0 644221 410004

64-42-21-41
(123.15)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант ____________________

Место проведения МОСКВА
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников ЛОМОНОСОВ
наменование олимпиады

по МАТЕМАТИКЕ
профиль олимпиады

КИСЕЛЕВА МИХАИЛА РОМАНОВИЧА
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

14:19 - 14:21

+1

Дата
«29» 03 2026 года

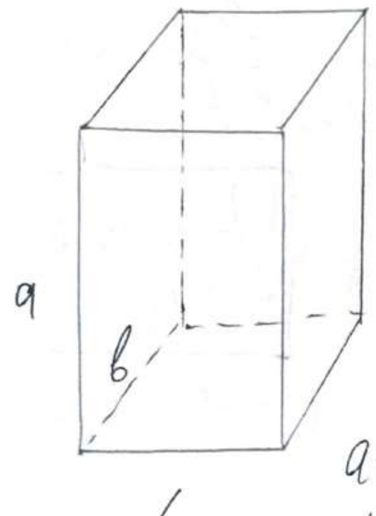
Подпись участника
Киселев

 70 (семьдесят)

64-42-21-41 (123.15)

Черновик

№1



$a \in N$ $a \neq b$
$b \in N$ $b \neq c$
$c \in N$ $a \neq c$

$abc + 2ab + 2ac + 2bc +$
$+ 4a + 4b + 4c = 2026.$
$\min(abc) = ?$

$abc = 2026 - (2ab + 2ac + 2bc + 4a + 4b + 4c)$
нужно найти максимальное значение

$ab(c+2) + 2a(c+2) + 2b(c+2) + 4c + 8 = 2026 + 8$
$(c+2)(ab + 2a + 2b + 4) = 2034$, $(c+2)(b+2)(a+2) = 2034$

$$\begin{array}{r|l} 2034 & 2 \\ 1017 & 3 \\ 339 & 3 \\ 113 & 113 \text{ - простое} \\ 1 & \end{array}$$

$c + 2 \geq 3$
$ab + 2a + 2b + 4 \geq 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 4 =$
$= 12$

Делители 2034 | 1; 2; 3; 6; 9; 18; 113; 226; 113·3;
113·6; 113·9; 2034.

Если $ab + 2a + 2b + 4 = 113$, то $c = 16$ I
Если $ab + 2a + 2b + 4 = 226$, то $c = 7$ II
Если $ab + 2a + 2b + 4 = 339$, то $c = 4$ III
Если $ab + 2a + 2b + 4 = 113 \cdot 6$, то $c = 1$ IV
Если $ab + 2a + 2b + 4 \geq 113 \cdot 9$, то $c \leq 0$ - не натуральное.

Если I $(a+2)(b+2) = 113$ 113 простое, т.е один из множителей 1, и $\left[\begin{array}{l} a = -1 \\ b = -1 \end{array}\right.$

Если II : $(a+2)(b+2) = 226 = 2 \cdot 113 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a+2 = 2 \\ b+2 = 113 \end{cases} \text{ или} \\ \begin{cases} a+2 = 113 \\ b+2 = 2 \end{cases} \end{array}\right.$ какой-то из множителей $= 1$

тогда $\left[\begin{array}{l} a \leq 0 \\ b \leq 0 \end{array}\right.$ противоречие.

черновик

III Если $(a+2)(b+2)=339$, $c=4$, то

$\begin{cases} a+2 \geq 3 \\ b+2 \geq 3 \end{cases}$

$339 = 3 \cdot 113$

простые

единственные ~~вер~~ подходящие случаи:

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a+2=3 \\ b+2=113 \end{cases} \\ \begin{cases} a+2=113 \\ b+2=3 \end{cases} \end{array}\right.$, тогда $\boxed{V = 1 \cdot 111 \cdot 4 = 444}$.

IV Если $(a+2)(b+2) = 6 \cdot 113$, $C=1$ то

$6 \cdot 113 = 2 \cdot 3 \cdot 113$.

$\begin{cases} a+2 \geq 3 \\ b+2 \geq 3 \end{cases}$ тогда

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a+2=6 \\ b+2=113 \end{cases} \\ \begin{cases} a+2=3 \\ b+2=2 \cdot 113 \end{cases} \end{array}\right.$ - либо a и b поменяны местами, т.к. выражение симметрично относительно них.

