0 113806 290008

11-38-06-29
(123.4)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант ______

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Качанова Игоря Вячеславовича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«29» марта 2026 года

Подпись участника
Качанов

 65 (шестьдесят пять)

11-38-06-29 (123,4)

ЧЕРНОВИК

$abc + 2ab + 2bc + 2ac + 4a + 4b + 4c = 2026$ найдём $a = 2k$

$2kbc + 4bk + 2bc + 4ck + 8k + 4b + 4c = 2026$

$kbc + 2bk + bc + 2ck + 4k + 2b + 2c = 1013$

$bc(k+1) + 2b(k+1) + 2c(k+1) + 4(k+1) = 1017$

$1017 = 9 \cdot 113$

$(bc + 2b + 2c + 4)(k+1) = 1017$

I $k = 8$ II $k = 112$

$bc + 2b + 2c + 4 = 113$

$c(b+2) + 2(b+2) = 113$

$(c+2)(b+2)$

$bc(a+2) + 2b(a+2) + 2c(a+2) + 4(a+2) = 2034$

$(bc + 2b + 2c + 4)(a+2) = 2034$ $2034 = 2 \cdot 3^2 \cdot 113$

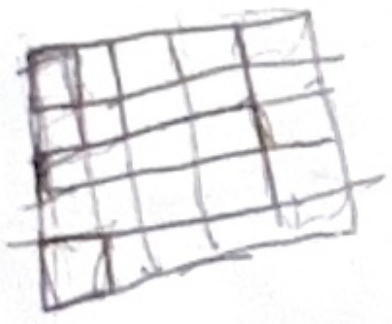
$(bc + 2b + 2c + 4)(a+2) = 2034$

$(b+2)(c+2)(a+2) = 2034$

$b = 1,\ a = 1,\ c = 111$

№1 Ответ: 111

№2



$100 \cdot 100 \cdot 4 + 99^2 \cdot 4 + \dots + 1^2 \cdot 4 - 4 \cdot 100 \cdot 100 =$

$= \frac{4 \cdot 100 \cdot 101}{2} - \cancel{4 \cdot 100 \cdot 100} = 2 \cdot 100 \cdot 101 - 100 =$

$4 \cdot \left(\frac{100 \cdot 101}{2} - 100 \cdot 100\right)$

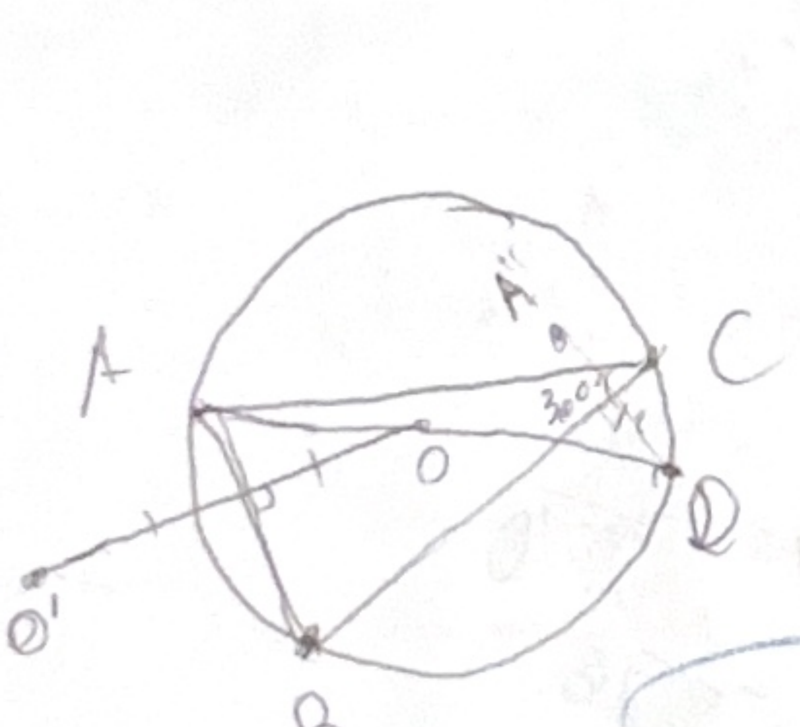
$4 \cdot 100 \cdot \left(\frac{100 \cdot 101}{2} - 100\right) = 400 \cdot (50 \cdot 101 - 100)$

