99-65-11-31
(129.9)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 4

Место проведения Калининград
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по МАТЕМАТИКЕ
профиль олимпиады

Козлова Никиты Олеговича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«29» марта 2026 года

Подпись участника

100 (сто) оригинал

99-65-11-31 (129.9)

Черновик

$\sqrt{6(1-ctg^2x)}=4\cos x$

$6(1-ctg^2x)=16\cos^2x$

$6-6ctg^2x=16\cos^2x$

$6-6ctg^2x-16\cos^2x=0$

~~$6-6ctg^2x$~~

$6-6\frac{\cos^2x}{\sin^2x}-16\cos^2x=0$

$6-6\frac{\cos^2x}{1-\cos^2x}-16\cos^2x=0$

$6-\frac{6t}{1-t}-16t=0$ пусть $t=\cos^2x$

$\frac{6(1-t)-6t-16t(1-t)}{1-t}=0$

$\frac{6-6t-6t-16t+16t^2}{1-t}=0$

$\frac{6-28t+16t^2}{1-t}$ $t\neq1$

$\frac{16t^2-28t+6}{1-t}=0$ $\frac{16(t-\frac14)(t-1,5)}{1-t}=0$

$28\cdot28$: 224, 56, 784; $24\cdot16$: 144, 24, 384

$\sqrt{784-4\cdot6\cdot16}=784-384=\sqrt{400}=20$

$\frac{28\pm20}{32}=\frac{8}{32};\ \frac{48}{32}$ $|:2$

$\frac14$ $\frac{24}{16}$ $\frac{6}{4}=1,5$ $\cos x\geq0$

~~ОДЗ~~ $-1\leq ctg x\leq1$

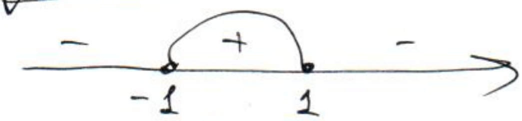
~~Вариант~~ ОДЗ

$6(1-ctg^2x)\geq0$

$1-ctg^2x\geq0$

$(1-ctg x)(1+ctg x)\geq0$

$ctg^2x\leq1$ один



$ctg x\in[-1;1]$

$1-\frac{\cos^2x}{\sin^2x}=\frac{\sin^2x-\cos^2x}{\sin^2x}=-\frac{\cos^2x-\sin^2x}{\sin^2x}=-\frac{\cos2x}{\sin^2x}$

