0 236030 060006

23-60-30-08
(124.38)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 11 класс 1

выход 13:05–13:12

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Клименко Матвея Антоновича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«29» марта 2026 года

Подпись участника

75 (семьдесят пять)

23-60-30-08
(124,38)

№1

$\sqrt{6(1-tg^2x)} = 4\sin x$ $\quad\sin x > 0$

$\sqrt{6-}$ Пусть $\sin x = t$,

тогда $tg^2x = \frac{t^2}{\cos^2x} = \frac{t^2}{1-\sin^2x} = \frac{t^2}{1-t^2}$

$\sqrt{6\left(1-\frac{t^2}{1-t^2}\right)} = 4t$

$\sqrt{6\left(\frac{1-t^2-t^2}{1-t^2}\right)} = 4t$

$\sqrt{6\left(\frac{1-2t^2}{1-t^2}\right)} = 4t$

№1

$\sqrt{6(1-tg^2x)} = 4\sin x$ $\quad$ sin

№2 Из условие следует, что если число $\in A$, то оно кратно 9, тогда сумма его цифр кратна 9, тогда число кратно 81.

Тогда все числа из A лежат ~~в~~ $81 \cdot k$.

Какая сумма цифр может быть у таких чисел, раз оно кратно 9 и числа - трёхзначные, ~~то~~ то 9, 18, 27.

Сумма 27 может быть только 999, но 999 не кратно 81, поэтому сумма цифр либо 9 либо 18.

$81 \cdot k / 9 = 9k \vdots 9$

$\Rightarrow$ если у ~~числа~~ $81 \cdot k$ сумма цифр $= 9$, то оно $\in A$. Если у числа $81k$ сумма цифр 18, то $81 \cdot k / 18 = \frac{9k}{2}$, то есть для принадлежности A нужно k - чётное.

$\Rightarrow$ ~~A~~ $81 \cdot k \in A$, с суммой цифр 9, и $81 \cdot k \in A$, с суммой цифр 18, и чётным k.

$81 \cdot 2 = 162$ ($m = 9$, m - сумма цифр).

$81 \cdot 3 = 243$ ($m = 9$, m - сумма цифр).

$81 \cdot 4 = 324$ ($m = 9$)

$81 \cdot 5 = 405$ ($m = 9$)

$81 \cdot 6 = 486$ ($m = 18$, $k = 6$)

$81 \cdot 7 = 567$ ($m = 18$, $k \not\vdots 2$) $\Rightarrow \notin A$

$81 \cdot 8 = 648$ ($m = 18$, $k \vdots 2$)

$81 \cdot 9 = 729$ ($m = 18$, $k \not\vdots 2$) $\Rightarrow \notin A$

$81 \cdot 10 = 810$ ($m = 9$)

$81 \cdot 11 = 891$ ($m = 18$, $k \not\vdots 2$) $\Rightarrow \notin A$

$81 \cdot 12 = 972$ ($m = 18$, $k \vdots 2$).

Сумма 2-ого, 5-ого и предпоследнего:

$243 + 486 + 810 = 1533$

Ответ: 1533

№1

$\sqrt{6(1-tg^2 x)} = 4 \sin x$

ОДЗ: $\cos x \neq 0$

Исходное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} \sin x \geq 0 & (1) \\ 6(1-tg^2 x) = 16 \sin^2 x & (2) \end{cases}$$

Разделим уравнение на два, выразим tg через синус:

$$tg^2 x = \frac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x}$$

Замена: пусть $t = \sin^2 x$

т.к. $\sin x \geq 0$ и $\cos x \neq 0$, то

$t \in [0; 1)$.

