

Вышел в 13:37:37
Вернулся в 13:40:30
41 14:31:50

**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА**

Вариант 11 класс ; 2 вариант

Место проведения Санкт-Петербург
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наименование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Карпова Дмитрий Игоревича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«23» марта 2026 года

Подпись участника
[Подпись]

04-40-20-68
(129,3)

~~Иван Чернышев~~
(M)

$$\begin{array}{r} 426 \overline{) 18} \\ 36 \\ \hline 126 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11 \\ 972 \\ \hline 648 \\ \hline 1620 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1620 \\ +152 \\ \hline 1782 \end{array}$$

$$\sqrt{3(1-\cos^2 x)} = 2 \sin x / 12$$

$$3 - 3 \cos^2 x = 8 \sin^2 x$$

$$3 - 3 \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 8 \sin^2 x$$

$$3 - 3 \frac{\sin^2 x}{1 - \sin^2 x} = 8 \sin^2 x$$

$$3 - 3 \frac{t}{1-t} = 8t \cdot (1-t)$$

$$3 \sin^2 x = t$$

$$\begin{array}{r} 872 \overline{) 18} \\ 30 \\ \hline 72 \end{array}$$

ОБР
 $\sin x \geq 0$

$$\begin{array}{r} 023 \\ 1 \cos^2 x + 20 \\ \hline \cos^2 x < 1 \\ (\cos x - 1)(\cos x + 1) < 0 \end{array}$$

$$3(1-t) - 3t = 8t(1-t) \quad 81$$

$$3 - 3t - 3t = 8t - 8t^2$$

$$3 - 6t = 8t - 8t^2$$

$$8t^2 - 14t + 3 = 0$$

$$\begin{aligned} D &= 14 \cdot 14 - 4 \cdot 3 \cdot 8 = \\ &= 4 \cdot 49 - 4 \cdot 24 = \\ &= 4 \cdot 25 = 100 \end{aligned}$$

$$t = \frac{14 \pm 10}{16} = \frac{24}{16} > 1 - \text{не}$$

$$\sqrt{\frac{4}{11}} = \frac{1}{4}$$

ОБЗ вынул
 $\cos^2 x = \frac{1}{3}$

$$\sin^2 x = \frac{1}{4} \quad \cos^2 x = \frac{3}{4}$$

$$\sin x = \frac{1}{2} \quad \sin x = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{array}{r} 11 \\ 162 \\ \hline 648 \\ \hline 710 \\ \hline 872 \\ \hline 1622 \end{array}$$

abc 1622

$$\frac{100a + 10b + c}{a + b + c} = 9k$$

$$\begin{array}{r} 81 \\ \times 12 \\ \hline 162 \\ \hline 81 \\ \hline 972 \end{array}$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

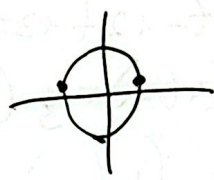
$$100a + 10b + c = 9k(a + b + c)$$

$$\frac{abc}{972} = 9k \cdot \frac{(a+b+c)}{9}$$

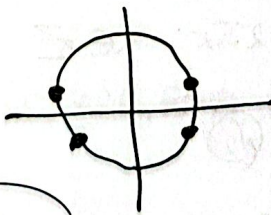
$$\begin{array}{r} 572 \overline{) 18} \\ 30 \\ \hline 72 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11 \\ 648 \\ \hline 162 \\ \hline 810 \end{array}$$

$$81 \cdot 12 = 18 \cdot 54$$



162	3
243	3
324	3
405	3
486	18
567	18
648	18
729	18
810	3
891	18
972	18
162	3



$$\begin{array}{r} 81 \\ \times 12 \\ \hline 162 \\ \hline 81 \\ \hline 972 \end{array}$$

Умножив.

$$\sqrt{3 \cdot (1 - \operatorname{tg}^2 x)} = 2\sqrt{2} \sin x \quad | \cdot 2$$

(N1)