$\cos^2x=\frac14$ $\cos^2x=1,5$

$\cos x=\pm\frac12$ $\cos x=\pm\sqrt{\frac32}$

$\cos^2x\neq1\Rightarrow\cos x\neq\pm1$

$t=\frac14$ ~~$t=1,5$~~

$\cos x=\frac12$

$x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k, k\in Z$

$\cos x=-\frac12$

$x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi p, p\in Z$

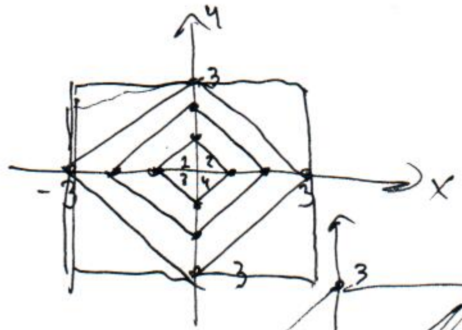
$\cos x=\frac{\sqrt3}{2}$

Ответ: $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k, k\in Z$

$x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi p, p\in Z$

Черновик

$(x;y)$ $x \leq |3|$ $y \leq |3| \in \mathbb{Z}$



-9^2 искорб. вершин

всего 36 целых чисел

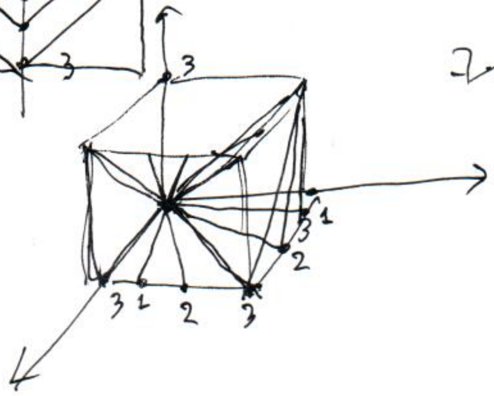
$16 - ?$

~~56+2+2+4 = 64~~

$7 \cdot 2 = 14 \cdot 4 = 56$

треугольников

если центр в начале координат



опред

$\begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$

$3x^2 \log_a x - \log_x a - 2x \geq 0$

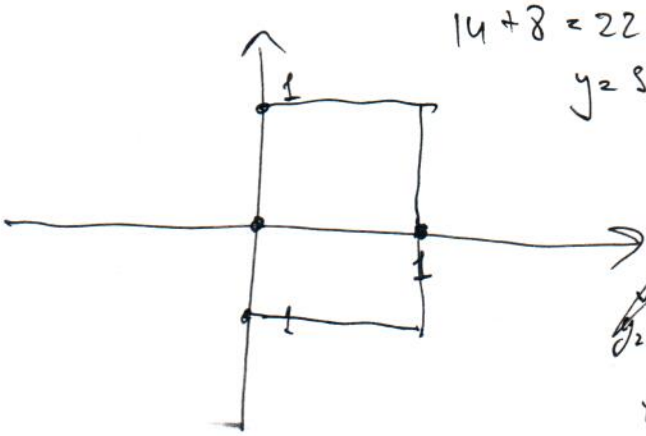
$3x^2 \log_a x - 2x - \frac{1}{\log_a x} \geq 0$

$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$

$14 + 8 = 22 \cdot 4 = 88$

$y = \sin k\pi x$

$k \in \{11, 13, 17\}$



~~$y = \sin 11\pi x$~~

~~$y_2 = \sin$~~

$f_1(x) = \sin 11\pi x$

$f_2(x) = \sin 13\pi x$

$f_3(x) = \sin 17\pi x$

$\sin 11\pi x = \sin 13\pi x$

Чистовик 1

$\sqrt{6(1-ctg^2x)} = 4\cos x$

возведем в квадрат

$6(1-ctg^2x) = 16\cos^2 x$

подставим $ctg^2x = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}$

ОДЗ

функция ctg x определена при $\sin x \neq 0$

т.к левая часть неотриц. то $4\cos x \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos x \geq 0$

$6\left(1-\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\right) = 16\cos^2 x \,/\, \cdot \sin^2 x$

$6(\sin^2 x - \cos^2 x) = 16\cos^2 x \sin^2 x$

используем тождество $\sin^2 x = 1-\cos^2 x$:

$\sin^2 x - \cos^2 x = 1 - 2\cos^2 x$

$6(1-2\cos^2 x) = 16\cos^2 x(1-\cos^2 x)$

$y = \cos^2 x$

$6(1-2y) = 16y(1-y)$

$6 - 12y = 16y - 16y^2$

$16y^2 - 28y + 6 = 0 \,/ :2$

$8y^2 - 14y + 3 = 0$

$D = \sqrt{(-14)^2 - 4\cdot 8\cdot 3} = \sqrt{100} = 10$

$y_1 = \frac{14+10}{16}$ $\quad y_2 = \frac{14-10}{16}$

$y_1 = \frac{3}{2}$ $\quad y_2 = \frac{1}{4}$

т.к $y = \cos^2 x$ $\quad \cos^2 x \leq 1$ остается:

$\cos^2 x = \frac{1}{4}$ но $\cos x \geq 0 \Rightarrow$

$\cos x = \pm\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \cos x = \frac{1}{2}$

$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

$\boxed{\text{Ответ: } x = 2\pi k \pm \frac{\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}}$

② чистовик
пусть N - трехзначное натуральное число
а S - сумма его цифр. по условию
число N входит в множество A,
если при делении на сумму своих
цифр получается целое число, кратное 9.

$$\Rightarrow \frac{N}{S} \equiv 0 \pmod 9$$ значит

$N \vdots 9S \Rightarrow N \vdots 9$

Известно свойство суммы цифр:

$N \equiv S \pmod 9 \Rightarrow S \vdots 9$

$N \vdots 81$

найдем все трехзначные кратные 81:

162; 243; 324; 405; 486; 567; 648; 729; 810; 891; 972.