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=4 \\ b=111 \end{cases} \to V=444 \\ \begin{cases} a=1 \\ b=224 \end{cases} \to V=224 \end{array}\right.$

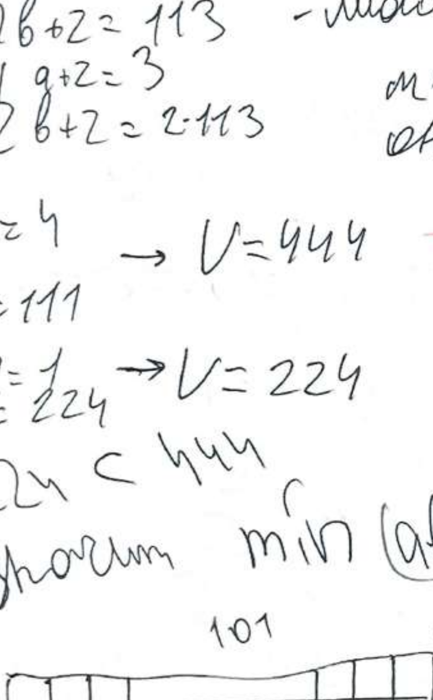
$224 < 444$

Значит $\min(abc) = \min V = $ ~~224~~

№2

101

101



~~Пронумеруем ряды и столбцы от 1 до 101~~

~~Если~~ У вырезанного прямоугольника ~~должна быть~~ хотя бы 1 ~~вершина~~ угловая клетка должна

Черновик

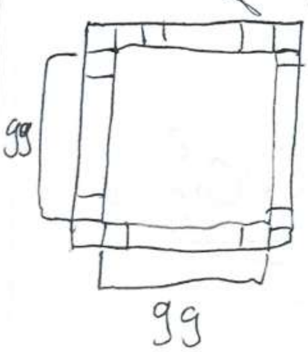
Играть на границе исходного квадрата, предположим, что ни одна крайняя клетка не вырезана, значит вырезаны только внутренние, значит в квадрате дыра, т.е хотя бы 1 клетка на границе ~~...~~

рассмотрим сколько прямоугольников $1 \times n$, $n \geq 2$

есть ~~100~~ 396 вариантов выбрать клетку на границе и не угловую, ~~для каждой~~ ~~...~~ $\exists$ существует

$\boxed{396 \cdot 99}$ таких прямоугольников, имеющих от 1 до 99 внутренних клеток

теперь найдем количество прямоугольников $1 \times n$, у которых состоят лишь из крайних клеток.



~~Из~~ таких прямоугольников, не содержащих угловых клеток $\cancel{\frac{99 \cdot 99}{2}}$ $\boxed{4 \cdot C_{99}^{2}}$

а содержащих угловые клетки: $\boxed{4 \times 200 - 4}$

число кол-во возможных крайних клеток

посчитаны дважды 1×101

~~Если~~ Найдем количество $k \times n$, $k \geq 2$, $n \geq 2$ у таких прямоугольников хотя бы 2 крайние клетки

Чистовик

Если в прямоугольнике нет угловой клетки, то таких прямоугольников $\boxed{4 \times C_{99}^2 \times 99}$

кол-во сторон

выбрать 2 вершины на стороне

выбрать длину

Если в прямоугольнике есть 1 угловая клетка то таких прямоугольников

$\boxed{4 \times 99 \times 99}$

углы длина ширина

Если есть 2 угловых клеток, то таких прямоугольников

$\boxed{4 \times 99}$

~~всего таких прямоугольников~~

Прямоугольников 1х1 всего $\boxed{400}$

Всего случаев

$396 \cdot 99 + 4 \cdot C_{99}^2 + 800 - 4 + 396 \cdot C_{99}^2 +$

$+ 396 \cdot 99 + 4 \cdot 99 + 400 =$

$= 99 \cdot 796 + 400 C_{99}^2 + 1200 =$

$= 99 \cdot 796 + 400 \cdot \frac{98 \cdot 99}{2} + 1200 =$

$= 79600 + 404 + 200 \cdot 99 \cdot 98 = 80004 + 200 \cdot 99 \cdot 98$

64-42-21-41 (123.15)