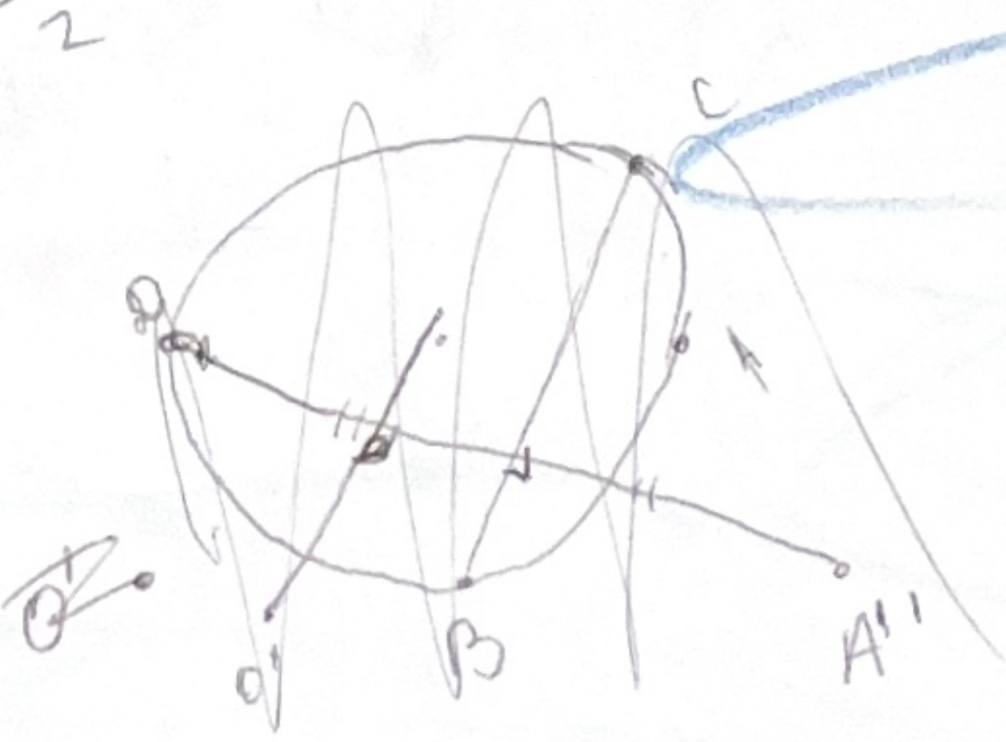
$= 400 \cdot ($

$101 \times 50 = 5050$

$4950 \times 400 = 1980000$

№2 1980000





ЧЕРНОВИК

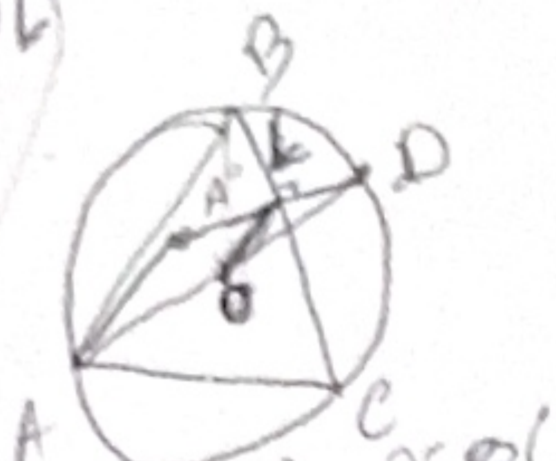
$\angle B = 60^\circ$

$BD = \frac{R\sqrt{3}}{2}$

$A''B = BD = \frac{R\sqrt{3}}{2}$

$AA'' \parallel OL$

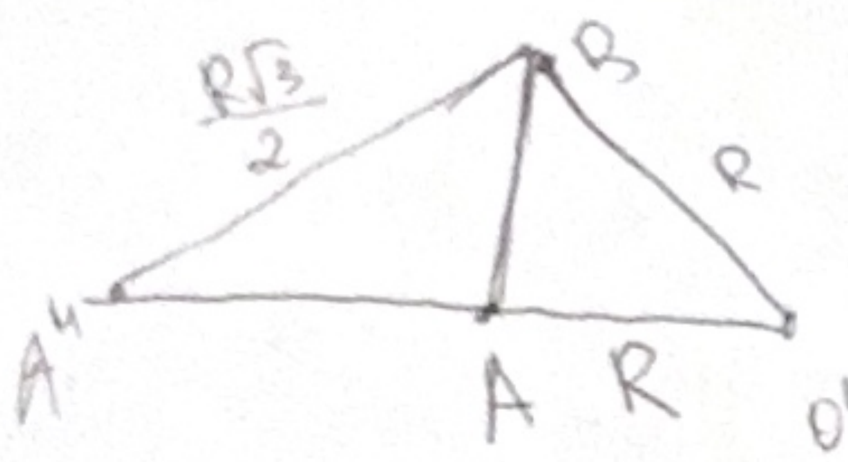
$AO' \parallel OB$



$AO' = O'B = R$

O, L, B – на одной прямой

$\angle A = 30^\circ \Rightarrow \angle B = 60^\circ$



$a^{2x} - 3\cdot a\cdot a^x + 2a^2 - (a^x - a)(a^x - 2a)$

$a > 0$

$a \neq 1$

$\frac{(a^x - a)(a^x - 2a)}{\log_2 a} \geq 0$

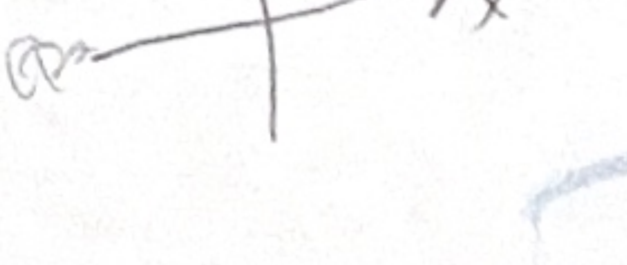
если $a > 1$, то

если $\boxed{a < 1}$, то

$\frac{(a^{x-1} - 1)(a^{x-1} - 2)}{\log_2 a} \geq 0$

$0 < a < 1$

$y = a^t$



$(a^{x-1} - 1)(a^{x-1} - 2) \leq 0$

$a^{x-1} = t$

$1 \leq t \leq 2$

$1 \leq a^{x-1} \leq 2$

$\begin{cases} x - 1 \leq 0 \\ (x-1)\cdot\log_2 a \end{cases}$

$\begin{cases} x - 1 \leq 0 \\ (x-1)\cdot\log_2 a \leq 2 \end{cases}$

$\begin{cases} x - 1 \geq \frac{1}{\log_2 a} \\ x - 1 \leq 0 \end{cases}$

$x - 1 \leq \frac{2}{\log_2 a}$

$a^{-\frac{1}{\log_2 a}} = 2026$

$\frac{\log_2 a}{1} = -\frac{1}{2026}$

$\log_2 a = -\frac{1}{2026}$

$a = 2^{-\frac{1}{2026}}$

11-38-06-29 (123.4)