Теперь оставим только те из них,
у которых сумма цифр ~~равна~~ кратна частному 9:

162; 243; <u>324</u>; 405; <u>486</u>; 648; <u>810</u>; 972

~~162; 243; 324; 405; 810; 486; 648; 972~~

искомая сумма: 324 + 486 + 810 = 1620

$\boxed{\text{Ответ: } 1620}$

Чистовик (3)

Рассмотрим множество $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{Z}^3 \mid$
$|x| \le 3 \quad |y| \le 3, \ |z| \le 3\}$

$|F| = 7^3 = 343$

У любого невырожденного прямоуг. треугольника вершина прямого угла единственна, поэтому каждый треугольник будет посчитан ровно один раз, если считать по вершине прямого угла.

Такую вершину можно выбрать 343 способами. Катеты взаимоперпендикулярны. Если каждый из них ~~на~~ || координатной оси, то они должны быть || двум различным осям из трех: пару осей можно выбрать $C_3^2 = 3$ способ.

Зафиксируем вершину прямого угла $P = (x, y, z)$. Пусть один катет || оси Ox, тогда его второй конец имеет вид (x', y, z), где
$x' \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, $x' = x$.

т.к всего значений для $x' \to 7$, а одно из них совпадает с x, то возможных выборов ровно 6

аналогично для второго катета 6 вариантов
$\Rightarrow$ для фиксированной вершины прямого угла и фиксированной пары осей число треугольников
$= 6 \cdot 6 = 36$
для каждой вершины прямого угла имеется $3 \cdot 36 = 108$ подходящих треугольников.
Итак, общее число равно $343 \cdot 108 = 37\,044$

$\boxed{\text{Ответ: } 37044}$

чистовик

(1) рассмотрим в прямоугольнике $R = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$

3 графика:

$\frac{G_{11}}{y} = \sin(11\pi x)$, $\frac{G_{13}}{y} = \sin(13\pi x)$, $\frac{G_{17}}{y} = \sin(17\pi x)$

каждый из этих графиков является непрерывной простой дугой, соединяющей точки $(0,0)$, $(1,0)$ на границе прямоугольника. будем добавлять графики по одному и считать на сколько областей увел. разбиение.

~~1) пересечения двух графиков~~

пусть A и B различные натуральные числа. точки пересечения графиков $y = \sin(A\pi x)$, $y = \sin(B\pi x)$ задаются уравнением

$\sin(A\pi x) = \sin(B\pi x)$

используем известное равносильное условие

$\sin u = \sin v \Leftrightarrow \{u = v + 2\pi n, u = \pi - v + 2\pi n, n \in Z\}$

подставляя $u = A\pi x$, $v = B\pi x$, получаем:

$A\pi x = B\pi x + 2\pi n$ $\quad$ $A\pi x = \pi - B\pi x + 2\pi n$.

после сокращения на π:

$(A-B)x = 2n$ $\quad$ $(A+B)x = 2n+1 \Rightarrow$

все абсциссы точек пересечения имеют вид $x = \frac{2n}{A-B}$, $x = \frac{2n+1}{A+B}$

Z

теперь используем это для наших трех пар.

пара G_{11} и G_{13} имеем: ЧИСТОВИК

$(11-13)x = 2n$ $(11+13)x = 2n+1$

то есть

$-2x = 2n$ $24x = 2n+1$

$\Downarrow$ $\Downarrow$

получаем

$x = -n$, и во внутренности отрезка $(0;1)$ решений нет.

$x = \frac{2n+1}{24}$

чтобы $0<x<1$ нужно $2n+1 \in \{1, 3, 5, \ldots, 23\}$, то есть имеется ровно 12 решений.

Итак, $N_{11,13} = 12$

пара G_{11} и G_{17}

получаем:

$(11-17)x = 2n$ $(11+17)x = 2n+1$ то есть

~~то есть~~

$-6x = 2n$ $28x = 2n+1$

$\Downarrow$ $\Downarrow$

$x = -\frac{n}{3}$ $x = \frac{2n+1}{28}$

во внутрен. $(0;1)$ дает $x = \frac{1}{3}$, $x = \frac{2}{3}$

во внутрен $(0;1)$ дает все нечетные числители от 1 до 27, то есть 14 решен.

$\Rightarrow N_{11,17} = 2 + 14 = 16$

пара G_{13} и G_{17}

имеем:

$(13-17)x = 2n$ $(13+17)x = 2n+1$

$-4x = 2n$ $30x = 2n+1$

$x = -\frac{n}{2}$ $x = \frac{2n+1}{30}$

$\Downarrow$ $\Downarrow$

во внутрен $(0;1)$ есть одно решение $x = \frac{1}{2}$

во внутрен $(0;1)$ это дает 15 решений

$N_{11,17} = 1+15 = 16$ Чистовик

~~Отсутствие внутренних тройных пересечений~~

Нужно проверить, что никакая внутрен. точка не принадлежит всем трем графикам сразу.

