0 020880 220008

02-08-80-22
(124.16)

+1 лист

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 11 класс 1 вариант

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников им. Ломоносова
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Кожемякина Данилы Вячеславовича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«29» марта 2026 года

Подпись участника

85 (Восемьдесят пять) [illegible]

02-08-80-22
(124.16)

[illegible] чистовик

① $\sqrt{6(1-tg^2x)}=4\sin x$ ОДЗ $\sin x\geq 0$

$6(1-tg^2x)=16\sin^2x$

$3\left(1-\frac{\sin^2x}{1-\sin^2x}\right)=8\sin^2x$

$\sin^2x=t$

$3\left(1-\frac{t}{1-t}\right)=8t$

$3-\frac{3t}{1-t}=8t$

$\frac{3(1-t)-3t-8t(1-t)}{1-t}=0$ $t\neq 1$

$3-3t-3t-8t+8t^2=0$

$8t^2-14t+3=0$

$D=14^2-4\cdot 8\cdot 3=196-96=100$

$t_{12}=\frac{14\pm\sqrt{100}}{16}=\frac{14\pm 10}{16}$

$\left[\begin{array}{l} t=\frac{24}{16}=\frac{3}{2}\leftarrow t=\sin^2x\leq 1\Rightarrow \text{не подходит} \\ t=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}\Rightarrow \sin^2x=\frac{1}{4}\Rightarrow \sin x=\frac{1}{2} \end{array}\right.$

(т.к. по ОДЗ ≥ 0)

$\boxed{\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z} \\ x=\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z} \end{array}}$ $\leftarrow$ ответ

② $S(A_0)$ - сумма цифр A_0 (A_0 - число из A)

$\frac{A_0}{S(A_0)}=9\cdot k\Rightarrow A_0=9k\cdot S(A_0)$

$\vdots 9\Rightarrow A_0\vdots 9\Rightarrow S(A_0)\vdots 9$

$\Rightarrow 9kS(A_0)\vdots 81\Rightarrow A_0\vdots 81$

Интересны трехзначные числа $\vdots 81$:

	сумма цифр			сумма цифр	
162	9		567	18	$\not\vdots 2$ не подх
243	9		648	18	$\vdots 2$
324	9		729	18	$\not\vdots 2$
405	9		810	9	
486	18	$\vdots 9$ и $\vdots 2$	891	18	$\not\vdots 2$
			972	18	

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

чистовик

Подходят:

162, 243, 324, 405, 486, 648, 810, 972

все трех зн. в порядке возрастания

243+486+810 = 1539

(3) У всех точек: $|x|, |y|, |z| \le 4$

Заметим, что все Δки бьются на 3 группы:

1) катеты $\parallel x$ и y
2) ... $\parallel x$ и z
3) $\parallel z$ и y

очевидно, Δ в них не пересекаются

и у того, что все координаты симметричные $\# \Delta$ каждого вида одинаковое $\Rightarrow$ найдем вид 1

2 катета $\parallel x$ и y задают плоскость $\parallel (x, y)$ $\Leftarrow$ у такой п-ти есть 9 вариантов координаты по z $([-4, 4])$

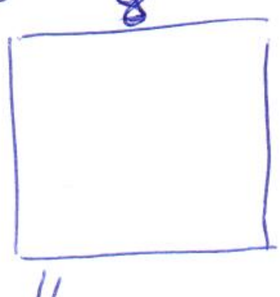
плоскость по осям

все они дают новые Δ

$\Rightarrow$ достаточно найти в 1 пл-ти

8

8



$\Downarrow$

9×9 точек (узлов)

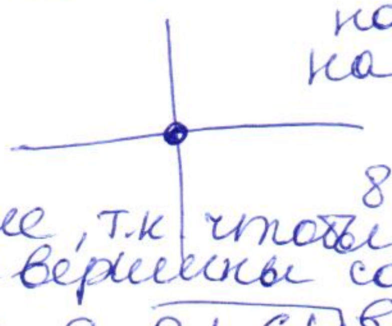
квадрат 9 на 9 хотим выбрать прямоуг Δ

Заметим, что надо выбрать вершину с прямым углом: 81 способ, а 2 вершины лежат на таком крестике:

на верт: 8 вар.