черновик

$a>1$

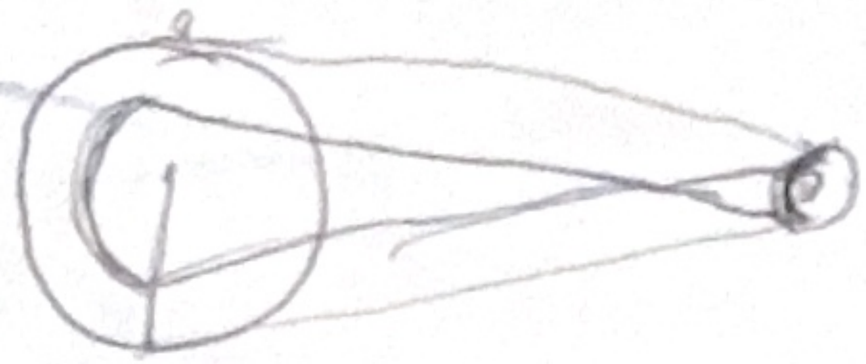
$(a^{x}-1)(a^{x}-2)\geq 0$

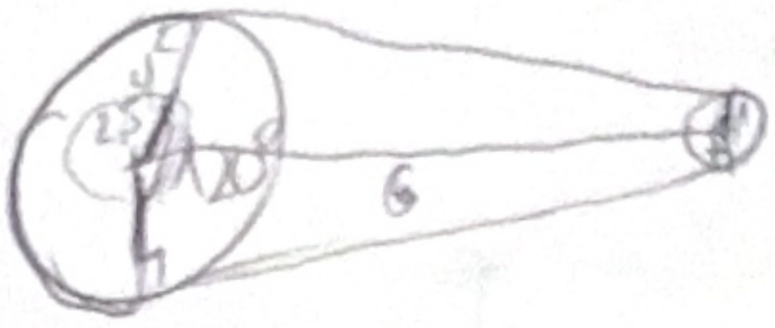
$\left[\begin{array}{l} a^{x-1}\geq 2 \\ a^{x-1}\leq 1 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x-1\geq \frac{1}{\log_2 a} \\ x-1\leq 0 \end{array}\right.$

беск. много решение

Ответ: $a=2^{-1026}$





$r=2,5$

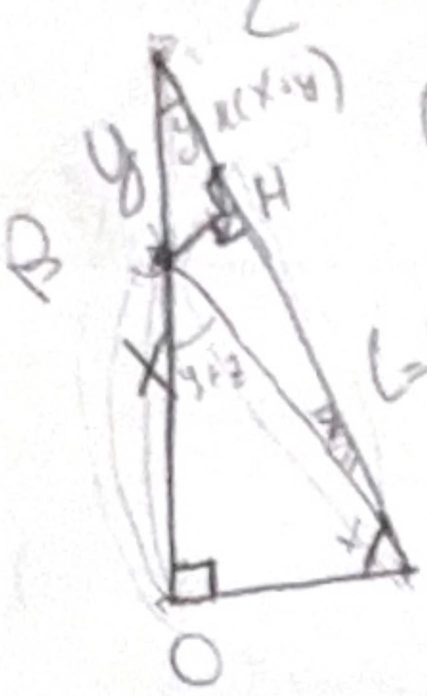
$z=\frac{\pi}{2}-x-y$ 5

$tgx\,tgy\,tgz = tgx\,tgy\cdot tg(\frac{\pi}{2}-x-y) = tgx\,tgy\cdot ctg(x+y) = \frac{tgx\,tgy}{tg(x+y)} =$

$tg(x+y) = \frac{\sin x\cos y+\sin y\cos x}{\cos x\cos y-\sin x\sin y} = \frac{tgx+tgy}{1-tgx\,tgy}$

$= \frac{tgx\,tgy(1-tgx\,tgy)}{tgx+tgy}$

$\sqrt[3]{abc}\leq\frac{a+b+c}{3}$



$6\sqrt{3}$

$l=\frac{\alpha\cdot\pi R}{180°}=\frac{1}{3}\pi R$

$=\frac{6\pi}{3}$

$\frac{2}{3}\pi R=\frac{5\pi}{3}$

$a\geq 1$

$b<1$

$\frac{ab(1-ab)}{a+b}$

$ab=\frac{1}{2}$

$a+b=\sqrt{2}$

$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$

$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta))$

$\cdot\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$

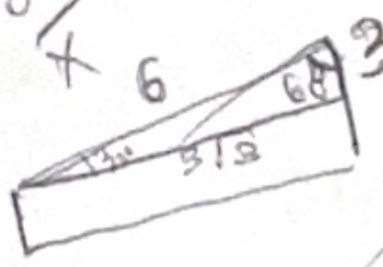
$=\frac{\sin x\sin y}{\cos x\cos y}=\frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}$