Для пары (11,13) все внутрен абсцисс имеют вид: $x = \frac{2k-1}{24}$

Для пары (11,17) внутр. абсц. имеют вид: $x = \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2k-1}{28}$

Для пары (13,17) внутр. абсц. имеют вид: $x = \frac{1}{2}, \frac{2k-1}{30}$

покажем, что эти множества попарно не пересекаются

равенство $\frac{2k-1}{24} = \frac{1}{3}$, $\frac{2k-1}{24} = \frac{2}{3}$ невозможно, поскольку справа стоят числа вида $\frac{8}{24}, \frac{16}{24}$, а в числителе 8 и 16, которые четные

равенство $\frac{2k-1}{24} = \frac{2k-1}{28}$ невозможно т. к. после умножения на 168 получаем: $7\cdot(2k-1) = 6(2k-1)$, левая часть нечетная, правая четна

равенство $\frac{2k-1}{24} = \frac{1}{2}$ невозможно т. к. $\frac{1}{2} = \frac{12}{24}$, а 12 четно

равенство $\frac{2k-1}{24} = \frac{2k-1}{30}$ невозможно т. к. $5(2k-1) = 4(2k-1)$ левая ~~четная~~ нечетная, правая четна.

равенство $\frac{1}{3} = \frac{1}{2}$, $\frac{2}{3} = \frac{1}{2}$ – невозможно равенства $\frac{1}{3} = \frac{2k-1}{30}$, $\frac{2}{3} = \frac{2k-1}{30}$ — невозможны, т.к. знаменатели числителя должен был бы быть соответственно 10 или 20, а они четные.

равенство $\frac{2k-1}{28} = \frac{1}{2}$ — невозможно т.к. ~~числитель~~ $\frac{1}{2} = \frac{14}{28}$, а 14 четна

равенство $\frac{2k-1}{28} = \frac{2k-1}{30}$ — невозможно т.к. $15 \cdot (2k-1) = 14(2k-1)$ левая нечетная, правая четная $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ все найденные внутр. точки пересечения попарно различны, и внутр. ~~тройных~~ пересеч. нет.

Изначально прямоугольник R представляет собой одну область, после построения C_{11} одна простая дуга соединяющая две точки границы прямоуго. делит на две области, поэтому после построения C_{11} получаем две области.

После построения C_{13} граница C_{13} пересекает уже построен. график C_{11} в 12 внутренних точках, эти точки разбивают C_{13} на $12+1=13$ дуг, каждая такая дуга целиком лежит внутри некоторой, уже сущ. области и делит ее на две части. Значит число областей увелич на 13.

после C_{13} добавления имеем $2+13=15$ областей.

После построения C_{17} график C_{17} пересекает C_{11} в 16 точках и C_{13} еще в 16 точках по доказанному все 32 точки различны.

$\Rightarrow$ C_{17} разбивается на $32+1=33$ дуги и каждая добавляет одну новую область. Исходник значит, Итоговое число областей =

$= 15+33=48$.

Итак, полоска окажется разделена на 48 непересекающихся областей

(5) Рассмотрим фигуру как симметричную относительно осей координат и поворота на угол $\frac{\pi}{2}$

Т.К. расстояние между соседними вершинами "квадрата" = 1, можно поместить его вершины в точки: $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ тогда верхняя сторона фигуры соединяет точки $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ поскольку она получена из графика параболы $y = Cx^2$ жестким движением и симметрична относительно оси Ox, ее уравнение имеет вид: $y = A + Bx^2$, $B > 0$.

Аналогично правая сторона по симметрии относительно прямой $y=x$ имеет вид: $x = A + By^2$ теперь используем условие, что вершины у фигуры нулевые углы. Это означает, что в точке стыка две соседние дуги имеют одну и ту же касательную.