ОБР
 $\sin x \geq 0$

ОРЗ
 $1 - \operatorname{tg}^2 x \geq 0$
 $\operatorname{tg}^2 x \leq 1$

$$3 - 3 \operatorname{tg}^2 x = 8 \sin^2 x$$

$$3 - 3 \frac{\sin^2 x}{1 - \sin^2 x} = 8 \sin^2 x$$

$\exists \sin^2 x = t$
 $t \in [0; 1] (*)$

$$3 - 3 \frac{t}{1-t} = 8t \quad | \cdot (1-t) \neq 0$$

$$3 - 3t - 3t = 8t - 8t^2$$

$$8t^2 - 14t + 3 = 0$$

$$8t^2 - 2t - 12t + 3 = 0$$

$$2t \cdot (4t - 1) - 3 \cdot (4t - 1) = 0$$

$$(2t - 3) \cdot (4t - 1) = 0$$

$$\left[t = \frac{3}{2} - \text{не юж } (*) \right.$$

$$\left. t = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{4} \Rightarrow \right.$$

$$\cos^2 x = \frac{3}{4}$$

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{3} \Rightarrow \text{ОРЗ выполняется}$$

$$\left[\begin{aligned} \sin x = \frac{1}{2} &\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z} \\ \sin x = -\frac{1}{2} &\text{ - не юж - ОБР} \end{aligned} \right.$$

Обр: $\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}$

(N2)

Любое трехзначное число, которое входит в множество А;
~~Это~~ Это число - abc. Тогда верно, что

$$\frac{abc}{a+b+c} = k, \text{ где } k \div 9, \text{ т.е.}$$

$$abc = \underset{\div 9}{k} \cdot (a+b+c)$$

Т.е. выражение справа кратно 9, то и abc кратно 9, но

04-40-20-68
(129,3)

Условие

Тогда, т.к. сумма цифр дает такой же остаток при делении 9, как и само число, то и сумма цифр кратна 9, но тогда правая часть кратна 81, но тогда и само число кратно 81. Т.е. мы получили, что трехзначное число может входить в множество А только тогда, когда оно кратно 81. (и сумма их цифр справа)

Трехзначные числа, которые кратны 81, это:

162	9	✓	
243	3	✓	
324	3	✓	
405	3	✓	
486	18	✓	567
567	18	✗	(т.к. 386 : 2, а 18 : 2)
648	18	✓	
729	18	✗	(т.к. 729 : 2, а 18 : 2)
810	9	✓	
891	18	✗	(т.к. 891 : 2, а 18 : 2)
972	18	✓	

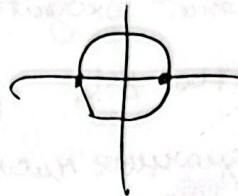
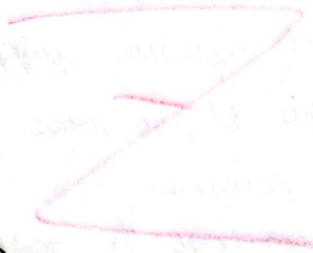
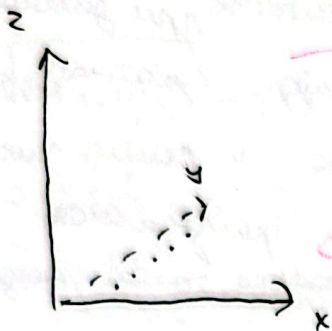
✓ - если число входит в множество А
✗ - если не входит

Т.к. тогда трехзначные числа, которые входят в множество А:
 $A: 162, 243, 324, 405, 486, 648, 810, 972$

$S = 162 + 648 + 972 = 1782$

Ответ: 162, 243, 324, 405, 486, 648, 810, 972
 $S = 1782$

Чертовик



(NB)

