0 685114 070004

68-51-14-07
(128.3)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант ________________

Место проведения Краснодар
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математика
профиль олимпиады

Козлинской Екатерины Михайловны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«25» марта 202_ года

Подпись участника

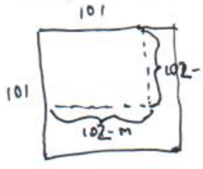
68-51-14-07
(128.3)

№2

65(шестьдесят пять)

Ответ: 20400

Чтобы вдруг в середине квадрата не оказалось дырки и он не распался нужно чтобы все прямоугольники касались ≥ одной стороны квадрата. Для начала рассмотрим все прямоугольники со сторонами ≤100. Прямоугольник $n \times m$ длиной n и шириной m можно расположить на доске (так чтобы расположение отвечало условиям задачи) $202-m-n$ способами, так как расположение такого прямоугольника можно задать положением его левой верхней клетки, но так как вылазить за край квадрата нельзя и прямоугольник должен касаться стороны квадрата ⇒ его левая верхняя клетка должна находиться на 1 из внутренних и граничащих с краем прямоугольника $(102-m)\times(102-n)$, левый верхний ∠ которого будет в левом верхнем ∠ квадрата, то есть:



для расположения прямоугольника 

⇒ левая верхняя клетка может располагаться в одной из $102\cdot 2-n-m-2 = 202-n-m$

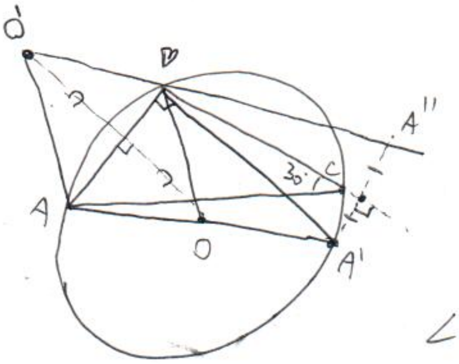
Причём n и m могут принимать любые натуральные значения от 1 до 100 ⇒ Всего количество способов вырезать квадрат $n \times m$ (удовлетворяющий условию) (где $1 \le n, m \le 100$ и $n, m \in \mathbb{N}$)

$$100\cdot(2+3+\ldots+100+101)+100\cdot 100-100(1+\ldots+100) = 20000$$

Если n или m равно 101 ⇒ чтобы квадрат не распался нужно чтобы данный прямоугольник касался ровно 3-х сторон. ⇒ В этом случае $100\cdot 4 = 400$ вариантов расположений (так как вторая сторона прямоугольника тогда от 1 до 100).

Итого вариантов расположения всего 20400.

№3



Пусть диаметрально противоположная A точка — A'

AA' — диаметр ⇒ $\angle ABA' = 90^\circ$ и ~~∠ABA'~~

$\angle AA'B = \angle ACB = 30^\circ$

⇒ $\angle BAA' = 60^\circ$. OO' — серединный перпендикуляр к AB ⇒ ABO — правильный △ и △ABO = △AO'B ⇒ он тоже правильный и $\angle O'BA = 60^\circ$. ⇒ $\angle A''BA' = 180^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$. Причем A'' и A' симметричны относительно BC ⇒ $\angle A''BC = \angle A'BC = \frac{30^\circ}{2} = 15^\circ$

$\angle ABC = \angle ABA' + \angle A'BC = 90^\circ + 15^\circ = 105^\circ$

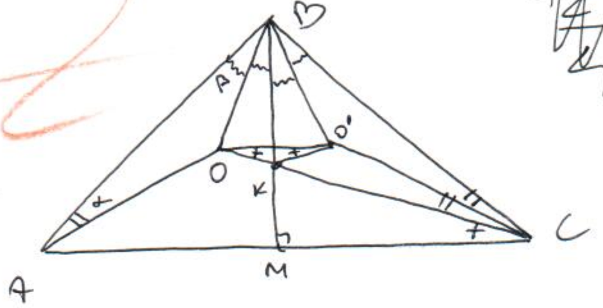
~~(При другом раскладе~~ (O'O пересекает середину стороны AB, так как O — центр окружности на которой лежат A и B и OO' ⊥ AB.) (A''A' пересекает BC за точкой C, так как $\angle A''BA' = 30^\circ$ ⇒ $\angle BA'A'' = 75^\circ$ и ~~∠AOA'~~ ⇒

$\angle AA'A'' = 75^\circ + 30^\circ = \angle AA'B + \angle BA'A'' = 105 > 90^\circ$