Рассмотрим вершину $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$

листочки
Для верхней дуги $y = Bx^2$ имеем $y' = 2Bx$
$\Rightarrow$ в точке $x = \frac{1}{2}$ угловой коэф касательной $=$
$m_1 = 2B\cdot\frac{1}{2} = B$. для правой дуги $x = A + By^2$
дифференцируем неявно: $1 = 2By\frac{dy}{dx}$,
поэтому ~~в точке~~ $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2By}$. в точке $y = \frac{1}{2}$
получаем $m_2 = \frac{1}{2B\cdot\frac{1}{2}} = \frac{1}{B}$ т.к касательная
общая, то $m_1 = m_2$ то есть $B = \frac{1}{B}$.
поскольку $B > 0 \Rightarrow B = 1$. Теперь подставим коорд. вершины
$(\frac{1}{2};\frac{1}{2})$ в уравнение ~~...~~ верхней дуги: $\frac{1}{2} = A + 1\cdot$
$\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 = A + \frac{1}{4}$ отсюда $A = \frac{1}{4}$
Итак верхняя дуга имеет вид $y = \frac{1}{4} + x^2$
из симметрии всей фигуры следует, что центр
вписанной окружн. находится в начале
координат $O = (0;0)$
точка касания с верхней дугой так же
по симметрии лежит на оси Oy, то есть
это вершина параболы $(0;\frac{1}{4}) \Rightarrow$ ~~R=OL~~ R − вписан. окружн. $=$ расстоянию от начала ~~до коорд.~~ до этой точки:
$R = \frac{1}{4}$

(6) введем коорд. в пространстве так,
что земля есть плоскость $z = 0$, забор
занимает множество $\{x0z$ | ~~вертикальная грань~~
$0 \le x \le 3,\ 0 \le z \le 2\}$ светильник летит на постоянной
высоте 6 метров из точки $A = (-1, 4, 6)$ в
точку $B = (7, 5, 6)$ уравнение этой прямой
$A = 8B - 33,\ 4 \le B \le 5$
Пусть светильник находится в точке $L =$
$= (A, B, 6)$. границы тени опред. лучами
проход. через верхнее ребро забора, то есть
через точки $M = (0, 0, 2)$ $N = (3, 0, 2)$ $\Rightarrow$ найдем
путь на земле

источник

попадет луч LM. пусть его пересечение с плоскостью $z=0$ есть точка M'. ищем из подобия:

$M' = M + \frac{1}{2}(M - L)$

откуда $M' = (0,0,2) + \frac{1}{2}(-A,-B,-4) =$

$= \left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}, 0\right)$

аналогично для точки $N = (3,0,2)$ получаем пересечение луча LN с землей $N' = N + \frac{1}{2}(N-L) = (3,0,2) + \frac{1}{2}(3,-A,-B,-4) =$

$= \left(\frac{9}{2}, -\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}, 0\right)$

значит при фиксировании L тень на земле есть трапеция с вершинами $(0,0)$ $(3,0)$ $\left(\frac{9}{2}, -\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ $\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$

подставим $A = 8B - 33$, тогда нижн. верш. трапец.:

$P(B) = \left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) = \left(\frac{33}{2} - 4B, -\frac{B}{2}\right)$

$Q(B) = \left(\frac{9}{2}, -\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) = \left(21 - 4B, -\frac{B}{2}\right)$

при крайних значениях B: $B=4$: $P(4) = \left(\frac{1}{2}, -2\right)$

$Q(4) = (5, -2)$

$B=5$: $P(5) = \left(-\frac{7}{2}, -\frac{5}{2}\right)$

$Q(5) = \left(1, -\frac{5}{2}\right)$

$\Rightarrow$ вся затемненная тенью область – пятиугольник с вершинами: $O = (0,0)$ $A = (3,0)$ $B = (5,-2)$ $C = \left(1, -\frac{5}{2}\right)$ $D = \left(-\frac{7}{2}, -\frac{5}{2}\right)$

разобьем его на трапецию $OACD$ и ΔABC

площадь ~~трапеции~~ $S_{OACD} = OA = 3$, $CD = 1 - \left(-\frac{7}{2}\right) = \frac{9}{2}$, $h = \frac{5}{2}$ тогда $S_{OACD} = \frac{OA + CD}{2} \cdot h = \frac{3 + \frac{9}{2}}{2} \cdot \frac{5}{2} = \frac{75}{8}$

$S_{ABC} =$ $\overrightarrow{AB} = (2,-2)$ $\overrightarrow{AC} = \left(-2, -\frac{5}{2}\right)$ по формуле S через опред.:

$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|2 \cdot 2 - 2 - \frac{5}{2}\right| = \frac{1}{2}|-5-4| = \frac{9}{2}$ $S = S_{OACD} + S_{ABC} = \frac{75}{8} + \frac{9}{2} = \frac{111}{8}$ ответ

$N_{13,17} = 1+15=16$ Черновик

~~Отсутствие внутренних тройных пересечений~~

Нужно проверить, что никакая внутрен. точка не принадлежит всем трем графикам сразу.