$$3x^2 \log_2 x - \log_2 x - 2x \leq 0$$

$$3x^2 \log_2 x - \log_2 \frac{1}{x} - 2x \leq 0 \quad \text{0.83}$$

$$3x^2 t - \frac{1}{t} - 2x \leq 0$$

$$\frac{3x^2 t^2 - 2xt - 1}{t} \leq 0$$

$x > 0 \wedge t > 0$
 $x > 0 \wedge t < 0$

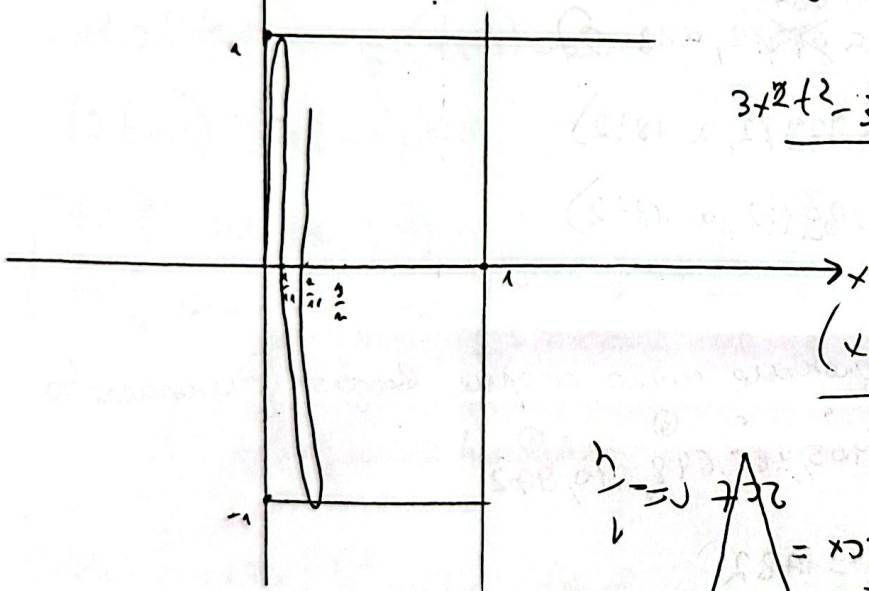
$0 \leq x \leq 1$

$-1 \leq y \leq 1$

$y = \sin kx$

$-\log_2 \frac{1}{x}$

$y = \sin 117x$
 $y = \sin 135x$
 $y = \sin 167x$



$$\frac{3x^2 t^2 - 3xt + xt + 1}{t} \leq 0$$

$$\frac{(xt-1)(xt+1)}{t} \leq 0$$

$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$y = 2cx$
 $y = c^2 x$

$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
 $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$y = cx^2$

$= u + \frac{h}{3}$

$$\frac{(x \log_2 x - 1)(x \log_2 x + 1)}{\log_2 x} \leq 0$$

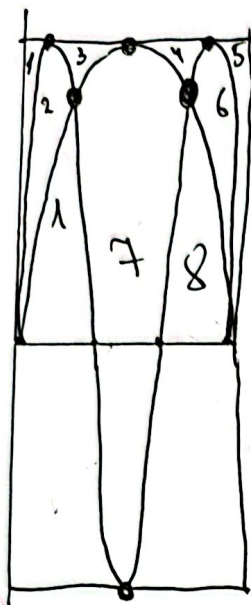
$$\frac{(\log_2 x^x - 1)(\log_2 x^{3x} + 1)}{\log_2 x} \leq 0$$

$$\frac{(x^x - 1)(e-1)(x^{\frac{3x}{2}} - 1)(e-1)}{e-1}$$

$\frac{1}{2} = u + \frac{h}{3}$
 $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Черный

04-40-20-68
(129.3)



2x4

⊗ x 11 x 13 x 2

Чистовик

№3

1) Найдем сколько в принципе точек в пространстве $F, \exists A$ -
точка в пространстве F , тогда $A(a, b, c)$ $-6 \leq a \leq 6$
 $-6 \leq b \leq 6$, тогда $-6 \leq c \leq 6$

a, b, c могут каждый принимать по 13 значений т.е.
тогда точек в пространстве $F - 13 \cdot 13 \cdot 13 = 13^3$