на гор. : 8 вар

$\Rightarrow$ всего



$81 \cdot 8 \cdot 8 = 81 \cdot 64$

(Все Δ разные, т.к чтобы совпали, надо, чтобы все вершины совпали)

$\Rightarrow$ всего: $\underset{\text{группа}}{3} \cdot \underset{\text{коорд по 3-ей оси}}{9} \cdot \overline{81 \cdot 64}^{\text{в пл-ти}} =$

$= 139968$

чистовик

(4) $x=0$: $\sin(15\pi\cdot 0)=0$ $x=1$: $\sin(15\pi)=\sin\pi=0$
$\sin(17\pi\cdot 0)=0$ $\sin(17\pi)=\sin\pi=0$
$\sin(13\pi\cdot 0)=0$ $\sin(13\pi)=\sin\pi=0$

Посмотрим на пересечения:
$\sin(13\pi x)=\sin(15\pi x)$ и остальные
Когда $\sin\alpha=\sin\beta$?
1) $\alpha=\beta+2\pi k$
2) $\alpha+\beta=\pi\cdot m$

1) $15\pi x=13\pi x+2\pi k$
$2\pi x=2\pi k$
$x\in[0,1]$ $\Rightarrow$ это случаи $x=0,1$
у 15 и 17 также $\leftarrow k\in\mathbb{Z}$
$\underline{17\pi x-13\pi x=2\pi k}$ / новая точка
$4\pi k$ $x=\frac{1}{2}$

2) $15\pi x+13\pi x=\pi m$ $\leftarrow$ m-нечетно.
$28x=m \Rightarrow x=\frac{m}{28}$ $\frac{1}{28},\frac{3}{28}\ldots\frac{27}{28}$
$\underbrace{}_{\text{единица}}$

у остальных:
$x=\frac{m}{30}$ 14 точек Выпишем и поймем сколько пересечений в каждой точке:
$x=\frac{m}{32}$ $\frac{1}{28}\ldots\frac{27}{28}$ - где есть 7 по 2 пересеч. (не сократилась в знам)
(m-неч)

сократилась:
$\cancel{\frac{0}{28}},\frac{7}{28},\cancel{\frac{14}{28}},\frac{21}{28},\cancel{\frac{28}{28}}$ 12 точек ровно 2 пересечения
2 точки
0 $\frac{1}{4}$ $\cancel{\frac{2}{4}}$ $\frac{3}{4}$ 1 $\leftarrow$ интересные точки, в которых возможно 3 пересечения

у $\frac{m}{30}$ смотрим 5-ку в знам:
$\cancel{\frac{0}{30}},\frac{5}{30},\frac{15}{30},\frac{25}{30}$, 4 точки
$\frac{5}{30}=\frac{1}{6}$, $\frac{15}{30}=\frac{1}{2}$, $\frac{25}{30}=\frac{5}{6}$

у $\frac{m}{32}$ (т.к $m\not\vdots 2$) ничего сократиться не может
$\Rightarrow$ только $\frac{15}{30}$ надо убрать

чистовик

Т.е.: $\frac{1}{28}, \frac{3}{28} \dots \frac{27}{28}$ – 14 точек
2 пересеч.