$\frac{ab(1-ab)}{a+b}\leq$

$tgx\,tgy$

$\frac{xy-y^2}{x^2+xy}$

$\frac{x-y}{x+y}\cdot\frac{y}{x}$



$tgx=\frac{OB}{OA}$

$tgy=\frac{OC}{OC}$

$tgx\,tgy=\frac{OB}{OC}$

~~$tgx\,tgy\,tgz$~~

$tgx\,tgy\,tgz$

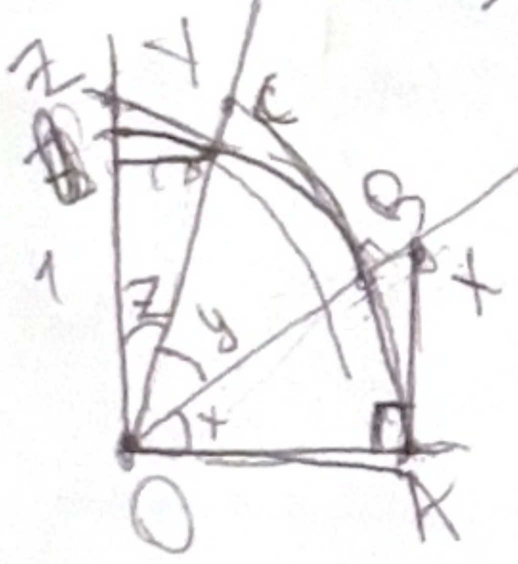
$abc\leq\frac{tgx+tgy+tgz}{27}$

$\frac{tgx\cdot tgy(1-tgx\,tgy)}{tgx+tgy}$

$\frac{4\pi}{3}+6\sqrt{3}$

$\frac{OB}{OC}\cdot\frac{BH}{AH}$

$\frac{AB\cdot BC\cdot CD}{OA\cdot OB\cdot OD}$



$tgx\,tgy\,tgz=\frac{BX\cdot XY\cdot CZ}{OX\cdot OY\cdot OZ}$

$XB\cdot XO\cdot YC\cdot YO\cdot ZD\cdot ZO$

$XB\cdot(1+XB)\cdot YC\cdot(1+YC)\cdot ZD\cdot(1+ZD)$

$\frac{OC}{CH}=\frac{AC}{CB}$

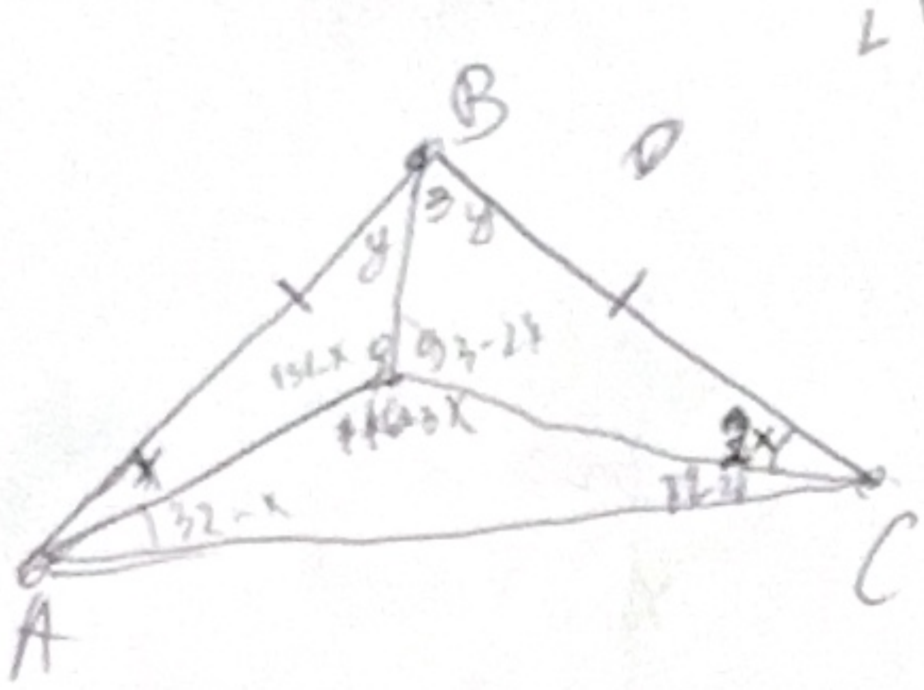
ЧЕРНОВИК

$\angle B = 180 - 64 = 116$

$\angle ABO = 29^\circ$

$\angle OBC = 87^\circ$

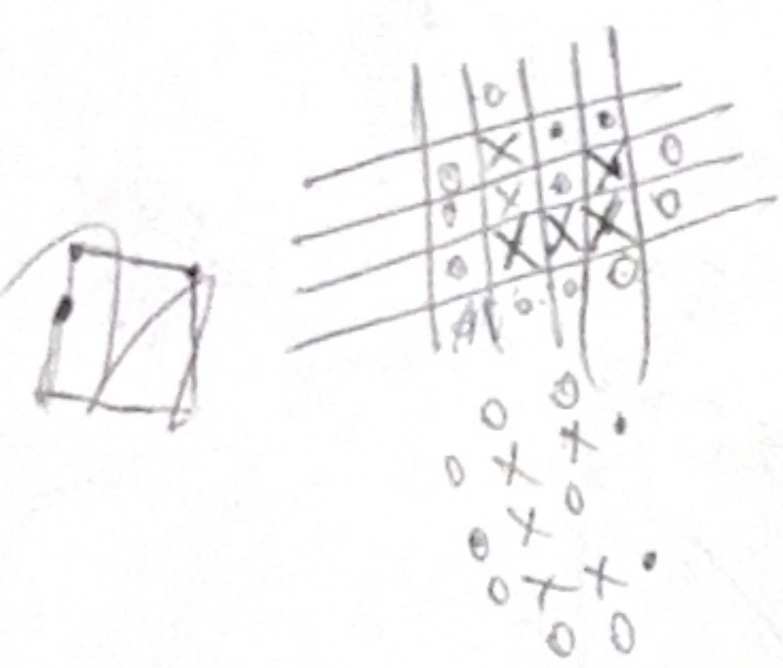
$180 - 87 - 2x = 93 - 2x$



$\frac{151 - x}{x}$

$1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{3}$

$1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9}$



$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$

$\frac{1}{5}$

~~Чистовик~~ ЧЕРНОВИК

№1

Пусть, a, b, и c – стороны прямоугольной призмы, тогда

$V = abc$; $S_{полн} = 2ab + 2bc + 2ac$; $P = 4a + 4b + 4c$

объём; пл. полной поверх.; сумма длин всех рёбер

$$abc + 2ab + 2bc + 2ac + 4a + 4b + 4c = 2026$$

$$bc(a+2) + 2b(a+2) + 2c(a+2) + \cancel{4(a+2)} 4(a+2) = 4a + 8 = 2026 + 8$$

$$(bc + 2b + 2c + 4)(a+2) = 2034$$

$$(c(b+2) + 2(b+2))(a+2) = 2034$$

$$(a+2)(b+2)(c+2) = 2034$$

$2034 = 2 \cdot 9 \cdot 113 = 2 \cdot 3^2 \cdot 113$; 113 – простое

$\times 18$, 113, 54, 18, 18, 2034

Т.к. $a, b, c \in N$, то $a+2 \geq 3$, $b+2 \geq 3$ и $c+2 \geq 3$, значит никакой скобка не может быть равна 1 или 2

Пусть. НУО a – наим. сторона

Если $a+2 = 3$, то

$(b+2)(c+2) = 2 \cdot 3 \cdot 113$;

~~$b \cdot c \neq 3$, $b+2 \neq 3$, значит $b+2 = 6$ (если $b = 113 \cdot 2$ или $113 \cdot 3$)~~

Т.к. каждая скобка больше 3 ($a+2 = 3$ это всегда, а если все разл.), тогда $b+2 = 6$, $c+2 = 113$ или наоборот, тогда единственный способ

$V = abc = 1 \cdot 4 \cdot 111 = 444$

Если $a+2 = 6$, то

$(b+2)(c+2) = 3 \cdot 113$, очевидно что может быть только $b+2 = 3$ и $c+2 = 113$ или наоборот, в этом случае, тогда a не наименьшее – противоречие