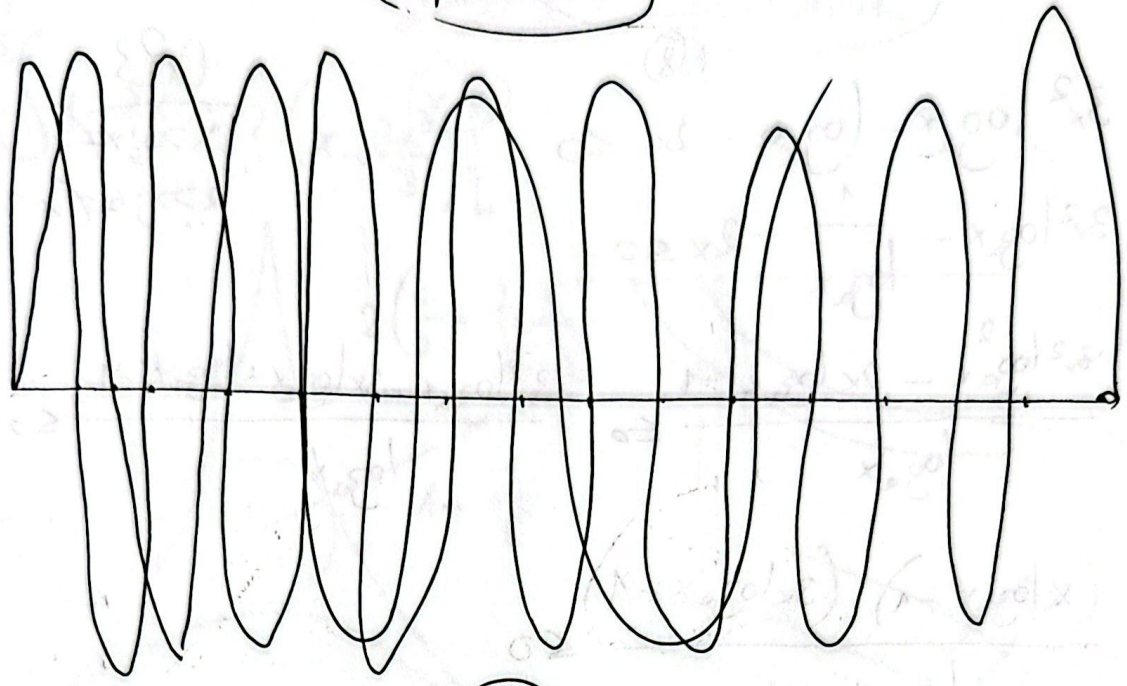
2) Выберем какую-то точку, как вершину прямого угла, тогда
вариантов выбрать $- 13^3$. Затем выберем две оси, параллель-
но которым будут катеты, т.е. $C_3^2 = 3$. Независимо от
того, где стоит точка, в данной оси мы можем выбрать ка-
тет 12 способами, т.е. в этой оси есть еще 12 точек, с которы-
ми мы можем выбрать соединить вершину прямого угла.
Т.е. первый катет выбрать способом 12 и второй 12, тогда
 12^2 . Таким образом у нас получится прямоугольный
треугольник, удовлетворяющий заданным условиям.
Тоже таких треугольников: $13^3 \cdot 3 \cdot 12^2$