$\frac{1}{30}, \dots, \frac{13}{30}, \frac{17}{30} \dots, \frac{29}{30}$ – 14 точек
2 пересеч

$\frac{1}{32}, \dots, \frac{31}{32}$ – 16 точек
2 пересеч

$0, \frac{1}{2}, 1$ – 3 пересечения

То есть наша картинка планарный граф и этих точек + граница:

ф-ла Эйлера:
В+Г−Р=2

и пересечений

Вершины: $4 + 14 + 14 + 16 + 3 =$
$\uparrow$
граница
$= 51$

#Ребер найдем и степеней вершин:

$(4 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + 3 + (14 + 14 + 16) \cdot 2)$
$\uparrow$ для граница
$\uparrow$ точки 1 и 0 лежат на границе

Наши графики еще пересекают границу:
это происх. в точках $\ell \cdot \frac{\pi}{2}$ ($\ell \vdots 2$)

$13\pi x = \ell \cdot \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\ell}{26}$ ← 13 точек

тут пересек. 2 графика → $x = \frac{\ell}{30}$ ← 15 точек

$x = \frac{\ell}{34}$ ← 17 точек

есть пересечение по $\frac{1}{2}$

Напишем ф-лу Эйлера: В+Г−Р=2

В: $13 + 15 + 17 - 2 + 4 + 14 + 16 + 2 =$
$= 45 + 30 + 4 = 79$

чистовик

сумма степеней:

$4\cdot2+2\cdot5+12\cdot4+16\cdot4+14\cdot6+$
$+1\cdot8+14\cdot2+16\cdot2$

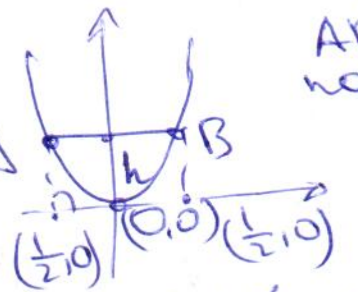
$\Rightarrow$ ребер $=\frac{\sum ст}{2}=4+5+24+32+42$
$+4+14+16=33+74+34=$
$=141$

$\Rightarrow Г=\cancel{}\ P+2-B=141+2-79=64$

Вычтем большую бесконечную грань

$\Rightarrow$ ответ: $\underline{\underline{63}}$

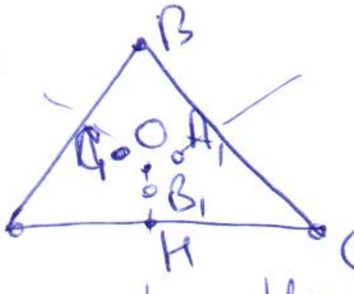
(5)



AB=1

парабола симметр. относит. OY $\Rightarrow$ проекции A и B на OX на р-ии $\frac{1}{2}$

$\Rightarrow B\left(\frac{1}{2},\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot c\right)\Rightarrow h=\frac{c}{4}$



Треугольник правильный $\Rightarrow$ и соообр. симметрии C_1 лежит на серпере к AB (и остальные аналогично)

Наша окружность — опис. для $\triangle A_1B_1C_1$

$BH=\frac{\sqrt3}{2}$

$OH=\frac{1}{3}BH=\frac{\sqrt3}{6}$

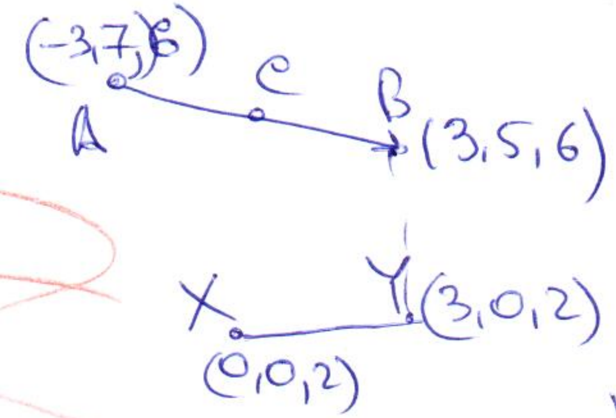
и симметрии: $OC_1=OA_1=OB_1$

$\Downarrow$ надо найти R; OB_1 — R

$R=OH-B_1H=OH-h=$

$=\boxed{\frac{\sqrt3}{6}-\frac{c}{4}}\leftarrow$ ответ чистовик.

