alpha}{\sin 2\alpha}$

72-34-74-50
(128.6)

Черновик

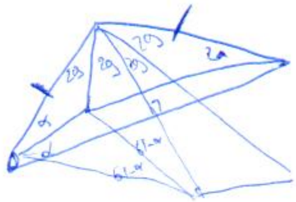
$61-2\alpha+61+\alpha=$

$53+\alpha$



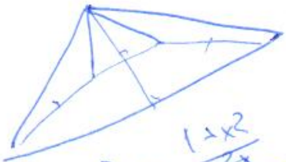
58

$1-x^2-2ax\geq 0$



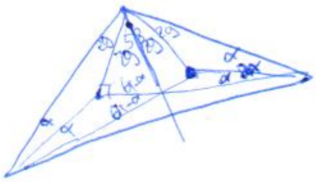
$\frac{1-x^2}{2x}\geq a$

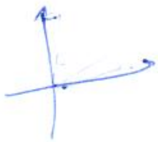
$a=\frac{1-x^2}{2x}$



$ax=\frac{1-x^2}{2}$ $\quad a^2x^2=\left(\frac{1-x^2}{2}\right)^2$

$a+x=\frac{1-x^2+2x^2}{2x}=\frac{1+x^2}{2x}$





$\frac{\sin 30}{\cos 30}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

наиб. знач.

$tg\,x\cdot tg\,y\cdot tg\,z$, $\quad x,y,z>0$, $\quad x+y+z=\frac{\pi}{2}$

$\cancel{\frac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y}}$ $\qquad tg(x+y)=\frac{tg\,x+tg\,y}{1-tg\,x\,tg\,y}$

$\frac{\sin(90°-\alpha)}{\cos}$ $\qquad \frac{1-tg\,x\,tg\,y}{tg\,x+tg\,y}=tg\,z$

$\frac{ab-a^2b^2}{a+b}$ $\qquad f(x)=$ ___ $\qquad \frac{1-a^2b^2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\leq$

a,b

$ab-a^2b^2\leq b(a-2b)-b^2(a-2b)^2$

$a\to b$

$b\to a-2b$

$(ax)'=a$

(x^2a^2) $\qquad \frac{xa-x^2a^2}{x+a}$ $\qquad f'(x)=\frac{(xa-x^2a^2)'(x+a)-(x+a)'(xa-x^2a^2)}{(x+a)^2}$

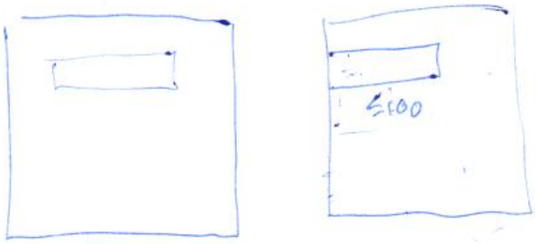
$-a^2\cdot 2x$

$(a-2xa^2)(x+a)-(xa-x^2a^2)=$

$a>1-x^2$ $\qquad =ax+a^2-2x^2a^2-2xa^3-xa+x^2a^2$

$a^2(1-x^2-2ax)$

Черновик



от 2 до 99

$\cdot 4$

$$\frac{a^{2x}-3a^{x+1}+2a^2}{\log_2 a} \geq 0 \qquad = a^2(a^{2x-2}-3a^{x-1}+2)$$