Ответ: $3 \cdot 12^2 \cdot 13^3$

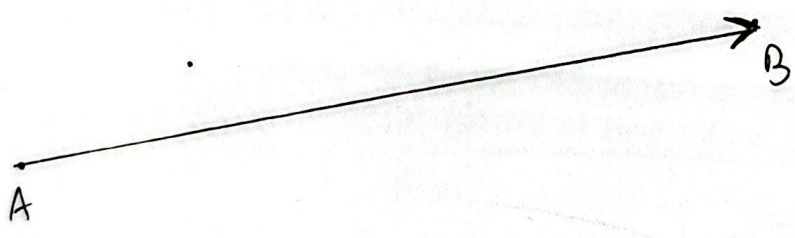
Черновик

24

15.11



№6



Числовик

№8

$$3x^2 \log_a x - \log_a x - 2x \leq 0$$

$$3x^2 \log_a x - \frac{1}{\log_a x} - 2x \leq 0$$

$$\frac{3x^2 \log_a^2 x - 2x \log_a x - 1}{\log_a x} \leq 0$$

$$\frac{3x^2 \log_a x - 3x \log_a x + \log_a x - 1}{\log_a x} \leq 0$$

$$\frac{(x \log_a x - 1) \cdot (3x \log_a x + 1)}{\log_a x} \leq 0$$

~~ВАЗА~~

~~АТ~~

023
x > 0; x ≠ 1
a > 0; a ≠ 1

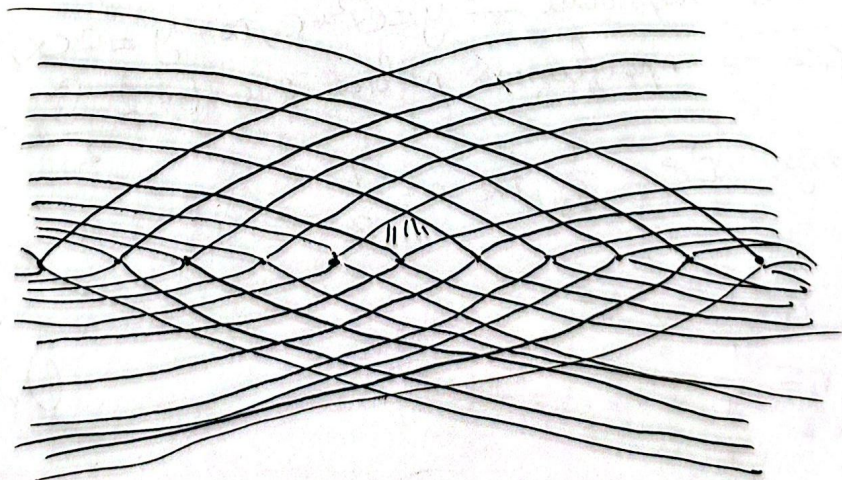
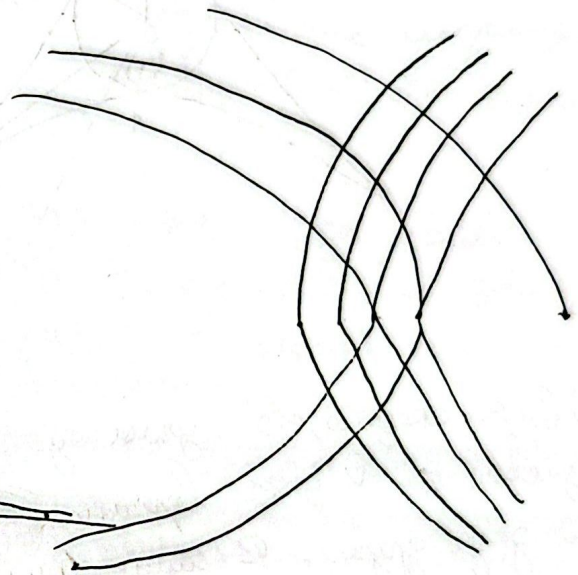
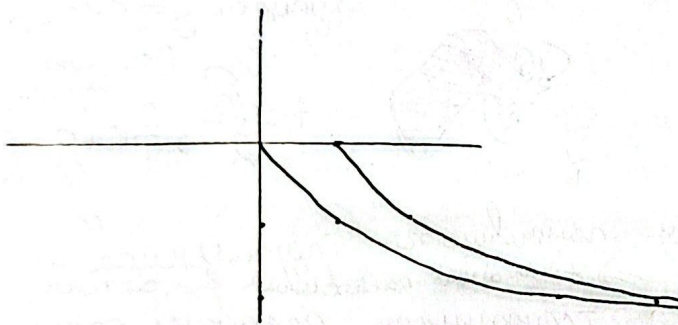
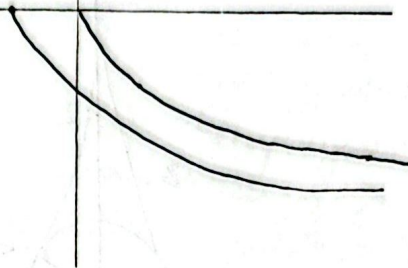
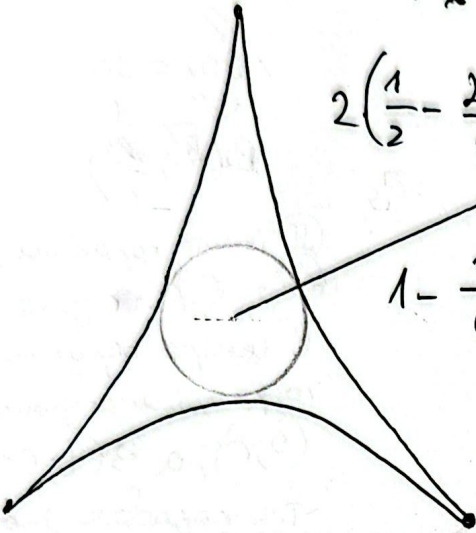
~~Числовик~~