⇒ $\overset{\text{отрезок}}{\overbrace{A'A''}}$ лежит вне окружности ⇒ пересекает продолжение BC)

Ответ: $105^\circ = \angle ABC$

№ 6



~~$\frac{\angle BAO}{\angle BOA} = ?$~~

~~Поделим ∠ABC на 3 равные части, тогда~~

Проведем BM, где

M - середина AC, AB = BC ⇒ ∠ABM = ∠CBM ⇒ ∠ABO = ∠MBO, отметим O', симметричную O ~~BM~~ относительно BM, тогда ∠CBO' = ∠O'BM = ∠ABO = $= \angle ABC/4$. ΔABO симметрен ΔCBO' относительно BM ⇒ OO' ∥ AC и ΔABO=ΔCBO' ⇒ ∠BAO=∠BCO' = $= \frac{\angle BCO}{2}$ = ∠O'CO. Пусть K - точка пересечения OC и BM ⇒ ∠O'OK = ∠OCA, O и O' симметричны относительно BM ⇒ ∠O'OK = ∠OO'K. O' - точка пересечения биссектрис ΔBCK ⇒ KO' - тоже биссектриса (Пусть $\angle ABC/4 = \beta$ и $\angle BCO/2 = \alpha$)

$$\Rightarrow \angle BKO' = \frac{180° - 2\alpha - 2\beta}{2} = 90 - \alpha - \beta$$

∠OO'K = 32 - 2α, O'O ⊥ BM, так как O и O' симметричны относ. BM.

$$\Rightarrow 90° - \alpha - \beta + 32° - 2\alpha = 90°$$

$$32° - \beta = 3\alpha$$

$$\beta = \frac{\angle ABC}{4} = \frac{180° - 32°\cdot 2}{4} = \frac{180° - 64°}{4} = \frac{116°}{4} = 29°$$

$$32° - 29° = 3\alpha$$

$$3° = 3\alpha$$

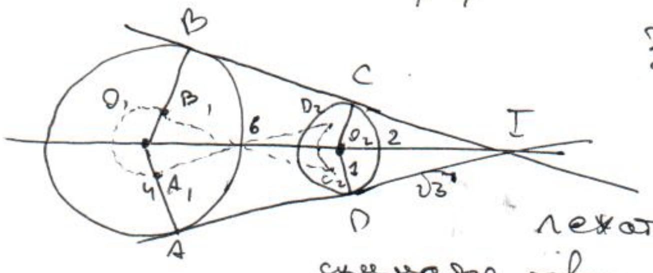
$$\alpha = 1°$$

~~$\frac{\angle BAO}{\angle BOA} = \frac{\alpha}{BO'C} = \frac{\alpha}{180° - 29° - \alpha} =$~~

$$\frac{\angle BOA}{\angle BAO} = \frac{180° - \beta - \alpha}{\alpha} = \frac{180° - 29° - 1°}{1°} = 150$$

Ответ: в 150 раз ∠BOA больше ∠BAO

№ 7



Заметим, что ~~длинна~~ ~~проедет на~~ прямые на которых будет лежать трава по длине будут суммарно равны ~~длинах~~ суммарной длине касательных к окружностям прямых.

Пусть большей окружности прямые касаются в точках A и B, а меньшей в C и D, причем B и C лежат на 1 касательной. Пусть точка пересечения касательных и линии центра – I, а центры окружностей радиусами 4 и 1 O_1 и O_2 соответственно

⇒ найдем AD и BC (очевидно AD = BC)

$\triangle O_1AI \sim \triangle O_2DI \Rightarrow \frac{O_1A}{O_2D} = \frac{AI}{DI} = \frac{O_1I}{O_2I} =$

$= \frac{4}{1} = \frac{O_1O_2 + O_2I}{O_2I} = \frac{O_1O_2}{O_2I} + 1 = \frac{6}{O_2I} + 1$

$\Rightarrow 3 = \frac{6}{O_2I} \Rightarrow O_2I \cdot 3 = 6 \Rightarrow O_2I = 2 \Rightarrow \angle O_2ID = 30^\circ$ и

$\Rightarrow DI = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$. $AI = \sqrt{O_1I^2 - O_1A^2} =$