$$\frac{a^2(a^{x-1}-1)(a^{x-1}-2)}{\log_2 a} \geq 0$$

$a>2$ $\quad \log_2 a \geq 0$
$a<2$

6c

$\frac{abc}{2}$

$c \cdot \frac{ab}{2} = V$

$S = bc + ac + ab + \sqrt{a^2+b^2} \cdot c$

$l = 2a + 2b + 2\sqrt{a^2+b^2} + 3c$

196 =

169 +

$V + S + l = 2026 \quad V_{min} - ?$

225

$c(a+b) = 7c \quad 5c$

$ab = 12$

1 4 9 16 25 36

$6c + 12c + 12 + 14 + 10 + 3c = 2026$

49 64 81 100

$21c = 2000$

10 6 8

$24c + 14c + 48 + 10c + 28 + 20 + 3c$

1998 -
1950

38 $41c = 1930$

15 9 12

$t<0 \quad \frac{1}{2^t} = a$

$t \geq 0$

$2^t \geq a$

$a > 1$

$a^{x-1} \leq a^{\log_a 2} \quad t \geq 0$

$a = 2$

$t = 1$
$t = 0{,}5$

$x - 1$

$t = 1$

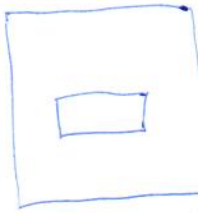
$a = 1$

$2^t = a^{\log_a 2}$ $\quad 2^{\log_2 a}$

$t = 0$

Чистовик

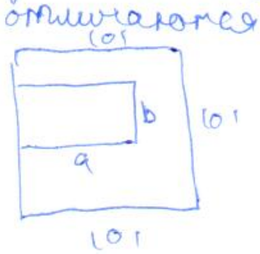
Задача 2



Рассмотрим несколько случаев расположения прямоугольника и для каждого посчитаем кол-во способов. Если прямоугольник не имеет общих линий сетки с периметром квадрата, то будет дырка.

Если прямоугольник содержит линии сетки с двух противоположных сторон квадрата, то он распался на 2 части (если ~~он~~ он не содержит общ. линии сетки с 3 сторонами)

1° прямоугольник $a \times b$ ~~пересе~~ имеет общие линии сетки с 1 стороной квадрата. Давайте посчитаем, если это левая сторона квадрата, и это число умножим на 4 (4 стороны кв., они одинаковые, прямоугольники отличаются поворотом исходного квадрата



Тогда $1 \le b \le 99$ (если $b \geq 100$, то либо верхняя, либо нижняя сторона лежит на стороне квадрата).

$1 \le a \le 100$ (если $a = 101$, то кв. распался)

=> Различных комбинаций a и b будет $100 \cdot 99 =$ $= 9900$ => способов вырезать, чтобы прямоугольник имел общие линии сетки с 1 см. равно $4 \cdot 9900 =$ $= 39600$

2° прямоугольник имеет общие линии с 2 соседними сторонами квадрата. Н.у.о слевой и нижней (потом опять домножим на 4 по аналогичной причине)

Здесь $1 \le a \le 100$ и $1 \le b \le 100$

=> различных комбинаций будет $100 \cdot 100 = 10000$

=> в этом случае число способов $4 \cdot 10000 =$ $= 40000$.

~~Прямоугольник не может иметь общие линии сетки с 3 или 4 сторонами~~

3° имеет общие линии с 3 ст. кв.

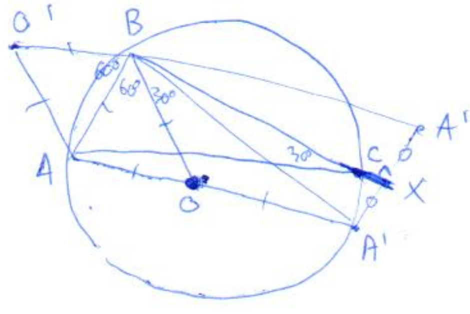
$1 \le a < 100$ => 100 способов => т.к. 4 стороны то 400 способов

=> общее число способов вырезать прямоугольник нужным способом равно $39600 + 40000 + 400 = 80000$

<u>Ответ</u> 80000 способами

Чистовик

Задача 3



Пусть A' — точка, диам. противоположн. A.

$\angle C = 30^\circ$, $\angle AOB = 2\angle C = 60^\circ$, $AO = OB \Rightarrow AOB$ — равносторонний $\Rightarrow O'BA$ — равносторонний $\Rightarrow \angle O'BA = 60^\circ$

Пусть $X = A'A'' \cap BC$

$\angle OBA'' = 180^\circ - \angle OBA - \angle O'BA = 60^\circ$

$\angle ABA' = 90^\circ$, т.к. AA' — диаметр $\Rightarrow \angle OBA' = 90^\circ - \angle ABO = 30^\circ$

$\angle A'BA'' = \angle OBA'' - \angle OBA' = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ$

Заметим, что прямая BC — серпер к $A'A''$, а значит $\triangle A'BA''$ — р/б, ~~к~~ BX — высота и медиана $\Rightarrow \angle A'BX = \frac{1}{2}\angle A'BA'' = \frac{1}{2}\cdot 30^\circ = 15^\circ$

$\angle A'BC$.