Черновик

$$\frac{1}{2} \int_0^1 (1-2x^2) dx = 2 \cdot \left(x - \frac{2x^3}{3} \right) \Big|_0^1$$

$$2 \left(\frac{1}{2} - \frac{2 \cdot 1}{8 \cdot 3} \right)$$

$$1 - \frac{1}{6}$$



Чистовик

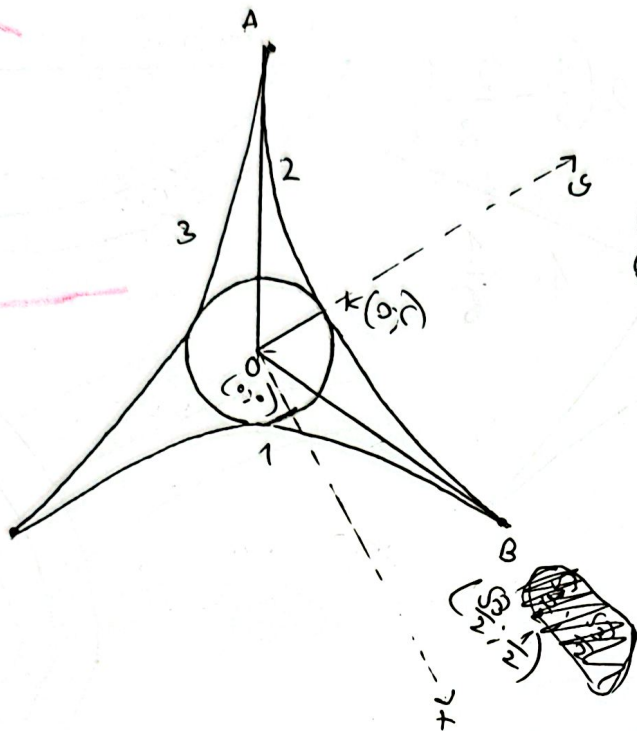
(NS)

I В силу симметрии углы $\angle AOB = 120^\circ$
 $\angle AOK = \angle KOB = 60^\circ$

$\angle BOK = 30^\circ$
 $B\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$

II Т.к. это параболы, то введя С.К. с центром в центре окружности, то К имеет координаты $(0; r)$, а $B(t; ct^2 + r)$
 т.к. парабола задана функцией $y = cx^2 + r$

$t = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{3}{4}c + r = \frac{1}{2}$



III Т.к. известно, что углы у правильного треугольника — числовые, то в ~~каждых~~ вершинах \Rightarrow у них будет касательная в этой точке со друг. друг. В силу симметрии именно OB касается обеих парабол. Уравнение прямой OB — $y = \frac{x}{\sqrt{3}} \Rightarrow y' = k = \frac{1}{\sqrt{3}}$.
 (параболы 1 и 2)

Уравнение параболы — $y = cx^2 + r$, т.е. $y' = 2cx$, тогда в точке B производная равна $2 \cdot c \cdot t = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{2} c = \sqrt{3}c$.

Тогда $\sqrt{3}c = \frac{1}{\sqrt{3}}$, т.е. $c = \frac{1}{3} \Rightarrow (*)$

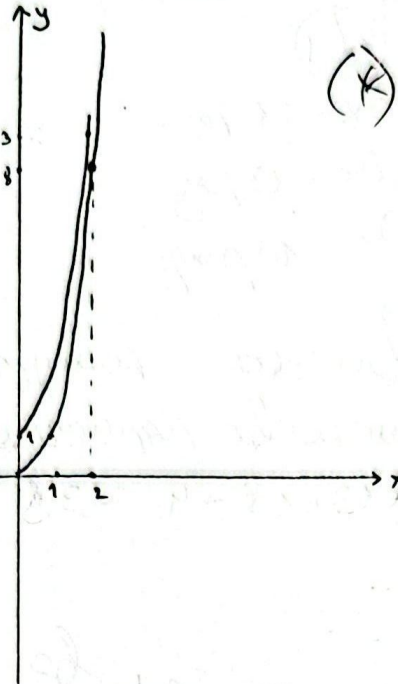
$$\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} + r = \frac{1}{2}$$