$= \sqrt{64 - 16} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$

$\Rightarrow AD = AI - DI = 4\sqrt{3} - \sqrt{3} = 3\sqrt{3} = BC$

Когда же косилка будет ехать по дуге CD она будет складывать траву на $\overbrace{\text{меньшую}}$ дугу C_2D_2 $\overbrace{\text{окр-ти с центром в } O_2}$ такие, что D - проекция D_2 на AI и $D_2D = 1,5$, а C - проекция C_2 на BI и $C_2C = 1,5$ (и C_2 и D_2 лежат внутри окр-ти с центром O_2 и радиусом 1) ⇒ $O_2D_2 = O_2C_2 = 0,5$, Периметр этой окр-ти тогда равен π, а ее дуги $D_2C_2^*$. Причем $\angle O_2ID = 30^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle CO_2D = 180^\circ - 30^\circ \cdot 2 = 120^\circ = \angle C_2O_2D_2$

$\Rightarrow \overbrace{\smile C_2D_2}^{\text{(меньшая)}} = \frac{1}{3}\pi$

На $\overset{\text{отрезках}}{}$ O_1B и O_1A отметим точки B_1 и A_1 соответственно

68-51-14-97
(128.3)

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

№ 7 (продолжение)

Так, что $B_1B = A_1A = 1,5$

$\Rightarrow A_1O_1 = B_1O_1 = 4-1,5 = 2,5 \Rightarrow$ ~~да~~ Периметр окружности этой будет 5Π, $\angle BO_1T = \angle TO_1A = 60°$

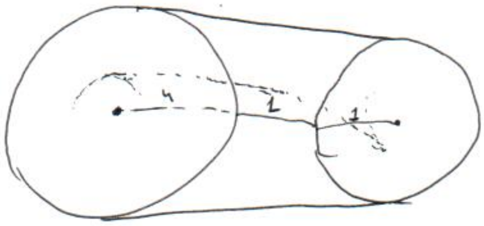
$\Rightarrow \smile B_1A_1$ (большая) $= \frac{5\Pi \cdot 2}{3} = 3\frac{1}{3}\Pi$

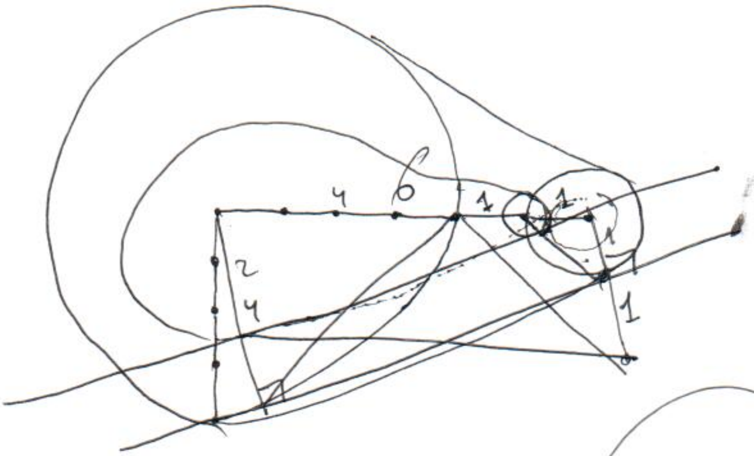
$\Rightarrow$ Всего дорожка травы имеет длину

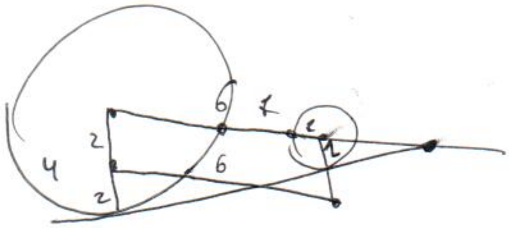
$3\frac{1}{3}\Pi + \frac{1}{3}\Pi + 3\sqrt{3}\cdot 2 = 2\frac{2}{3}\Pi + 6\sqrt{3}$

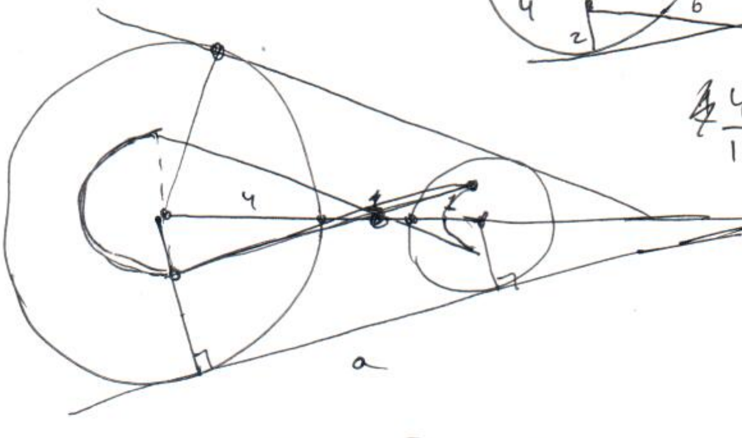
Ответ: $2\frac{2}{3}\Pi + 6\sqrt{3}$

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!