Черновик

~~89~~

~~98~~ 100·98·98

9800-98

$\boxed{9702}$

$\times$ 9702
~~9~~ 200

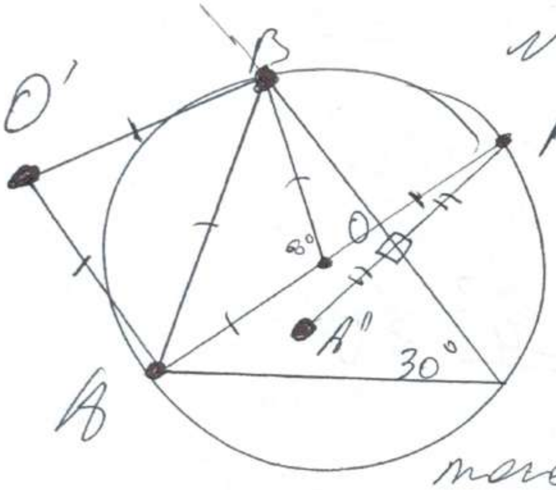
1940400

\+ 1940400
80004

2020404

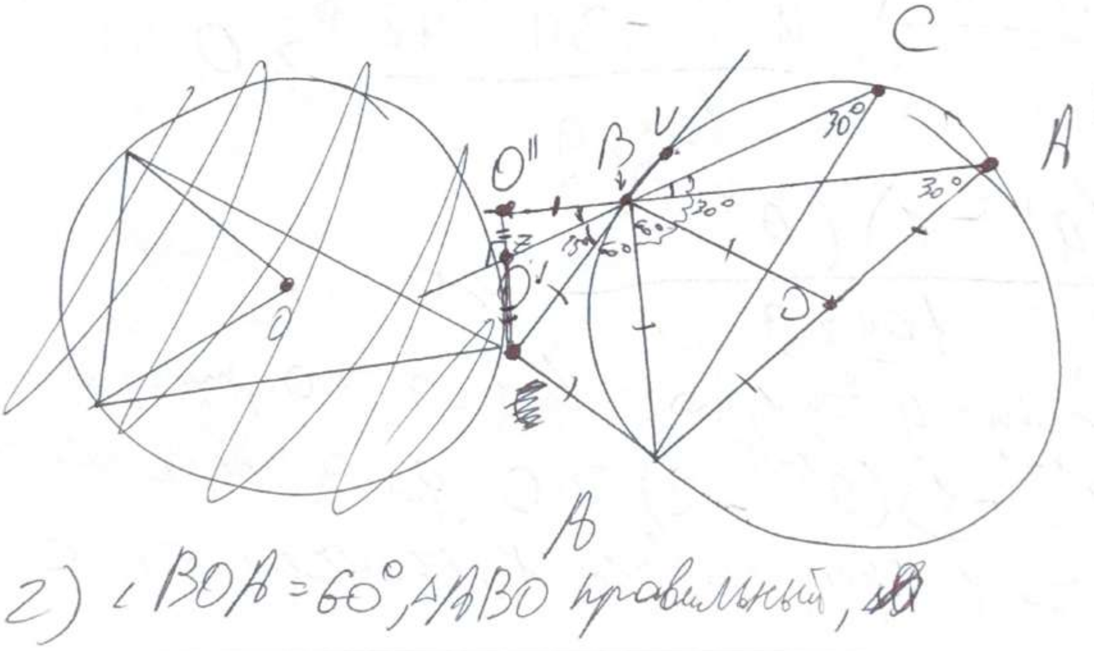
Ответ 2020404 способа

№3



~~Сделаем симметрию относительно~~

1) Отразим O' относительно BC, тогда $\triangle$ C O' перейдет в O'' и тогда точки O'', B и A' должны лежать на 1 прямой



2) $\angle BOA = 60°$, $\triangle ABO$ правильный, ~~AB~~

Чистовик

3) $\triangle O'BZ = \triangle O''BZ \rightarrow \angle O'BZ = \angle OBZ = \angle CBA'$