Если $a+2 = 9$, то

~~$V = abc = 4 \cdot 1 \cdot 1$~~

$(b+2)(c+2) = 2 \cdot 113$ вообще нет решений в нат. числах натуральных наоборот

Если $a+2 = 18$, то

$(b+2)(c+2) = 113$ тоже нет решений в натуральных числах

...листа-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

ЧИСТОВИК

№1

Пусть, a, b и c – стороны прямоуг. прямоугольной призмы, тогда

$V=abc$; $S_{поверх}=2ab+2bc+2ac$; $P=4a+4b+4c$

объём; площадь полн. поверхности; сумма длин всех ребер

$abc+2ab+2bc+2ac+4a+4b+4c=2026$

$abc+2ab+2bc+2ac+4a+4b+4c+8=2034$

$bc(a+2)+2b(a+2)+2c(a+2)+4(a+2)=2034$

$(bc+2b+2c+4)(a+2)=2034$

$(b(c+2)+2(c+2))(a+2)=2034$

$(a+2)(b+2)(c+2)=2034$

$2034=2\cdot 3^2\cdot 113$

$\begin{array}{r} 18 \\ \times\ 113 \\ \hline 54 \\ 18 \\ 18 \\ \hline 2034 \end{array}$

113 – простое число

Пусть НУО a – наиб. сторона, т.к. произведение делится на 113, то хотя бы одна сторона $a+2$ делится на 113, $2\cdot 3^2<113$, значит наиб. сторона всегда кратна на 113

Если $a+2=113$, то

$(b+2)(c+2)=2\cdot 3^2$ ($b+2\neq 1$, $b+2\neq 2$, $c+2\neq 1$, $c+2\neq 2$) и поскольку они различны, т.е только одно число может равняться 3

т.к. $a,b,c\in N$, то $b+2\geq 3$ и $c+2\geq 3$, значит деление только:

$b+2=6$ и $c+2=3$ или наоборот

$V=abc=111\cdot 4\cdot 1=444$

Если $a+2=2\cdot 113$, то

$(b+2)(c+2)=3^2$ очевидно нет решений в нат. не повторяющихся натуральных чисел

~~Если $a+2=3\cdot 113$~~ $(b+2)(c+2)\geq 3\cdot 4=12$, значит ещё больше, а точно не подойдут

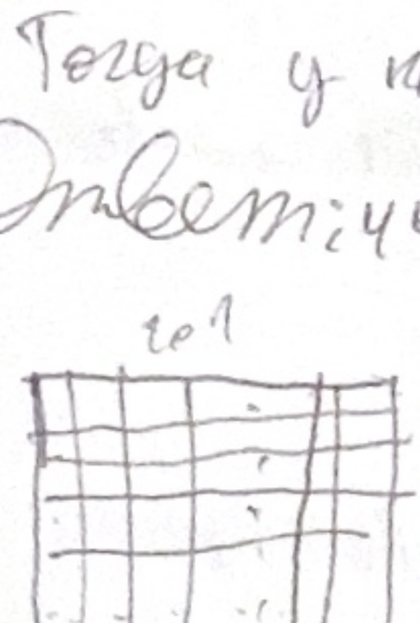
Тогда у нас единственный $V=444$

Ответ: 444

№2

101

101



Квадрат не распался на 2 части и нет дырок внутри, значит мы вырезали прямоугольник у[зачеркнуто] вида

т.е они касаются какой-то стороны. Посчитаем кол-во прямоугольников, касающихся слева. Если мы берём прямоугольник высоты 1, то есть 101 способ выбрать строчку, а его длина от 1 до 100, т.е 100 способов выбрать длину, т.е это $101\cdot 100$. Если мы берём высоту 2, то есть 100 способов выбрать строчки и 100 способов выбрать длину, т.е это $100\cdot 100$ и аналогично, значит всего способов $101\cdot 100+100\cdot 100+\ldots+2\cdot 100+1\cdot 100$.