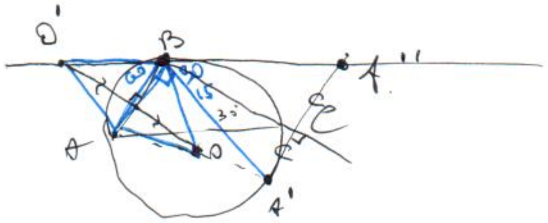




$\frac{4}{1} = \frac{6+x}{x}$

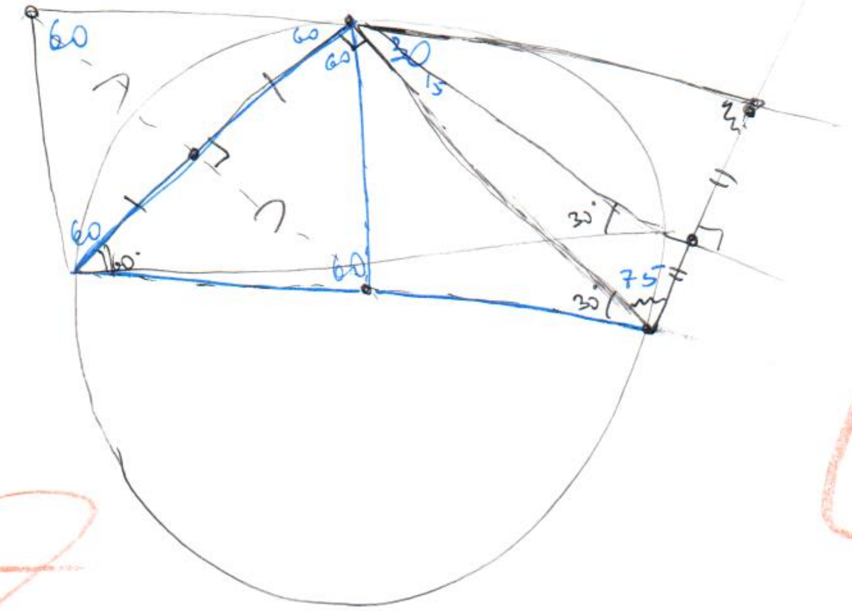
$4x = 6+x$

$2\pi r \quad 3\pi + \pi + 2a$



120 ?.