$$r = \frac{1}{4}$$

Ответ: $\frac{1}{4}$

Числовик

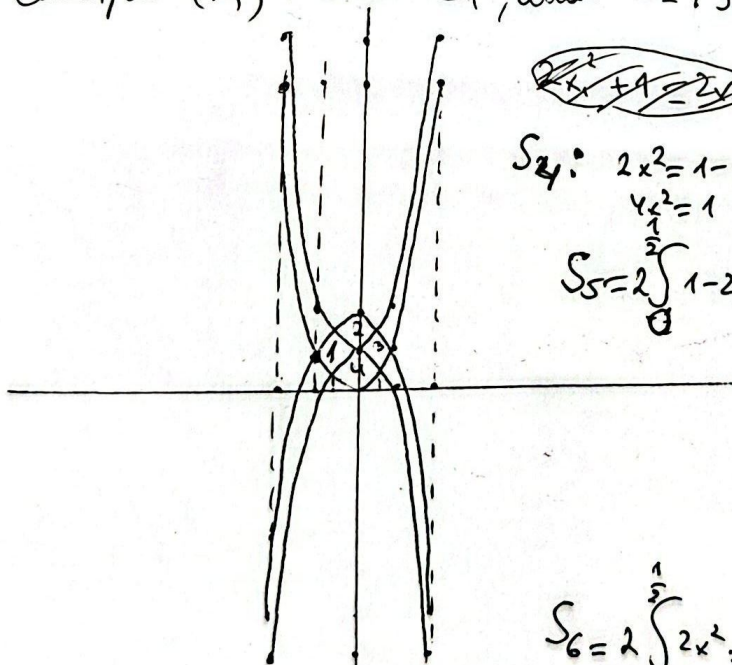
(N4)



(*) 4 параболу
 $y = 2x^2$ и $y = 2x^2 + 1$

Абсолютно очевидно, что с возрастанием абсциссы ширина расстояния между параболами будет уменьшаться.
 т.е. четырехугольником получается из-за пересечения парабол, т.е. S четырехугольника максимум зависит от его ширины

т.е. S четырехугольника будет max тогда, когда расстояние между параболами, которое мы образуем будет max. Это возможно в случае только тогда, т.е. разные одно из расстояний или оба будут меньше (т.е. смотри (*)). Либо S_1 , либо S_2 (т.е. $S_1 = S_3$; $S_2 = S_4$)



~~$2x^2 + 1 = 2x^2$~~

$$S_2: 2x^2 = 1 - 2x^2$$

$$4x^2 = 1 \quad x = \pm \frac{1}{2}$$

$$S_5 = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} (1 - 2x^2) dx = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} (1 - 2x^2) dx = 2 \left(x - \frac{2x^3}{3} \right) \Big|_0^{\frac{1}{2}} = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{2 \cdot \frac{1}{8}}{3} \right) = 2 \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{3}$$

$$S_6 = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} 2x^2 dx = 2 \cdot \frac{2x^3}{3} \Big|_0^{\frac{1}{2}} = 2 \cdot \frac{1}{8 \cdot 3} = \frac{1}{6}$$

$$S_4 = \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

S_3 будет меньше, т.е. опять же ширина будет уже, чем у S_4

Ответ: $\frac{2}{3} \text{ см}^2$

~~Средства в школе~~

Чистовик

№4

 $y = \sin 11\pi x$ — пересекет Ox — 11 раз $y = \sin 13\pi x$ — пересекет Ox — 13 раз $y = \sin 15\pi x$ — пересекет Ox — 15 раз

Отвечать будет явиться количество их пересечений плюс количество пересечений Ox разных (т.е. плюс $11 + 13 + 15 - 4 = 35$)

$$\begin{cases} \sin 11\pi x = \sin 13\pi x \\ \sin 11\pi x = \sin 15\pi x \\ \sin 13\pi x = \sin 15\pi x \end{cases} \quad \text{— все реш}$$

