Вых[о]д: 13:18 – 13:21

0 529054 760000

52-90-54-76
(124.40)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 11 класс, 5

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Касимова Тимура Рустамовича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«29» марта 2026 года

Подпись участника

100 (40) фин [signature]

52-90-54-76 (124.40)

Чистовик

№1

$6 - 6\,tg^2x = 16\sin^2 x$, $\sin x > 0$

т. к. $1 + tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{1-\sin^2 x}$,

Пусть $t = \sin^2 x$, $0 \le t < 1$, тогда $tg^2 x = \frac{1}{1-t} - 1 =$

$= \frac{1-(1-t)}{1-t} = \frac{t}{1-t}$

$6 - \frac{6t}{1-t} = 16t$; $3 - \frac{3t}{1-t} = 8t$

$-\frac{3t}{1-t} = 8t - 3$

$3t = (8t-3)(t-1)$, $t \ne 1$ - удовл. автоматически

~~$3t = 8t - 8t^2 - 3 + 3t$~~ $3t = 8t^2 - 3t - 8t + 3$

~~$8t^2 - 8t + 3 = 0$~~

$8t^2 - 14t + 3 = 0$

$t_1 = \frac{2}{8}$ $t_2 = \frac{12}{8}$

$t_1 = \frac{1}{4}$ $t_2 = \frac{3}{2} > 1$ - неудовл.

обр. зам

$\begin{cases} \sin^2 x = \frac{1}{4} \\ \sin x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2}$

$x = \frac{\pi}{6}(-1)^n + \pi n$, $n \in Z$

Ответ: $\frac{\pi}{6} \cdot (-1)^n + \pi n$; $n \in Z$.

№2

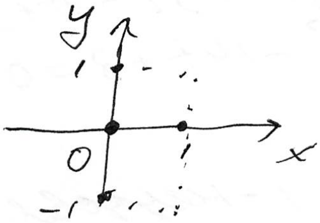
~~Пусть число $n \in N$, $n = \overline{abc}$,~~

~~тогда $\frac{100a + 10b + c}{a+b+c} = 9k$, $k \in N$,~~

№3 Чистовик

F — точки внутри и на границе куба $8\times8\times8$ с центром в начале координат.

Выбрать вершину C ($\angle C = 90^\circ$) 9^3 способов. Точку A — $3\cdot8$ способов, точку B — $2\cdot8$ способов. т.к. треуг., отличающиеся ~~A и B~~ перестановкой A и B эквивалентны, произведение делим на 2. итого: $\frac{6\cdot9^3\cdot8^2}{2} = 3\cdot9^3\cdot8^2 = 3^7\cdot2^6$ Ответ: $3^7\cdot2^6$



№4

нули:

$y = \sin 11\pi x$ $\quad x = \frac{n}{11}$, $0\le n\le 11$

$y = \sin 15\pi x$ $\quad x = \frac{k}{15}$ $\quad 0\le k\le 15$

$y = \sin 17\pi x$ $\quad x = \frac{m}{17}$ $\quad 0\le m\le 17$

~~Все графики пересекаются в точках, отличных от точек с $y\in\{-1;0;1\}$, действительно, иначе или $\sin\pi k_1 x = \sin\pi k_2 x = 0$ или $\cos\pi k_1 x = \cos\pi k_2 x = 0$, что не возможно (это не касательная точек $(0,0)$ и $(1,0)$). например, для $\sin$ нули $\frac{n}{11}\ne\frac{k}{15}$, что не возможно для точек с $0<x<1$~~

За каждое пересечение прямых $y=\pm1$ и другого графика ~~установленного~~, а также точки $(1,0)$ добавляется одна область. проведём графики по очереди.

для $k=11$, создастся ~~11-ых~~ областей: $11+1+1=13$

(одна область изначально, 11 раз пересек $y=\pm1$ — на 1 раз меньше чем нулей, и 1 раз пересек $x=1$)

~~П~~ после проведения для $k=15$ чистовик добавится $15+15-1\overset{+1}{=}$ (15 раз с $y=\pm1$ и 14 раз с $\sin 18\pi x$ и один раз (1,0))
$=30$

$\sin \pi k_1 x = \sin \pi k_2 x,\ k_1 > k_2$

$\left[\begin{array}{l}\pi k_1 x = \pi k_2 x + 2\pi n \\ \pi k_1 x + \pi k_2 x = \pi + 2\pi n\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{2n}{k_1-k_2} \\ x = \dfrac{2n+1}{k_1+k_2}\end{array}\right.$