105



$5^2 \cdot 9^2 = 5^2 \cdot 3^4$

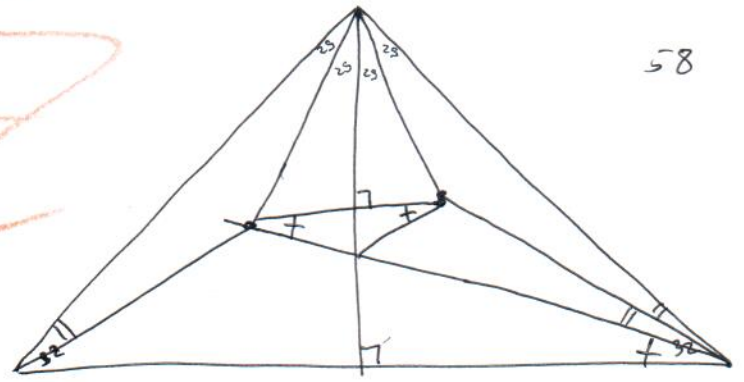
||

$abc + ab + bc + 4a + 4b + 4c - 1 = 45^{-2}$

59

29

58



$abc + ab + ac + bc + 4a + 4b + 4c = 2026 = 1013 \cdot 2$

$1013 \times 1 \times 1 \quad b = c = 1$

$c = 1 \quad b = 2$

$a + a + a + 1 + 4a + 8 = 7a + 9$

$2026 - 9 = 2017$, $2017 \,|\, 7$, 61

$2a + 2a + a + 2 + 4a + 8 + 4$

2012

$9a + 14$

$10.13 \,|\, 17$, 6

$3a + 3a + a + 3 + 4a + 12 + 4 = 11a + 19$

31

33

$4a + 2a + 2a + 4 + 4 + 4 + 4a = 10a + 12$

$ab + ab + a + b + 4a + 4b + 4 = 2026$

$2ab + 5a + 5b = 2022$

~~$2a + 5a + 5$~~

$6a + 5a + 15$

$10a + 5a + 25$

$14a + 5a + 35$

$19a = 1987$

$87 \,|\, 19$, 3, 57

1998

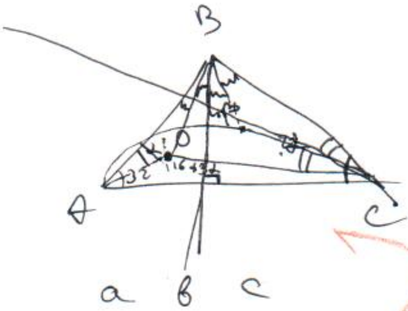
-2002, 9, 1993

$9a + 3a + 3a + 9 + 4a + 24 = 2026$

$19a = 1993$

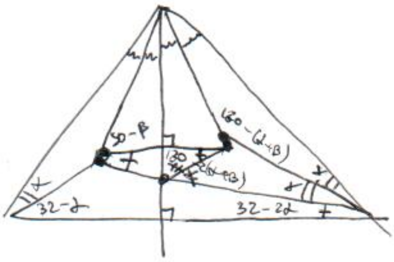
$180° - 29° =$

$= \boxed{151}$



$$\frac{\angle BAO}{\angle BOA} = \frac{\alpha}{180 - \alpha - \beta}$$

$$\frac{151 - \alpha}{\alpha} =$$



2006

17

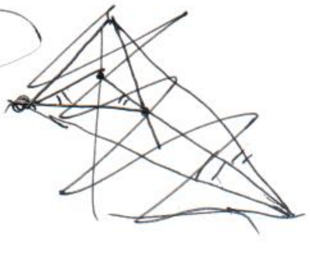
17

10

a	b	c
a	2	2
a	2	1

$4a + 2a + 2a + 4 + 4a + 8 + 8 = 12a + 20$

$2a + 2a + a + 2 + 4a + 8 + 4 = \boxed{9a + 14}$

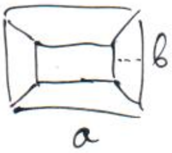


$180 - 2 \cdot 29 - \cancel{2\alpha} = 90 + 32 - \cancel{2\alpha}$

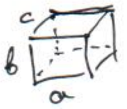
$32 - 2\alpha \cancel{+ 90} - \alpha - \beta = \cancel{90}$

$32 - \beta = \alpha$

$\alpha = 1$



$abc + 4a + 4b + 4c + ab + bc + ac =$



$= 2026$

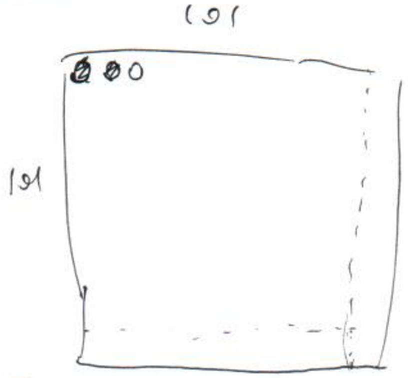
min abc − ?

$(a+2)(b+2) = ab + 2a + 2b + 4$

$(a+1)(b+1)(c+1) = abc + ab + ac + bc + a + b + c + 1$

$\overset{2014}{\cancel{2026}} = abc + (a+2)(b+2) + (a+2)(c+2) + (c+2)(b+2) + 2$

4_5^{-2}



$100 \cdot 101 +$

$+ 99 \cdot 100 + 100 \cdot 101$

$+ 98 \cdot 100 + 99 \cdot 101$

$\overset{200 \cdot 2}{101 \cdot 2 + 99 \cdot 2}$ 1×1

$\overset{199}{(101 + 100 - 2) \cdot 2}$ 2×1

$(100 + 101 - 2) \cdot 2$ 1×2

$101 + 100 - n$ n×1

$100 + 100 - n$ n×2

$1 \le n \le 100$

n × m

$102 - m + 100 - n$

$2 + 100 - n$ n × 100

$100 + 100$

n × 101 + 101 × n

$100 \cdot (2 + \ldots + 100 + 101) + 100 \cdot 100 - (1 + \ldots + 100) \cdot 100 + 200$

$100\,(1 + 2 + \ldots + 100 + 100)$

$100\ - (1 + \ldots + 100)$

20 200

2020000

$+ 100 \cdot 100$

$202 \cdot 10000 -$

$202 - n - m$