4) $\angle OBA' = \angle OA'B = \angle ACB = 30^\circ$

5) $\angle O'BZ + \angle O'BA' + \angle CBA' =$

$= 180^\circ$

$2\angle O'BZ = 30^\circ$

$\angle O'BZ = 15^\circ$

6) $\angle ABC = 180^\circ - \angle ABZ = 180^\circ - 60^\circ - 15^\circ =$

$= 105^\circ$

Ответ. $\angle B = 105^\circ$

№4

$$\frac{a^{2x} - 3a^{x+1} + 2a^2}{\log_2 a} \geq 0$$

$\boxed{\begin{cases} a \neq 1 \\ a > 0 \end{cases}}$

$a^2 > 0$, тогда

$$\frac{a^{2x-2} - 3a^{x-1} + 2}{\log_2 a} \geq 0$$

$$\frac{(a^{x-1} - 1)(a^{x-1} - 2)}{\log_2 a} \geq 0$$

Если $a > 1$, то $\log_2 a > 0$, тогда $(a^{x-1} - 1)(a^{x-1} - 2) \geq 0$ для любого $a > 1$ существует x, начиная с

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Чистовик

№6 продолжение

~~$\cos(58^\circ+2x)\cos 3^\circ = 2\cos x\cos 61^\circ\cos(58^\circ+x)$~~

~~$(\cos^2(29^\circ+x)-\sin^2(29^\circ+x))\cos 3^\circ = 2\cos x\cdot\frac{1}{2}(\cos 119^\circ+\cos(x+3^\circ))$~~

~~$(2\cos^2(29^\circ+x)-1)\cos 3^\circ = \cos x(\cos 119^\circ +$~~

~~$+\cos x\cos 3^\circ - \sin x\sin 3^\circ)$~~

~~$(2\cos^2(29^\circ+x)-1)\cos 3^\circ = \cos x\cdot 2\cos 61^\circ\cdot 2(\cos 58^\circ\cos x -$~~

~~$-\sin 58^\circ\sin x)$~~

~~$(2\cos^2(29^\circ+x)-1)\cos 3^\circ = \cos x\cdot\cos 61^\circ -$~~

$(\cos 58^\circ\cos 2x - \sin 58^\circ\sin 2x)\cos 3^\circ = 2\cos x\cos 61^\circ \times$

$\times\cos(58^\circ+x)$

$(\cos 58^\circ(2\cos^2 x-1) - 2\sin x\cos x\sin 58^\circ)\cos 3^\circ =$

$= 2\cos x\cos 61^\circ \times(\cos 58^\circ\cos x - \sin 58^\circ\sin x)$

~~$\cos x$~~

~~$\cos 58^\circ(2$~~

$2\cos^2 x\cos 58^\circ\cos 3^\circ - \cos 58^\circ\cos 3^\circ - 2\sin x\cos x\sin 58^\circ\cos 3^\circ$

$= 2\cos^2 x\cos 61^\circ\cos 58^\circ - 2\sin x\cos x\sin 58^\circ\cos 61^\circ$

$2\cos^2 x\cos 58^\circ(\cos 61^\circ\cos 58^\circ + \sin 61^\circ\sin 58^\circ) -$

$-\cos 58^\circ(\cos 61^\circ\cos 58^\circ + \sin 61^\circ\sin 58^\circ - 2\sin x\cos x\sin 58^\circ \times$

$\times(\cos 61^\circ\cos 58^\circ + \sin 61^\circ\sin 58^\circ) = 2\cos^2 x\cos 61^\circ\cos 58^\circ -$