$\angle ABC = \angle ABO + \angle OBA' + \angle A'BC = 60^\circ + 30^\circ + 15^\circ = 105^\circ$

Ответ: 105°

Задача 4 (начало ~~вторая~~)

$a > 0,\ a \neq 1$

$$\frac{a^{2x} - 3a^{x+1} + 2a^2}{\log_2 a} = \frac{a^2(a^{2x-2} - 3a^{x-1} + 2)}{\log_2 a} = \frac{a^2(a^{x-1}-1)(a^{x-1}-2)}{\log_2 a} \geq 0$$

~~Пусть~~ 1° $\log_2 a \geq 0 \Rightarrow a > 1$ (если $a \leq 1$, то $\log_2 a \leq 0$)

$2^{\log_2 a} = a$. Тогда $a^{x-1} \geq 1$ при всех $x \geq 1$, и $a^{x-1} < 1$ при всех $x < 1$

правдаже $a^{x-1} \geq 2$ при $x - 1 \geq \log_a 2$, то есть $x \geq 1 + \log_a 2$

$a^t = 2$
$t = \log_a 2$

. Решением является отрезок, ~~а значит~~, но это не так, поскольку решениями точно являются $x > \max(1, 1 + \log_a 2)$ при $a > 1$

$1 + \log_a 2$

2° $\log_2 a < 0 \Rightarrow a < 1$

Тогда $a^{x-1} \geq 1$ при $x - 1 \leq 0 \Rightarrow x \leq 1$

~~$a^{x-1} \geq 2$ при $x - 1 \geq \log_a 2$~~

Чистовик

Задача 4 (продолжение)

нам надо $(a^{x-1}-1)(a^{x-1}-2) \le 0$

1° $\log_a 2 \ge 0$, ~~т.к. $a<1$~~ $\Rightarrow \log_a 2+1 > 1$

$1 \le a^{x-1} \le 2$

$x-1 \le 1$; $x-1 \ge \log_a 2$

$\log_a 2+1 \le x \le 2$ — отрезок длины 2026

$\Rightarrow \log_a 2+1=-2024 \Rightarrow \log_a 2=-2025$

$a^{-2025}=2 \Rightarrow \frac{1}{a^{2025}}=2 \Rightarrow a=\sqrt[2025]{\frac{1}{2}}$

Ответ: $\frac{1}{\sqrt[2025]{2}}=a$

Задача 5 (начало)

$0<x,y,z<\frac{\pi}{2}$, $x+y+z=\frac{\pi}{2}$

Заметим, что $\left.\begin{array}{l} \operatorname{tg}(x+y)=\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y}{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y} \\ \quad\quad\quad \frac{\cos z}{\sin z} \end{array}\right\} \Rightarrow \operatorname{tg} z=\frac{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y}$

$\exists\ \operatorname{tg}x=a;\ \operatorname{tg}y=b$ $\quad a,b>0$

$\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y\operatorname{tg}z=ab\cdot\left(\frac{1-ab}{a+b}\right)=\frac{ab-a^2b^2}{a+b}$

зафикс. b

$\exists\ f(a)=\frac{ab-a^2b^2}{a+b} \Rightarrow f'(a)=\frac{(ab-a^2b^2)'(a+b)-(a+b)'(ab-a^2b^2)}{(a+b)^2}$

$(ab-a^2b^2)'=b-2ab^2$

$(a+b)'=1$

$=\frac{(b-2ab^2)(a+b)-(ab-a^2b^2)}{(a+b)^2}=$

$=\frac{ab+b^2-2a^2b^2-2ab^3-ab+a^2b^2}{(a+b)^2}=\frac{b^2(1-a^2-2ab)}{(a+b)^2}$

очев. при $b<\frac{1-a^2}{2a}$ $f\uparrow$, при $b>\frac{1-a^2}{2a}$ $f\downarrow$

$\Rightarrow$ локальный максимум в $b=\frac{1-a^2}{2a}$ $\Rightarrow$ найдем

~~$\operatorname{tg} y=\frac{1-\operatorname{tg}}{2}$~~ $\frac{ab-a^2b^2}{a+b}=\frac{\frac{1-a^2}{2}-\left(\frac{1-a^2}{2}\right)^2}{\frac{1+a^2}{2a}}=$

$=$ ~~$\frac{a^4-2a^2+1}{4}$~~ $\frac{\frac{2-2a^2}{4}-\frac{a^4-2a^2+1}{4}}{\frac{1+a^2}{2a}}=\frac{\frac{2-2a^2-a^4+2a^2-1}{2}}{\frac{1+a^2}{a}}=\frac{(1-a^4)a}{2(1+a^2)}=$

~~За~~ Чистовик

Задача 5 (продолжение)

$$\frac{(1-a^4)a}{2(1+a^2)} = \frac{(1-a^2)a}{2}$$

Найдем max $g(a) = \frac{a-a^3}{2}$

$$g'(a) = \underbrace{\left(\frac{a}{2}\right)'}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\left(-\frac{a^3}{2}\right)'}_{\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 3a^2} = \frac{1-3a^2}{2}$$