(6)



Тень: берем точку на AB (C), пересекаем CX и CY с пл-тью $z=0$, точки X_C и Y_C => область $XX_CY_CY_0$ затененная

Заметим, что просто хотим найти объединение всех таких проекций областей

~~Такое преобразование относит. отрезка XY перенесет отрезок AB в другой на пл-ти $z=0$, концы которого X_B и Y_A => надо найти $S(X_0X_BY_AY_0)$ (это так потому что это прямая это пересечение п-ти ABYX и $z=0$, A~~

~~Это объединение содержится в~~

Найдем: A_xB_x и A_yB_y

AX: $\frac{x}{-3}=\frac{y}{7}=\frac{z-2}{4}$, $z=0 \Rightarrow \frac{x}{-3}=-\frac{1}{2} \Rightarrow x=\frac{3}{2}$

$\frac{y}{7}=-\frac{1}{2} \Rightarrow y=-\frac{7}{2}$

BX: $\frac{x}{3}=\frac{y}{5}=\frac{z-2}{4}$, $z=0 \Rightarrow x=-\frac{3}{2}$

$y=-\frac{5}{2}$

AY: $\frac{x-3}{-6}=\frac{y}{7}=\frac{z-2}{4}$, $z=0$, $y=-\frac{7}{2}$

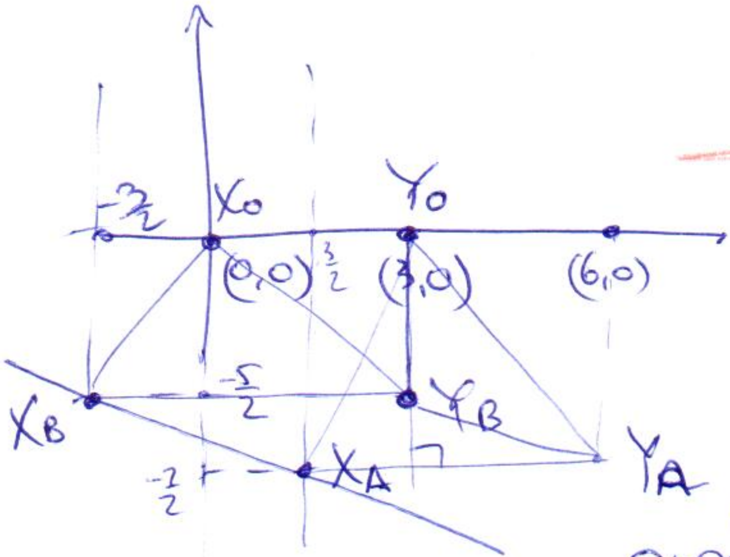
$x=6$

$\frac{x-3}{-6}=-\frac{1}{2} \Rightarrow x-3=3$

чистовик

ВУ: $\frac{x-3}{0}=\frac{y}{5}=\frac{z-2}{4}$ $\quad x=3$, $y=-\frac{5}{2}$

В пл-ти $z=0$:



$X_BX_A \parallel Y_BY_A$

$X_BY_B \parallel X_AY_A$

Любая точка с отрезка попадет в область $\Rightarrow$ осталось найти S

$S=S(X_0Y_0Y_BX_B)+S(Y_0Y_BY_A)+S(X_BY_BY_AX_A)=$

$=+\frac{5}{2}\cdot\left(\frac{3+3+\frac{3}{2}}{2}\right)+\frac{\frac{5}{2}\cdot 3}{2}+1\cdot\frac{9}{2}=$

$=\frac{5}{2}\cdot\frac{15}{4}+\frac{15}{4}+\frac{9}{2}=\frac{75}{8}+\frac{30}{8}+\frac{36}{8}=$

$=\boxed{\frac{141}{8}}\leftarrow$ ответ.