~~т.к. НОД$(k_1, k_2)=1$, $\frac{2k_1}{k_1-k_2} \notin Z$, значит~~
~~т.к. k_1 – простое~~

~~все корни. Если $\frac{2k_1 n}{k_1-k_2} = m+\frac{1}{2}$, $m\in Z$, то~~
~~$\frac{4k_1-k_1+k_2}{k_1+k_2} = n$ ~~ ~~чем доказывается утверждение о том, что~~

всего корней, помимо $x=0$ и $x=1$ –

~~$\frac{k_1-k_2}{2} + k_1+k_2$~~ $\frac{k_1-k_2}{2} - 1 + \frac{k_1+k_2}{2} =$

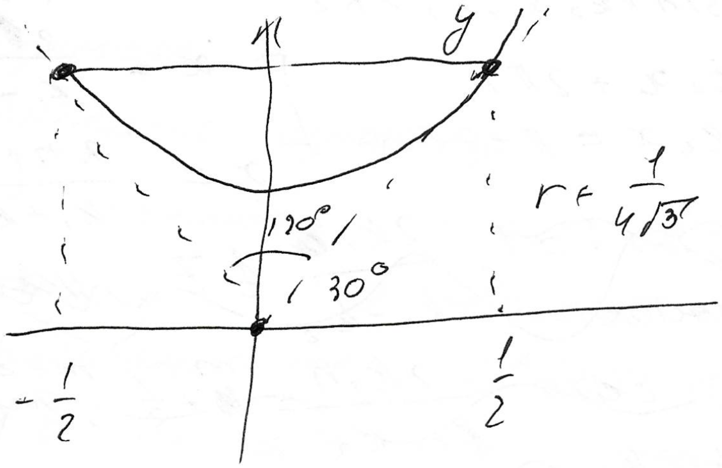
$k_1 - 1$.

После проведения $y = \sin 17\pi x$,
добавится $17 + (17-1)\cdot 2 + 1 = 3\cdot 17 - 1 = 50$
итого: $13 + 30 + 50 = 93$. в ответ только
(см. продолж. далее) лишняя точка.

Чистовик

№ 5

из условия очевидно, что



$y = r + Cx^2$

$y' = 2Cx$

$r + \frac{1}{4\sqrt{3}}$

$y'(\frac{1}{2}) = \cancel{2}C = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$C = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$y = r + \frac{1}{\sqrt{3}}x^2$

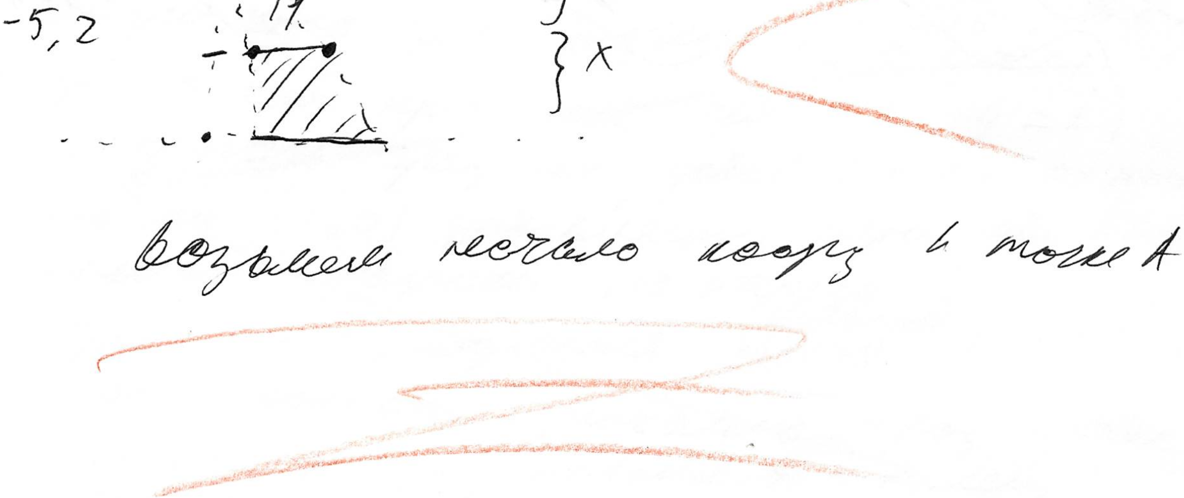
$y(\frac{1}{2}) = r + \frac{1}{4\sqrt{3}}$

из треугольника $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = r + \frac{1}{4\sqrt{3}}$

$r = \frac{1}{4\sqrt{3}}$

Ответ: $\frac{1}{4\sqrt{3}}$.