$-2\sin x\cos x\sin 58^\circ\cos 61^\circ$

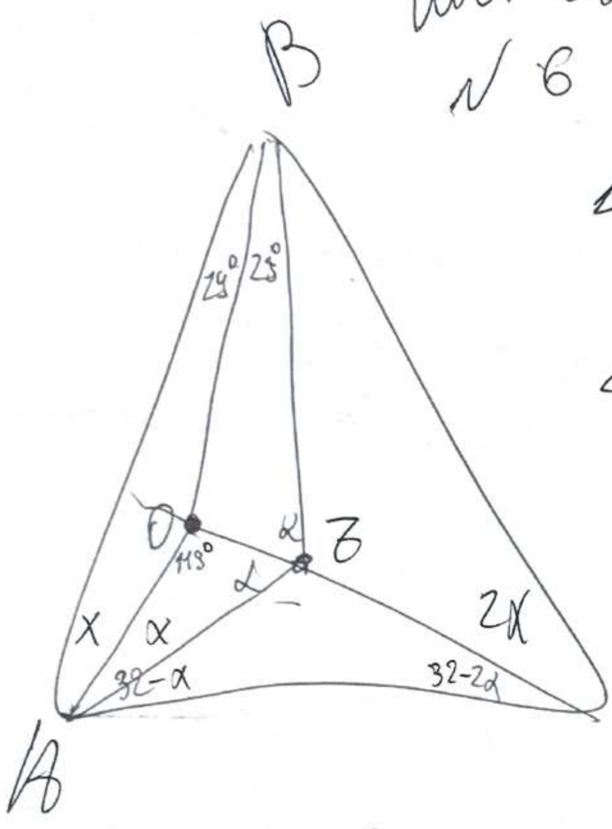
$\boxed{\cos^2 x = a,\ \sin x = b}$,

~~$2a^2\cos 58^\circ(\cos 61^\circ\cos 58^\circ + \sin 61^\circ\sin 58^\circ) - \cos 58^\circ(\cos 61^\circ\cos 58^\circ) =$~~

~~$= -\cos 58^\circ\sin 61^\circ\sin 58^\circ = 2a^2\cos 61^\circ\cos 58^\circ - 2ab\sin$~~

Чистовик

№ 6



Z BZ биссектриса $\angle ABC$

$\angle OBZ = x$

$\angle ABO = \angle OBZ = 29°$

ZO биссектриса $\angle AZB$ –

$\angle AOB = 180° - x - 29°$

~~$180° - x - 29 =$~~

$\angle AOB = 2\alpha + x + 29$

$180° - x - 29 = 2\alpha + x + 29°$

$122 = 2x + 2\alpha$

$\alpha + x = 61°$

$\angle AOC = 119°$

$32 - x + 32 - 2x + 119 = 180°$

$-3x = -1°$

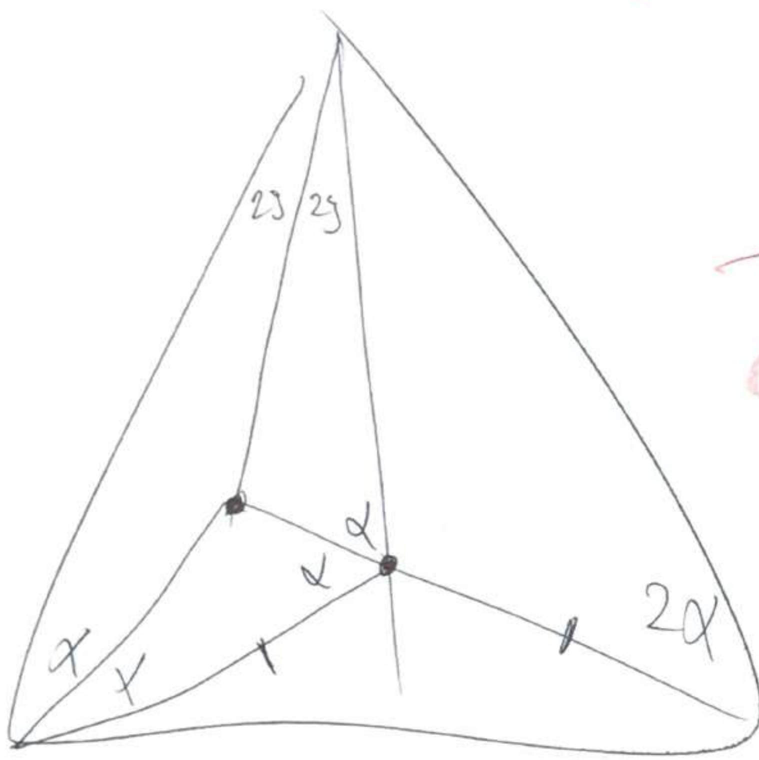
$x = \left(\frac{1}{3}\right)°$

$\angle AOB = \left(150\frac{2}{3}\right)°$

$\frac{x}{\angle AOB} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{452}{3}} = \frac{1}{452}$