(8) $8x^2\log_a x-\log_x a-2x\le 0$

$a,x>0$ ОДЗ
$a,x\ne 1$

$8x^2\cdot\frac{\log_2 x}{\log_2 a}-\frac{\log_2 a}{\log_2 x}-2x\le 0$

$\frac{8x^2\cdot\log_2 x}{\log_2 a}\le 2x+\frac{\log_2 a}{\log_2 x}$

$\frac{8x^2\cdot\log_2^2 x}{\log_2 a\cdot\log_2 x}\le\frac{2x\cdot\log_2 x\cdot\log_2 a+\log_2^2 a}{\log_2 x\cdot\log_2 a}$

чистовик

~~...~~

$$\frac{9\log_2^2 x\cdot x^2}{\log_2 a\cdot\log_2 x} \le \frac{2x\log_2^2 x\cdot\log_2 a + \log_2^2 x\cdot x^2+\log_2^2 a}{\log_2 a\cdot\log_2 x}$$

$$\frac{(3\log_2 x\, x)^2}{\log_2 a\log_2 x} \le \frac{(\log_2 x\cdot x+\log_2 a)^2}{\log_2 a\log_2 x}$$

$$\frac{(\log_2 x\cdot x+\log_2 a+3\log_2 x\cdot x)\cdot(\log_2 x\cdot x+\log_2 a-3\log_2 x\cdot x)}{\log_2 a\log_2 x}\geqslant 0$$

$$\frac{(4\log_2 x\cdot x+\log_2 a)(\log_2 a-2\log_2 x\cdot x)}{\log_2 a\log_2 x}\geqslant 0$$

Хотим: полуинтервал + точка решений

~~...~~

ф-я $\log_2 x\cdot x$ монотонно ↑ принимает все значения
$\Rightarrow$ у скобок есть корни.

есть т. $x=1$, в которой меняется знак

1

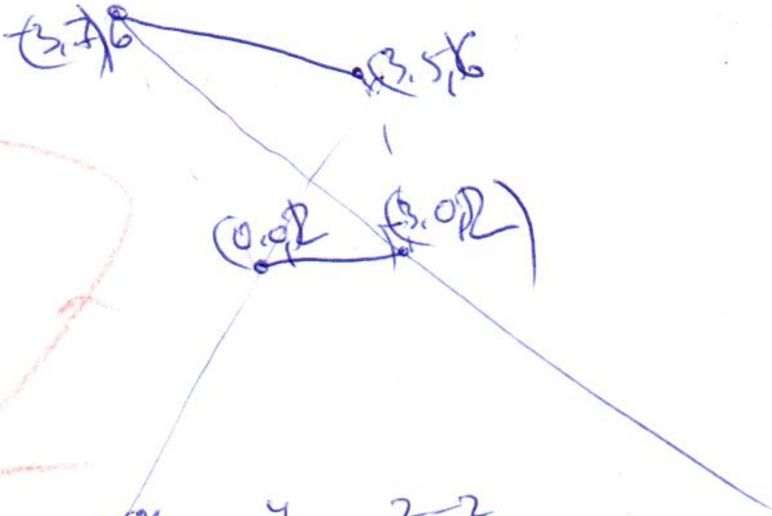
x_1 $\quad$ x_2

~~...~~ единичка не совпадает с x_1 и с ~~...~~ x_2, ~~...~~ $\Rightarrow$ знаки меняются (чередуясь) $\Rightarrow$ чтобы знак не поменялся второй раз надо, чтобы корни совпали:

$\log_2 a = 2\log_2 x\cdot x = -4\log_2 x\cdot x$

$2\log_2 x+\log_2 x=0.$
$\Rightarrow x=1$ – противоречит ОДЗ

черновик

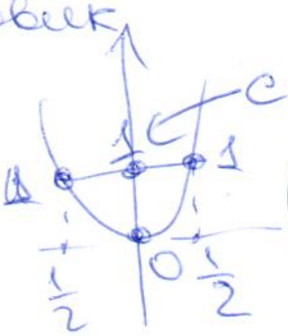


$$\frac{x-0}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z-2}{4}$$

$z=0.$

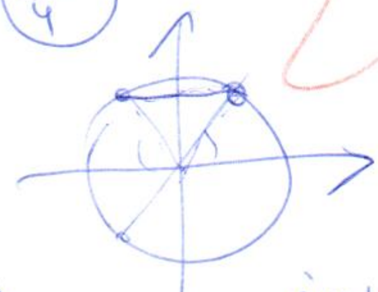
$\log_2 x$

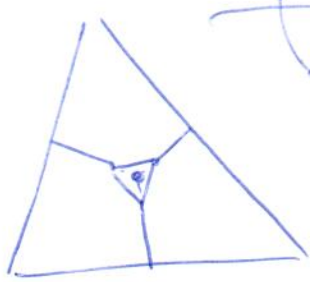
черновик



$c \cdot \frac{1}{4}$

$\frac{1}{4}c$

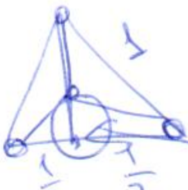




$\sin x = \sin y$

$x + y = \pi m$

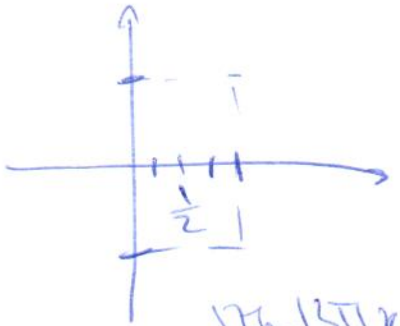
$13 + 15 = 28 \cdot x\pi = \pi m$



$\sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

$\boxed{\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{4} c}$

4



$\sin 13\pi x = \sin 15\pi x$

$x = \frac{1}{2}$

$x = \frac{1}{4}$ $\quad \frac{3}{4} \quad \frac{3}{4} \cdot 13\pi$

$\frac{3}{4} \cdot \frac{17}{\pi}$

$17\pi x - 13\pi x = \pi m$

$17x - 13x = 1$

$x = \frac{1}{4}$

$4x = m$

$x = \frac{m}{4}$

5π

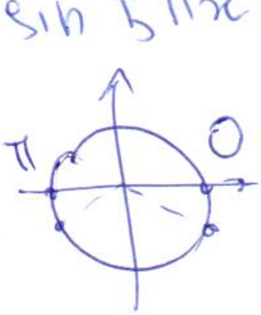
7π

$\sin 17\pi x = \sin 15\pi x$

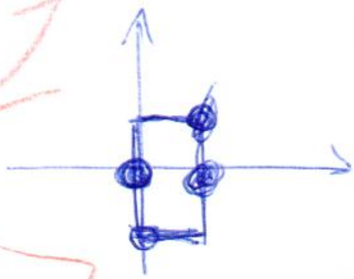
$\sin \frac{13}{4}\pi = \sin \frac{5}{4}\pi = \pi \frac{1}{4}$

$\sin \frac{15}{4}\pi = \sin \frac{7}{4}\pi = \pi \frac{3}{4}$

$\sin \frac{17}{4}\pi = \sin \frac{1}{4}\pi$



черновик



$y = \sin \frac{13\pi x}{4}$

$\sin(15\pi x)$

$x = 0$

$x = 1$ $\sin\frac{13}{4}\pi$

$\sin\left(\frac{15}{4}\pi\right)$

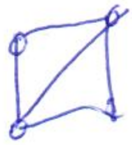
$1{,}5\pi$ $\frac{3}{4}$

$\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = -\frac{1}{4}$

$\text{В} + \text{Г} - \text{Р} = 2$

$$\begin{array}{r} 81 \\ \times\ 64 \\ \hline 324 \\ 486 \\ \hline 5184 \end{array}$$