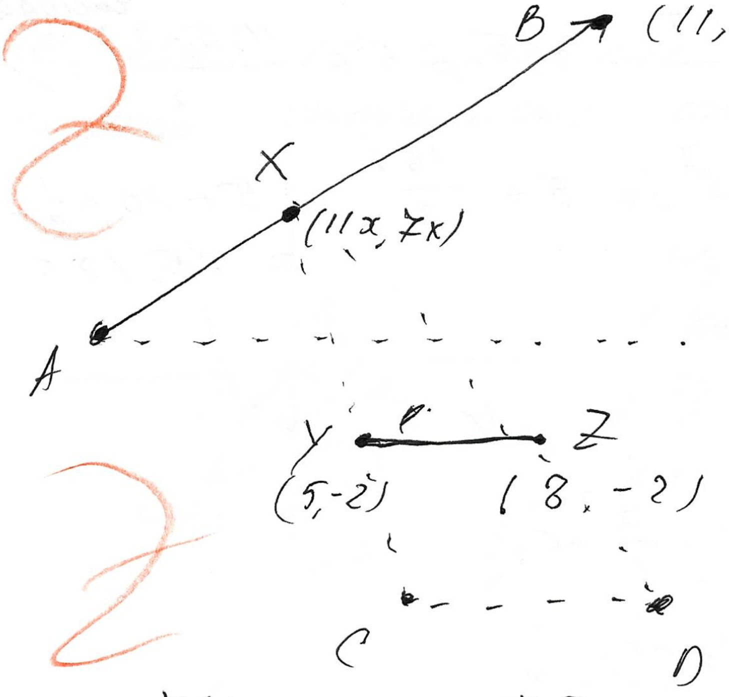
№ 6



возьмем начало коорд в точке A

52-90-54-76 (124.40)

Черновик



$\frac{XY}{YC}=2$, $\frac{XZ}{ZD}=2$ из подобия.

пусть координаты $C(a, b)$

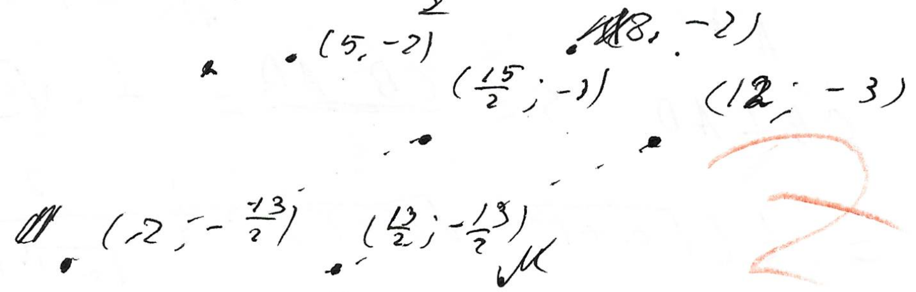
$\frac{a-5}{5-11x}=\frac{1}{2}$, $2a-5\cdot2=5-11x$

$2a=3\cdot5-11x$

$a=\frac{3\cdot5-11x}{2}=\frac{15-11x}{2}$

аналогично: $C\left(\frac{15-11x}{2}; \frac{-6-7x}{2}\right)$

$D\left(\frac{24-11x}{2}; \frac{-6-7x}{2}\right)$, ГМТ C и D:



найдем площадь фигуры (сумма площадей трапеций)