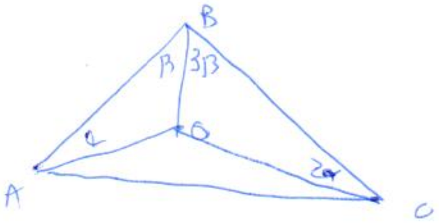
при $a^2 < \frac{1}{3}$ $g \uparrow$, при $a^2 > \frac{1}{3}$ $g \downarrow$

$\Rightarrow$ max при $a^2 = \frac{1}{3}$ ~~$a = \frac{1}{\sqrt{3}}$~~, равен

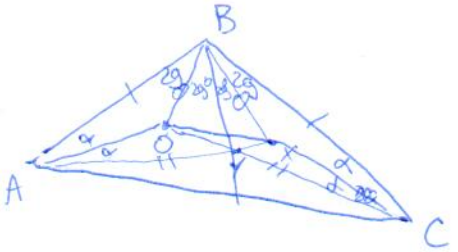
$$\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{3}\right)}{2} = \frac{1}{3\sqrt{3}}$$ — максимум.

Пример $x = y = z = \frac{\pi}{6} \Rightarrow tg\, x = tg\, y = tg\, z = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow tg\, x\, tg\, y\, tg\, z = \frac{1}{3\sqrt{3}}$

Задача 6 (начало)



$4\beta = 180^\circ - 2\cdot 32^\circ = 180^\circ - 64^\circ = 116^\circ \Rightarrow \beta = 29^\circ$



Найдем такую (·) X, что $\angle OAX = \alpha$ и $AX = OC$

Тогда $\triangle BAX = \triangle BCO \Rightarrow BO = BX \Rightarrow B$ — на серпере $[OX]$, но $AB = BC \Rightarrow B$ на серпере к $AC \Rightarrow OX \parallel AC$ и $AOXC$ — р/б трапеция

Чистовик

Задача 6 (продолжение)

$\angle ABX = \angle OBC \Rightarrow \angle OBX = 58^\circ$ и $\angle XBC = 29^\circ$

$\exists\ Y = OC \cap AX$

Y - (·) пересечения диагоналей р/б трапеции

$AOXC \Rightarrow Y$ - на серпер к AC

$\Rightarrow BY$ - серпер к OX и AC

$\Rightarrow \angle YBX = 29^\circ = \angle OBY$

Еще $\angle OCX = \angle OAX = \alpha$

O - точка пересечения двух биссектрис

$\triangle ABY \Rightarrow YO$ - бисс. $\angle AYB$

$\Rightarrow \angle OYB = \frac{1}{2}\angle ABY = \frac{1}{2}(180^\circ - 2 \cdot 29^\circ - 2\alpha) =$

$= 61^\circ - \alpha$. Тогда $\angle BOY = 180^\circ - 29^\circ - (61^\circ - \alpha)$

$= 90^\circ + \alpha$.

Но $\angle BOY = \angle BOC \Rightarrow$ мы знаем, что

в $\triangle BOC$ $\angle OBC = 87^\circ$, $\angle BCO = 2\alpha$, $\angle BOC = 90^\circ + \alpha$

$\Rightarrow 87^\circ + 2\alpha + 90^\circ + \alpha = 180^\circ \Rightarrow 177^\circ + 3\alpha = 180^\circ$

$\Rightarrow \alpha = 1^\circ$.

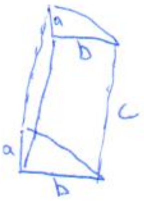
Тогда $\angle AOB = 180^\circ - 29^\circ - 1^\circ = 150^\circ$, а $\angle BAO = 1^\circ$

$\Rightarrow \angle AOB$ в 150 раз больше $\angle BAO$

Ответ: в 150 раз больше.

Чистовик

Задача 1



a, b, c - натуральные числа

$\Rightarrow \cancel{\sqrt{a^2+b^2}}$ - 1

$V = \frac{ab}{2} \cdot c$

$S = bc + ac + ab + \sqrt{a^2+b^2} \cdot c$

$l = 2a + 2b + 2\sqrt{a^2+b^2} + 3c$

$V + S + l = 2026$ - натуральное число

Если a^2+b^2 - не точный квадрат, то

$\sqrt{a^2+b^2}$ - иррационально $\Rightarrow V + S + l$ - иррационально

$\Rightarrow a^2+b^2$ - точный квадрат