$x \to 0{,}1$



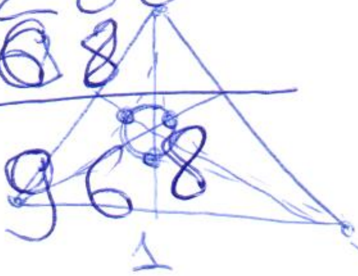
$4 - 5 + 3 = 2$

$$\begin{array}{r} 14 \\ +\ 14 \\ \hline 16 \\ 14 \end{array}$$

$\frac{1}{4}\pi$

$\frac{3}{4}\pi$

$$\begin{array}{r} 5184 \\ \times\ 27 \\ \hline 36288 \\ 10368 \\ \hline 139968 \end{array}$$



$x = \frac{1}{4}$ $\frac{15}{4}\pi$ $\frac{13}{4}\pi$ $\frac{17}{4}\pi$

$8x^2 \log_a x + \log_x a - 2x \le 0$

$8x^2 \cdot \frac{\log_2 x}{\log_2 a} + \frac{\log_2 a}{\log_2 x} - 2x \le 0$

$\log_x y = \frac{\log_2 y}{\log_2 x}$

16

$8x^2 \cdot \log_2^2 x \le 2x + \log_2^2 a$

$(8x^{4} \log_2^{4} x) \le (\log_2 x \cdot x + \log_2 a)^2$

$\frac{3}{2}x \log_2 x \le \cancel{\log_2 x \cdot x} + \log_2 a$ const

$\sqrt{6(1-tg^2x)} = 4\sin x$ черновик $\sin x \geq 0$.

$6 3(1-tg^2x) = 16 8 \sin^2 x$

$3 = 3tg^2x + 8\sin^2 x$

$\frac{\sin^2}{\cos^2} = \frac{\sin^2}{1-\sin^2}$

$3 = \frac{t}{1-t} + 8t$

$t \neq 1$

$3 = \frac{t + 8t - 8t^2}{1-t}$

$A;\ S(A) = \vdots 9$

$A = S(A) \cdot 9k$

$\vdots 9$

$\vdots 9$

$\vdots 81$

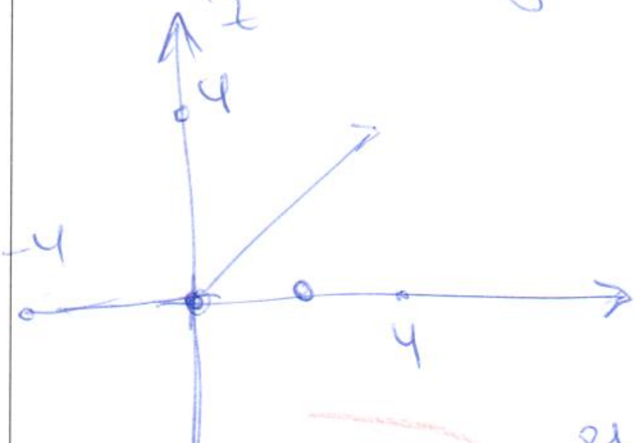
=> переберем

$$\begin{array}{r} 243 \\ +486 \\ 810 \\ \hline 1539 \end{array}$$

$|x|\ |y|\ |z| \leq 4$

↑ целые

L каждый Δ посчитаем по 2 раза



(x_0, y_0, z_0)

выбрать 2 оси 3сп.

x и z

9 позиций по z

81 точка $8 \cdot 8$ - еще по 2

$3+1-2=2$

02-08-80-22 (124.16)

То есть мы поняли, что есть 3 точки, где выколота,

точки как мы доказали не совпадают $\Rightarrow$ знаки чередуются $\Rightarrow$ будет ≥ 2 промежутка с $+$, при этом это не будет точкой (т.к. нет совпадений)

Ответ: таких a не существует ($\nexists$)