$DC=7$

$S=5+\frac{7+4{,}5}{2}\cdot3{,}5$

чистовик

$S = 5 + \frac{7+4,5}{2}\cdot 3,5 = 5 + \frac{11,5\cdot 3,5}{2} =$

$= 5 + \frac{23\cdot 7}{8} = 5 + \frac{161}{8} = 5 + 20 + \frac{1}{8} =$

$= 25,125$

$\begin{array}{r} 23 \\ \times\ 7 \\ \hline 161 \end{array}$

№7

$\frac{x^2}{2} + C_1 = -\frac{x^2}{2} + C_2$

$x^2 = C_2 - C_1$

$x = \pm\sqrt{C_2 - C_1}$

$y = \frac{C_2 + C_1}{2}$ точки вида

$\left(\pm\sqrt{C_2 - C_1}, \frac{C_2 + C_1}{2}\right)$,

$C_2 \geq C_1$

~~соседние клетки~~ —

вершины одной клетки — $A\left(\pm\sqrt{C_2 - C_1}, \frac{C_2 + C_1}{2}\right)$

$B\left(\pm\sqrt{C_2 - C_1 + 1}, \frac{C_2 + C_1 + 1}{2}\right)$

$C\left(\pm\sqrt{C_2 - C_1 - 1}, \frac{C_2 + C_1 + 1}{2}\right)$

$D\left(\pm\sqrt{C_2 - C_1}, \frac{C_2 + C_1 + 2}{2}\right)$

$CB \perp AD$. $S = \frac{CB\cdot AD}{2} = \frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{\underbrace{C_2 - C_1}_{\alpha} + 1} - \sqrt{C_2 - C_1 - 1}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{\alpha + 1} - \sqrt{\alpha - 1}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{\alpha+1} + \sqrt{\alpha - 1}} =$

$= \frac{1}{\sqrt{\alpha+1} + \sqrt{\alpha-1}}$ — убывающая функция α;

все вычисления для $\alpha \geq 1$ ~~если~~

при $\alpha = 1$, $S_{max} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

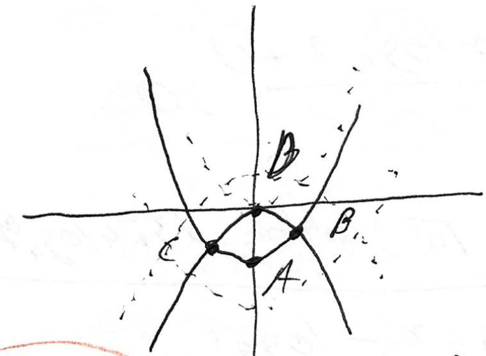
~~Если $\alpha = 0$, $C_1 = C_2$~~

Черновик

не был рассмотрен случай центральных четырехугольников

и их площади равны из симметрии

в частном случае



$A(0;-1)$, $D(0;0)$

$B(1;-\frac{1}{2})$, $C(-1;-\frac{1}{2})$

$\frac{x^2}{2}-1=-\frac{x^2}{2}$

$x=\pm 1$

$y=-\frac{1}{2}$

$S_{max}=\frac{1}{2}\cdot DA\cdot CB=$

$=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2=$

$=1$

Значит площадь центрального наибольшая. $S_{max}=1$ Ответ: 1

№8

$a>0$, $a\neq 1$

$8x^2\log_a x-\frac{1}{\log_a x}-2x\geq 0$

Пусть $\log_a x=t$

$8x^2t-\frac{1}{t}\geq 2x$

$\frac{8x^2t^2-1-2xt}{t}\geq 0$

Пусть $xt=\alpha$, числитель $=8\alpha^2-2\alpha-1=$

$=8(\alpha-\frac{4}{8})(\alpha+\frac{2}{8})=8(\alpha-\frac{1}{2})(\alpha+\frac{1}{6})=$

$=(2\alpha-1)(4\alpha+1)$

Чистовик

$$\frac{(2xt-1)(4xt+1)}{t} \geq 0$$

$$\frac{(2x\log_a x - 1)(4x\log_a x + 1)}{\log_a x} \geq 0$$

$$\frac{(2\log_a x^x - 2\log_a \sqrt{a})(4\log_a x^x - 4\log_a a^{-\frac{1}{4}})}{\log_a x - \log_a 1} \geq 0$$

$$\begin{cases} \dfrac{(x^x - \sqrt{a})(x^x - a^{-\frac{1}{4}})}{x-1} \geq 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

Чистовик

№2

~~1000a +~~ $n \in A$, $n = \overline{abc}$

~~$\frac{100a+10b+c}{a+b+c} = 9k, k \in N$~~

~~$100a+10b+c = 9ka+9kb+9kc$~~

~~$100 - 9$~~

~~$n \vdots 9 \cdot (a+b+c)$~~

~~$k=1$: $100a+10b+c = 9a+9b+9c$~~

~~$91a = 8c - b$~~

~~$\vee c$~~

~~91~~

~~$\wedge$~~

~~72~~

~~$k=2$: $100a+10b+c = 18a+18b+18c$~~

~~$82a = 8b+17c$~~

~~$\cdot m$~~

$\frac{\cdot n}{a+b+c} \vdots 9 \Rightarrow n \vdots 9 \Rightarrow a+b+c \vdots 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow n \vdots 9(a+b+c) \vdots 81 \Rightarrow n \vdots 81$, $n = 81k$