Ответ $1/452$

Черновик



Чистовик

которого $a^{x-1}-2>0$ и $a^{x-1}-1>0$, пусть это X, тогда в решения будет входить $(X;+\infty)$ и ~~такие~~ такое a не подходит

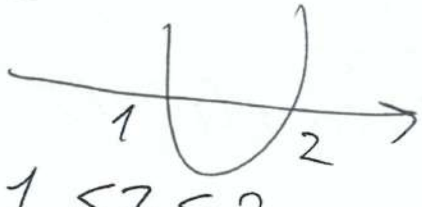
~~Значит~~ Значит $0<a<1$, тогда

$\log_2 a<0$ и

$(a^{x-1}-1)(a^{x-1}-2)\le 0$

$a^{x-1}=z$

$(z-1)(z-2)\le 0$



$1\le z\le 2$

$1\le a^{x-1}\le 2$ $\boxed{0<a<1}$

~~$\lg 1\le \lg a^{x-1}\le \lg 2$~~

$\log_2 1\le \log_2 a^{x-1}\le \log_2 2$

$0\le \log_2 a^{x-1}\le 1$

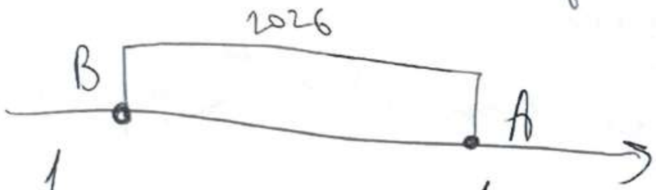
$0\le (x-1)\log_2 a\le 1$, $\log_2 a<0$

$\begin{cases}(x-1)\log_2 a\geq 0\\ (x-1)\log_2 a\le 1\end{cases}$ $\begin{cases}x-1\le 0\\ (x-1)\geq \frac{1}{\log_2 a}\end{cases}$ $\begin{cases}x\le 1\\ x\geq \frac{1}{\log_2 a}+1\end{cases}$

Чистовик

множество решений данного неравенства будет представлять отрезок длины 2026

только тогда, когда



$\frac{1}{\log_2 a}+1$ $\qquad$ 1

$AB = 2026$.

$\left|\frac{1}{\log_2 a}+1-1\right| = 2026$

$\left|\frac{1}{\log_2 a}\right| = 2026$, т.к. $\log_2 a < 0$

$\frac{1}{\log_2 a} = -2026$ $\qquad$ $\frac{1}{-2026} = \log_2 a$

$a = 2^{-\frac{1}{2026}}$

Ответ: При $a = 2^{-\frac{1}{2026}}$.

№5

$\max(\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z) = ?$

$0 < x, y, z < \frac{\pi}{2}$, $x+y+z = \frac{\pi}{2}$,

$x+y = \frac{\pi}{2} - z$

$\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x-y\right) =$

Чистовик

$$= \frac{\sin x \sin y \sin\left(\frac{\pi}{2} - x - y\right)}{\cos x \cos y \cos\left(\frac{\pi}{2} - x - y\right)} = \frac{\sin x \sin y \cos(x+y)}{\cos x \cos y \sin(x+y)} =$$

$$= \cancel{\frac{\sin x \sin y (\cos x \cos y - \sin x \sin y)}{\cos x \cos y (\sin x \cos y + \cos x \sin y)}} =$$

$$= \cancel{\frac{\sin x \sin y}{\sin x \cos y + \cos x \sin y}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\left(\cos(x-y) - \cos(x+y)\right)\cos(x+y)}{\frac{1}{2}\left(\cos(x+y) + \cos(x-y)\right)\sin(x+y)} =$$

$$= \frac{\cos(x-y)\cos(x+y) - \cos^2(x+y)}{\cos(x+y)\sin(x+y) + \cos(x-y)\sin(x+y)} =$$