Для пары (11,13) все внутрен абсцисс имеют вид: $x=\frac{2k-1}{24}$

Для пара (11,17) внутр. абсц. имеют вид: $x = \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2k-1}{28}$

Для пара (13,17) внутр. абсц. имеют вид: $x=\frac{1}{2}, \frac{2k-1}{30}$

покажем, что эти множество попарно не пересекаются

равенство $\frac{2k-1}{24}=\frac{1}{3}$, $\frac{2k-1}{24}=\frac{2}{3}$ невозможно, поскольку справа стоят числа вида $\frac{8}{24}, \frac{16}{24}$, а в числителе 8 и 16, которые четные

равенство $\frac{2k-1}{24}=\frac{2k-1}{28}$ невозможно т.к. после умножения на 168 получаем: $7\cdot(2k-1)=6(2k-1)$, левая часть нечетная, правая четная

равенство $\frac{2k-1}{24}=\frac{1}{2}$ невозможно т.к. $\frac{1}{2}=\frac{12}{24}$, а 12 четно

равенство $\frac{2k-1}{24}=\frac{2k-1}{30}$ невозможно т.к. $5(2k-1)=4(2k-1)$ левая нечетная, правая четная.

равенство $\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}=\frac{1}{2}$ — невозможно равенство $\frac{1}{3}=\frac{2k-1}{30}$, $\frac{2}{3}=\frac{2k-1}{30}$ - невозможно, т.к. числитель должен был бы быть соответственно 10 или 20, а они четные.

равенство $\frac{2k-1}{28}=\frac{1}{2}$ - невозможно т.к. ~~числитель~~ $\frac{1}{2}=\frac{14}{28}$, а 14 четна

равенство $\frac{2k-1}{28}=\frac{2k-1}{30}$ - невозможно т.к. $15\cdot(2k-1)=14(2k-1)$ левая нечетная, правая четная $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ все найденные внутр. точки пересечения попарно различны, и внутр. тройных пересеч. нет.

Изначально прямоугольник R представляет собой одну область, после построения G_{11} одна простая дуга соединяющая две точки границы прямоуг. делит на две области, поэтому после построения G_{11} получаем две области.

После построения G_{13} график G_{13} пересекает уже построен. график G_{11} в 12 внутренних точках, эти точки разбивают G_{13} на $12+1=13$ дуг, каждая такая дуга целиком лежит внутри некоторой, уже сущ. области и делит ее на две части. Значит число областей увелич на 13.

после G_{13} добавления имеем $2+13=15$ областей.

После построения G_{17} график G_{17} пересекает G_{11} в 16 точках и G_{13} еще в 16 точках по доказанному все 32 точки различны.

$\Rightarrow$ G_{17} разбивается на $32+1=33$ дуги и каждая добавляет одну новую область. Шестовик значит, Итоговое число областей =

$= 15+33=48$.

Итак, полоска окажется разделена на 48 непересекающихся областей

(5) Рассмотрим фигуру как симметричную относительно осей координат и поворота на угол $\frac{\pi}{2}$

Т.к. расстояние между соседними вершинами "квадрата" = 1, можно поместить его вершины в точки: $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ тогда верхняя сторона фигуры соединяет точки $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ поскольку она получена из графика параболы $y=Cx^2$ жестким движением и симметрична относительно оси Ox, ее уравнение имеет вид: $y=A+Bx^2$, $B>0$.

Аналогично правая сторона по симметрии относительно прямой $y=x$ имеет вид: $x=A+By^2$ теперь используем условие, что вершины у фигуры нулевые углы. Это означает, что в точке стыка две соседние дуги имеют одну и ту же касательную.