$2 \le k \le 12$

81

12

162

972

~~все трехзначные числа вида $81k$ входят в A.~~

~~$a+b+c \le 27$, $a+b+c \vdots 9$. Если $a+b+c = 9$, то $\frac{n}{a+b+c} \vdots 9$ — верно. Если $a+b+c = 18$~~

~~проверим для $2 \le k \le 12$.~~

~~$k=2$ $162 \vdots 9$ $\frac{162}{9} \vdots 8 \vee$~~

~~3 $\frac{243}{9} \vdots 9 \vee$~~

~~4~~

~~$\times \frac{81}{k}$~~

~~$\overline{a(9-a)}$~~

~~$10a + (9-a)$~~

~~$90a + (81-9a)$~~

Если $2 \le k \le 9$, то $81k = \frac{\times 81}{k}$ $\overline{\quad k}$

~~Тогд~~ Если $2 \le k \le 5$, то $a+b+c = 9$, условие верно

Если $6 \le k \le 9$, то $a+b+c = 18$, условие верно для $k \vdots 2$ (648)

Чистовик

Если $k=10$, $n=\cancel{810}\ \vdots\ 9$ 810, $\frac{810}{9}=90\ \vdots\ 9$

$k=11$, $n=81\cdot11=891\ \vdots\ 18$

$k=12$, $n=81\cdot12=972$, $\frac{972}{18}\ \vdots\ 9$

т.е. подходят числа вида

$81k$, где $k\in\{\overset{1}{2},\overset{2}{3},\overset{3}{4},\overset{4}{5},\overset{5}{6},\overset{6}{8},\overset{7}{10},\overset{8}{12}\}$

$n_2+n_6+n_{-1}=81\cdot23=1863$

Ответ: 1863

$$\begin{array}{r} 81\\ \times\ 23\\ \hline 243\\ 162\ \\ \hline 1863 \end{array}$$

~~Н~~ №2 (продолжение) Черновик

~~$\sin 11\pi x$ | $\frac{2n}{4}$ | $\frac{2n}{6}$ | $\frac{2n}{2}$~~

~~$\sin 15\pi x$~~

~~$\sin 17\pi x$ | $\frac{n}{2}$ | $\frac{n}{3}$ | n~~

~~$k_1\pi x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$~~ ~~$13\pi x = \frac{\pi}{2} + \pi n$~~ ~~$x = \frac{1}{26} + \frac{n}{13}$~~

~~$\frac{1}{2k_1} + \frac{4n}{2k_1}$ | $\frac{2k+1}{26}$ | $\frac{2k+1}{32}$ | $\frac{2k+1}{28}$~~

~~$k_1\pi$~~

$\sin 11\pi x = \sin 15\pi x = \sin 17\pi x$

$\sin 15\pi x - \sin 11\pi x = 0 = \sin 17\pi x - \sin 15\pi x$

~~$\sin 13\pi x \cos 2\pi x = 0 = \sin 16\pi x \cos \pi x$~~

~~$\frac{1}{13}$ $\frac{2}{13}$ … , $\frac{3}{4}$ $\frac{1}{4}$ … $\frac{1}{16}$, $\frac{2}{16}$ … , $\frac{1}{2}$~~

~~Как видно нет общих корней между 0 и 1. (кроме 0 и 1)~~

$\sin 2\pi x \cos 13\pi x = 0 = \sin \pi x \cos 16\pi x$

$\frac{1}{2}$ $\frac{2n+1}{26}$ $\varnothing$ $\frac{2n+1}{32}$

Как видно нет общих корней. значит три функции не пересекаются в одной точке

$\boxed{\text{проверить!}}$ (ОТМЕНА ЗАЧЕРКИВАНИЯ)

~~Если $\cos k_1\pi x = \cos k_2\pi x = 0 = \cos k_2\pi x$~~

~~$\frac{4n+1}{2k_1}$~~ ~~$\frac{4m+1}{2k_2}$~~

~~тоже нет общих корней, т.к. знаменатель (хотя бы один) ~~после сокращения~~ вида $2p$ где p - простое, помимо серии $x = \frac{1}{2}$ для $k = 11$ и $k = 15$. Это единственный раз, когда синусы пересекаются на прямой $y = \pm 1$ значит в ответ попала 1 лишняя область~~

~~Ответ: 92~~

ОТВЕТ: 92