Если сделать аналогично сверху, справа и снизу, то получится $4(101\cdot 100+100\cdot 100+\ldots+1\cdot 100)$, но тогда мы посчитаем несколько прямоугольников [зачеркнуто] дважды. А именно все прямоугольники, содержащие угловую клетку мы посчитали дважды.

очевидно, что их кол-во $100\cdot 100$ в каждому углу (т.к они закреплены [зачеркнуто] слева сверху в одной точке, могут быть 100 длин и 100 ширин)

значит для 4 углов это $4\cdot 100\cdot 10$.

№2 (продолжение) ЧИСТОВИК

Т.е общее кол-во способов это

$4\cdot(100\cdot101+100\cdot100+\ldots+100\cdot1)-4\cdot100\cdot100=400\cdot(101+100+\ldots+1-100)=$

$=400\cdot\left(\frac{101\cdot102}{2}-100\right)=400\cdot(101\cdot56-100)=400\cdot5556=2222400$

101×56: 606, 505, 5656

$5556 \times 400 = 2222400$

Ответ: 2222400 способов

№3

① 

② 

Дано: $\triangle ABC$, O - центр опис. окр.

O' - симм. O отн. AC

D - диамет. против. A

A'' - симм. D отн. BC

$\angle C=30^\circ$

O', B, A'' - на одн. прямой

Найти: $\angle B$

$A''D \cap BC = M$

Решение

1. Т.к. O - середина AD (диамет) и $A''M=MD$ в силу симметр., то OD - ср. линия в $\triangle AA''D$, т.е $OM \parallel AA''$

2. Рассм. четырёхугольник $AO'CO$: $AC \perp OO'$ (из симметрии), $AC \cap OO' = N$; $AN=NC$ (т.к. O лежит на сер. перп. к AC) и $ON=O'N$ (из симметрии), значит $AO'CO$ - ромб, тогда $AO' \parallel OC$

$AA'' \parallel OM$ и $AO' \parallel OC$, но

№4

$$\frac{a^{2x}-3a^{x+1}+2a^2}{\log_2 a}\geq 0$$

$a^{2x}-3a^{x+1}+2a^2=(a^x)^2-3a^x\cdot a+2a^2=(a^x-2a)(a^x-a)$

$$\frac{(a^x-2a)(a^x-a)}{\log_2 a}\geq 0 \qquad \frac{(a^{x-1}-2)(a^{x-1}-1)}{\log_2 a}\geq 0$$

ОДЗ: $a>0$, $a\neq1$ значит можно поделить на a^2

Если $a>1$, то $\log_2 a>0$ т.е. насо реши

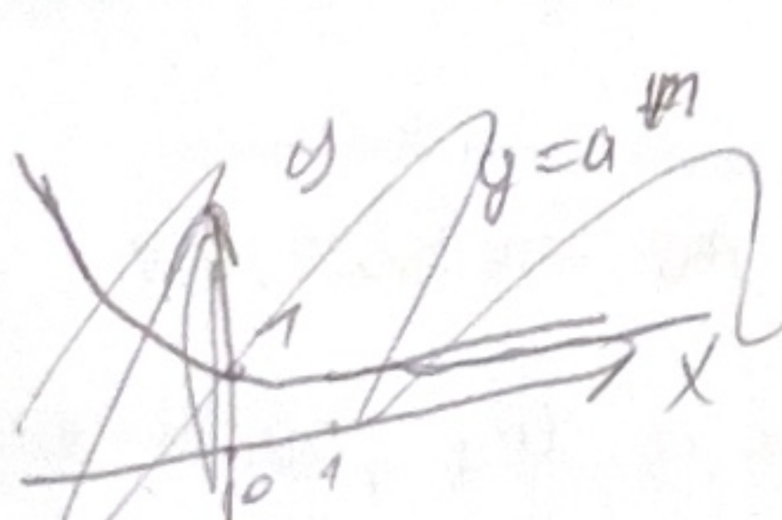
$(a^{x-1}-2)(a^{x-1}-1)\geq0$

$a^{x-1}=t$

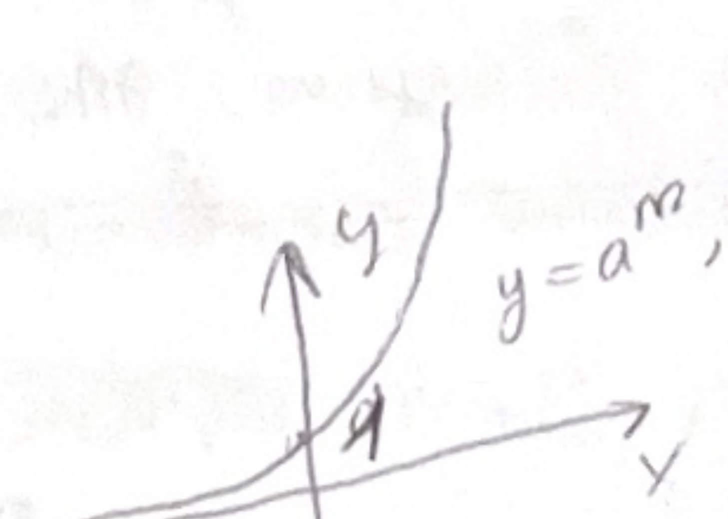
$(t-2)(t-1)\geq0$

$\left[\begin{array}{l} t\geq2 \\ t\leq1 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} a^{x-1}\geq2 \\ a^{x-1}\leq1 \end{array}\right.$