Рассмотрим вершину $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$

листовки
для верхней дуги $y = Bx^2$ имеем $y' = 2Bx$
$\Rightarrow$ в точке $x = \frac{1}{2}$ угловой коэф касательной $=$
$m_1 = 2B \cdot \frac{1}{2} = B$. для правой дуги $x = A + By^2$
дифференцируем неявно: $1 = 2By\frac{dy}{dx}$,
поэтому ~~в нашем~~ $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2By}$. в точке $y = \frac{1}{2}$
получаем $m_2 = \frac{1}{2B \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{B}$ т.к касательная
общая, то $m_1 = m_2$ то есть $B = \frac{1}{B}$.
поскольку $B > 0 \Rightarrow B = 1$. Теперь подставим коорд. вершины
$(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ в уравнение ~~пра~~ верхней дуги: $\frac{1}{2} = A + 1 \cdot$
$\cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = A + \frac{1}{4}$ отсюда $A = \frac{1}{4}$
Итак верхняя дуга имеет вид $y = \frac{1}{4} + x^2$
из симметрии всей фигуры следует, что центр
вписанной окруж. находится в начале
координат $O = (0;0)$
точка касания с верхней дугой так же
по симметрии лежит на оси Oy то есть
это вершина параболы $(0; \frac{1}{4}) \Rightarrow$ ~~R=OC~~ R-вписа окружн
$=$ расстоянию от начала ~~до~~ коорд. до этой точки:
$R = \frac{1}{4}$

(6) введем коорд. в пространстве так,
что земля есть плоскость $z = 0$, забор
занимает множество $\{x_0 z_3^3 \mid$ ~~вертикальная прямая~~
$0 \leq x \leq 3, 0 \leq z \leq 2\}$ светильник летит на постоянной
высоте 6 метров из точки $A = (-1, 4, 6)$ в
точку $B = (7, 5, 6)$ уравнение этой прямой
$A = 8B - 33$, $4 \leq B \leq 5$
Пусть светильник находится в точке $L =$
$= (A, B, 6)$. границы тени опред. лучами
проход. через верхнее ребро забора, то есть
через точки $M = (0,0,2)$ $N = (3,0,2)$ $\Rightarrow$ найдем
чуде на земле

листочек

попадает луч LM. пусть его пересечение с плоскостью $z = 0$ есть точка M'. несложно из подобия:

$M' = M + \frac{1}{2}(M - L)$

откуда $M' = (0,0,2) + \frac{1}{2}(-A,-B,-4) =$

$= \left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}, 0\right)$

аналогично для точки $N = (3,0,2)$ получаем пересечения луча LN с землей $N' = N + \frac{1}{2}(N - L) = (3,0,2) + \frac{1}{2}(3,-A,-B,-4) =$

$= \left(\frac{9}{2}, -\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}, 0\right)$

значит при фиксировании L тень на земле есть трапеция с вершинами $(0,0)$ $(3,0)$ $\left(\frac{9}{2}, -\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ $\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$

подставим $A = 8B - 33$, тогда наши верш. трапец.:

$P(B) = \left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) = \left(\frac{33}{2} - 4B, -\frac{B}{2}\right)$

$Q(B) = \left(\frac{9}{2}, -\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) = \left(21 - 4B, -\frac{B}{2}\right)$

при крайних значениях B: $B = 4$: $P(4) = \left(\frac{1}{2}, -2\right)$, $Q(4) = (5, -2)$

$B = 5$: $P(5) = \left(-\frac{7}{2}, -\frac{5}{2}\right)$, $Q(5) = \left(1, -\frac{5}{2}\right)$

$\Rightarrow$ вся затемненная тенью область — пятиугольник с вершинами: $O = (0,0)$ $A = (3,0)$ $B = (5,-2)$ $C = \left(1, -\frac{5}{2}\right)$ $D = \left(-\frac{7}{2}, -\frac{5}{2}\right)$

разобьем его на трапецию $OACD$ и $\triangle ABC$

площадь ~~трапеции~~ S_{OACD}: $OA = 3$, $CD = 1 - \left(-\frac{7}{2}\right) = \frac{9}{2}$,

$h = \frac{5}{2}$ тогда $S_{OACD} = \frac{OA + CD}{2} \cdot h = \frac{3 + \frac{9}{2}}{2} \cdot \frac{5}{2} = \frac{75}{8}$

S_{ABC}: $\vec{AB} = (2,-2)$ $\vec{AC} = \left(-2, -\frac{5}{2}\right)$ по формуле S через опред.:

$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|2 \cdot -2 - 2 \cdot -\frac{5}{2}\right| = \frac{1}{2}|-5-4| = \frac{9}{2}$ $S = S_{OACD} + S_{ABC} = \frac{75}{8} + \frac{9}{2} = \frac{111}{8}$ ответ