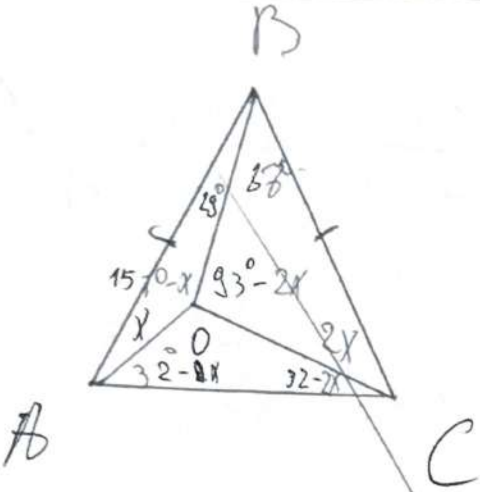
$$= \frac{\frac{1}{2}(\cos 2x + \cos 2y) - \cos^2(x+y)}{\cos(x+y)\sin(x+y) + \cos(x-y)\sin(x+y)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(\cos^2 x - \sin^2 x + \cos^2 y - \sin^2 y) - \cos^2(x+y)}{\cos(x+y)\sin(x+y) - \cos(x-y)\sin(x+y)} =$$

$$= \frac{1 - \sin^2 x - \sin^2 y - \cos^2(x+y)}{\cos(x+y)\sin(x+y) - \cos(x-y)\sin(x+y)} =$$

$$= \frac{-\sin^2 x - \sin^2 y - \sin^2(x+y)}{\frac{1}{2}\sin(2x+2y) - \frac{1}{2}(}$$

№6 Черновик



$\angle A = \angle C = 32^\circ$

$\angle OBC = 3\angle ABO$

1) $\angle ABC = 180^\circ - 64^\circ = 116^\circ$

$\angle ABO = \frac{1}{4}\cdot 116^\circ = 29$

$\angle CBO = 87^\circ$

$\angle BAO = x,\ \angle BCO = 2x$

$\angle OAC = 32^\circ - x$

$\angle OCA = 32^\circ - 2x$

$\angle AOB = 151 - x$

$\angle BOC = 93^\circ - 2x$

2) $S_{AOB} = \frac{1}{2} AB\cdot BO \sin 29^\circ = \frac{1}{2} AB\cdot AO\cdot \sin x$

$S_{OBC} = \frac{1}{2} BO\cdot BC\cdot \sin 87^\circ = \frac{1}{2} CB\cdot CO \sin 2x$

$$\frac{S_{AOB}}{S_{OBC}} = \frac{\sin 29^\circ}{\sin 87^\circ} = \frac{AO}{CO\cdot 2\cos x}$$

3) $\triangle AOC$

$$\frac{\sin(32^\circ - x)}{CO} = \frac{\sin(32^\circ - 2x)}{AO}$$

$$\frac{AO}{CO} = \frac{\sin(32^\circ - 2x)}{\sin(32^\circ - x)} = \frac{2\cos x \sin 29^\circ}{\sin 87^\circ}$$

$\sin(32^\circ - 2x)\sin 87^\circ = 2\cos x \sin 29^\circ \sin(32^\circ - x)$

$\cos(58^\circ + 2x)\cos 3^\circ = 2\cos x \cos 61^\circ \cos(58^\circ + x)$

$(\cos 58^\circ \cos 2x - \sin 58^\circ \sin 2x)\cos 3^\circ = 2\cos x \cdot \cos 61^\circ \cdot (\cos 58^\circ \cos x - \sin 58^\circ \sin x)$

$\cos(58^\circ + 2x)\cos 3^\circ = 2\cdot\frac{1}{2}(\cos(119^\circ + x) + \cos(x + 3^\circ))\cos x$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)$

Черновик

$\cos\frac{\pi}{2}$ $\cancel{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}$

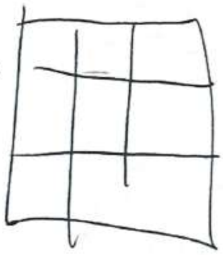
$x^2=3x+2$

$(x-1)(x-2)$

C_n^2 $\cos\frac{\pi}{2}$ $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)$