при $0<a<1$



ЧИСТОВИК

ли (продолжение)

$$\left[\begin{array}{l} \log_2 a^{x-1} \geq 1 \\ x-1 \leq 0 \end{array}\right.$$

что в начале в условии открытый ~~...~~ значит не подходит (вы длина больше 2026)

Если $0<a<1$, то $\log_2 a < 0$ и тогда надо решить

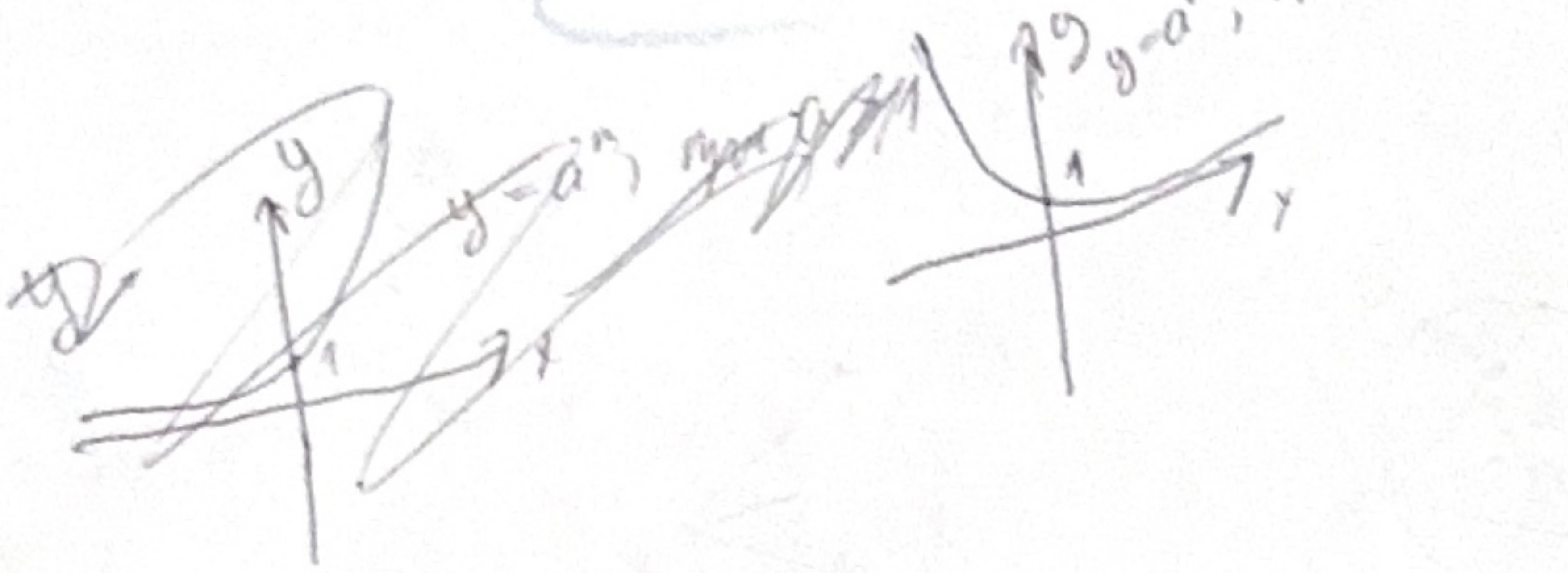
$(a^{x-1}-1)(a^{x-1}-2) \leq 0$

$a^{x-1}=k$

$(k-1)(k-2) \leq 0$

$1 \leq k \leq 2$

$$\begin{cases} a^{x-1} \geq 1 \\ a^{x-1} \leq 2 \end{cases}$$



$$\begin{cases} x-1 \leq 0 \\ \log_2 a^{x-1} \leq \log_2 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-1 \leq 0 \\ (x-1)\cdot\log_2 a \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-1 \leq 0 \\ x-1 \geq \dfrac{1}{\log_2 a} \end{cases}$$, значит

$$\begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq 1+\dfrac{1}{\log_2 a} \end{cases}$$ значит, длина отрезка равна