Уравнение (2) разделим на 2:

$3\left(1-\frac{t}{1-t}\right) = 8t \Leftrightarrow \frac{3(1-2t)}{1-t} = 8t \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3-6t = 8t - 8t^2 \Leftrightarrow 8t^2 - 14t + 3 = 0$

~~$8t^2-14t+3=0$~~

~~$D = (-14)^2 - 4\cdot 3\cdot 8 = 169 - 96 = 73$~~

~~$t_{1,2} = \frac{14 \pm \sqrt{73}}{16}$~~

~~$t_1 = \frac{14+\sqrt{73}}{16}$~~ – не удовл $t \in [0;1)$

~~$t_2 = \frac{14-\sqrt{73}}{16}$~~

~~$\sin^2 x = \frac{14-\sqrt{73}}{16}$~~

Корни уравнения $8t^2 - 14t + 3 = 0$:

$t_1 = \frac{3}{2}$ – не удовл, $t < 1$

$t_2 = \frac{1}{4}$;

возвращаемся к замене с учётом $\sin x \geq 0$:

$\sin^2 x = \frac{1}{4}$ $\quad \sin x = -\frac{1}{2}$ – не удовл

$\sin x = \pm\frac{1}{2}$ $\quad \sin x = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \ k \in Z$

$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \ k \in Z$

23-60-30-08 (124.38)

Ответ: $\frac{\pi}{6}+2\pi k, k\in Z$; $\frac{5\pi}{6}+2\pi k, k\in Z$.

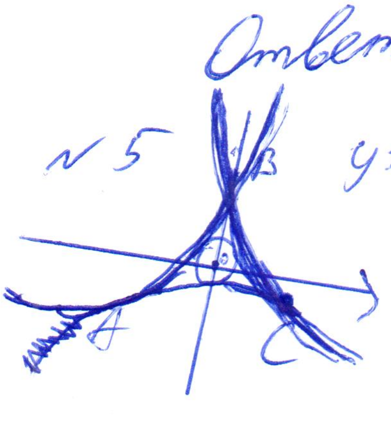
№ 3

Кол-во способов зафиксировать вершины у прямоуг угла равно 9^3, так как координат $[-4;4]$, а кол-во способов зафиксировать к каким осям параллельны катеты $=3$. Тогда задача сводится к прямым треугольникам в прямоугольнике $9\cdot9$, причём вершина у прямого угла зафиксирована, в такой формулировке остальные вершины находятся в строке и столбце вершины у прямого, то вариантов их выбрать будет $8\cdot8$.

$9^3\cdot8^2\cdot3=139968$

Ответ: 139968

№ 5



$y=Cx^2$

Решение:

Пусть параболы пересекаются в точках A, B, C.

Пусть O – центр $\triangle ABC$.

По условию треугольник „крутой", симметричный

$\Rightarrow$ как и ABC, он переходит сам в себе при повороте на $\frac{2\pi}{3}$ относительно O.

Тогда если ввести координаты ПО$(x;y)$ с центром O, то OC будет под углом $\frac{\pi}{6}$ по x и $\frac{\pi}{3}$ по y с учётом знака $-\frac{\pi}{3}$.

$OC = R \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}$ (так как $A \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}$ и $A = 1$).

~~Получается, что $C = (OC \cdot \cos\frac{\pi}{6}$~~

~~$C = (-OC \cdot \cos\frac{\pi}{3}$~~

Получается $C = (OC \cdot \cos\frac{\pi}{6}; -OC \cdot \cos\frac{\pi}{3})$

$= (\ \frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{6})$

$\Rightarrow -\frac{\sqrt{3}}{6} = k \cdot \frac{1}{2}$

$\Rightarrow k = \frac{-\sqrt{3}}{3}$ – угол наклона касательной OC (касательная, так как параболы в C встречаются, а потом расходятся).

Получается, что если $f(x) = ax^2 + b$ уравнение параболы (нижней), так как вершина лежит на Oy, то $0 \cdot x$, тогда $f'(C) = k$;

$\Rightarrow 2a \cdot \frac{1}{2} = \frac{-\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow a = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Если найдём b, то решим задачу.

Остаётся подставить в уравнение $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x^2 + b$ в точку C:

$-\frac{\sqrt{3}}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + b$

$\Rightarrow b = \cancel{\frac{-\sqrt{3}}{12}} \cancel{\frac{\sqrt{3}}{6}} \frac{\sqrt{3}}{12} - \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{-\sqrt{3}}{12}$

Ответ: $-\frac{\sqrt{3}}{12}$