$\frac{x^\circ}{151^\circ-x^\circ}$ $\frac{2\alpha+29+x}{x}=?$

$\frac{122-2\alpha+29+\alpha}{x}=$ 87



$9+12+6+4=$

$=27+4=31$

$180^\circ-29-x=$

$=151-x$

$\sin$

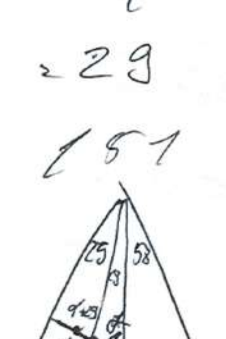
$180^\circ-64=$

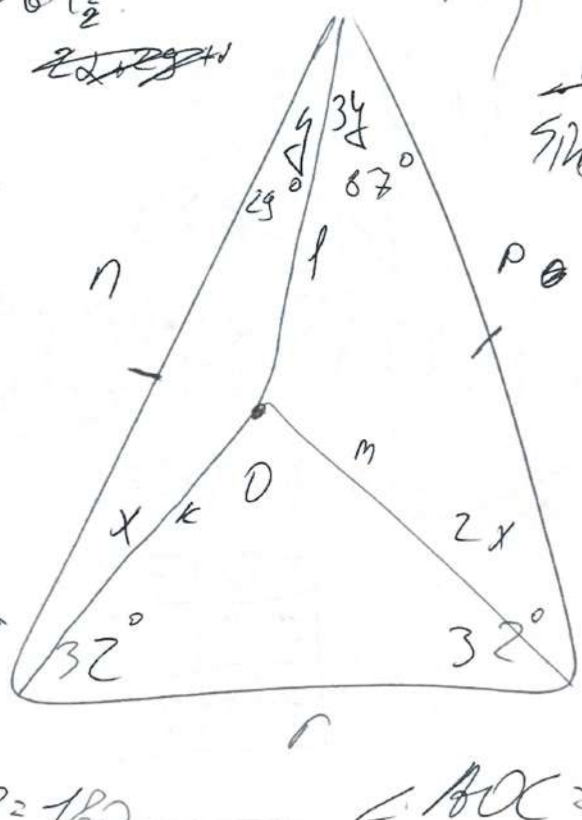
$=116$

$\frac{116}{4}=$

$=29$

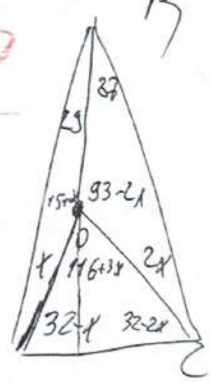
151





$\frac{n}{\sin(180^\circ-29^\circ-x^\circ)}=\frac{l}{\sin(x^\circ)}$

$\frac{n}{l}=\frac{\sin(29^\circ+x^\circ)}{\sin x^\circ}$



C A

$2\alpha+2x+58=180$

$2\alpha+2x=122$ $\alpha=61-x$

$\angle BOC=180^\circ-64^\circ+3x=$

$=116^\circ+3x$

Черновик

$2(ab+bc+ac+2a+2b+2c)$

$\frac{2a+2b+2c}{3} \geq 2\sqrt[3]{abc}$

$ab+bc+ac$

$ab+2b+2a+4$

$b(a+2)+2(a+2)$

$a(b+2)+c(b+2)+ac+2b$

$(a+c)(b+2)+ac+2b$

$(a+b)^3=a^3+3a^2+3a+1$

$a^3+1+3a(a+1)$

$(a+b+c)^2-a^2-b^2-c^2+4(a+b+c)$

$(a+b+c)^3=(a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac))(a+b+c)$

$=a^3+ab^2+ac^2+2a^2b+2abc+2a^2c+$

$+b^3+a^2b+bc^2+2ab^2+2b^2c+2abc$

$abc+2ab+2bc+2ac+4a+4b+4c=$

$=ab(c+2)+2b(c+2)+2a(c+2)+4c+8=2026+8$

$=\cancel{ab(c+2)}$

$(c+2)(ab+2b+2a+4)=2034$

2034	2
1017	3
339	3
113	

пр

11 2024

~~2024~~ 2224 + 2·14 + 2·2024 +

+2·2024 +

+ 4+4+4·224

= 9·224+10 =

224·9

2016+10

3	2	1
2	2	1
1	1	1