$1-1-\dfrac{1}{\log_2 a}=2026$

$\dfrac{1}{\log_2 a}=-2026$

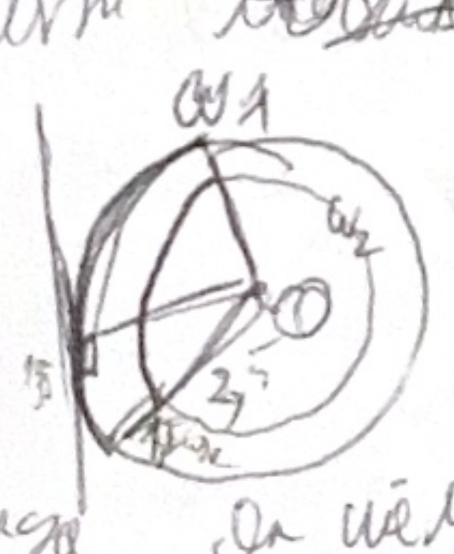
$\log_2 a=-\dfrac{1}{2026}$

$a=2^{-\frac{1}{2026}}$ подходит, т.к. $0<2^{-\frac{1}{2026}}<1$

Ответ: $a=2^{-\frac{1}{2026}}$

№ 7

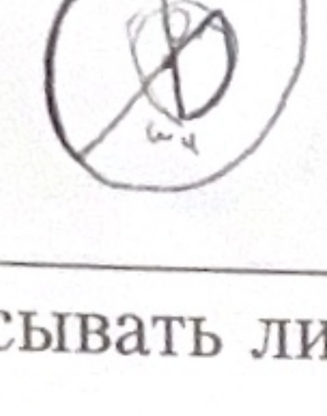
Когда он шёл по окр. радиусом 1, то он бросал в окр. радиуса 2,5, т.к. перпендикулярно движению это тоже самое, что перпендикулярно касательной, значит ~~...~~ на прямой с центром окр., значит это выходит на



т.к. ω_2 подобен гомотетии ω_1 отн. O с коэффициентом $\frac{2,5}{4}$ или же $\frac{5}{8}$,

т.к. $R=2,5$

Когда он шёл по окр. с радиусом 1, то это было так

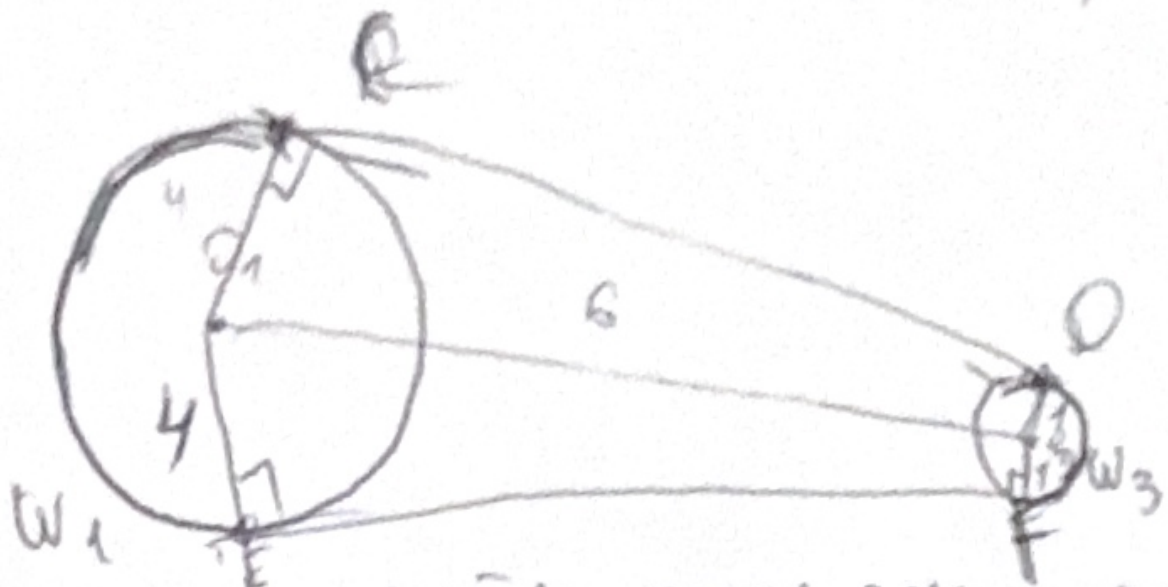


он аналогично вырисовывал на окр. ω_4, гомотетичной отн. ω_3 отн. O и с $R_2=0,5$

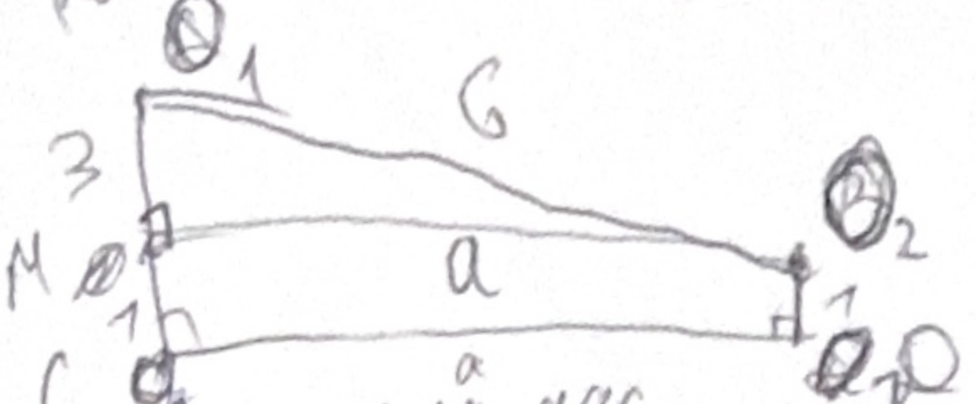
ЧИСТОВИК

№17 (продолжение)

Очевидно, что когда он выходил из, по прямой, это ладно ~~не~~ ~~[illegible]~~ то же по прямой и длины равны (там образовывался прямоугольник)



нам нужно найти часть дуги, по которой он шёл по окружностям и длины касательных



Т.к. $MO = \frac{1}{2} O_1O_2$ и $\angle O_2MO_1 = 90^\circ$, то $\angle MO_2O_1 = 30^\circ$, а $\angle CO_1O_2 = 60^\circ$

Если a – длина кас., то тогда очевидно, что если провести ей параллельную через B, то из теоремы Пифагора в $\triangle MO_1O_2$ получим, что

$a = \sqrt{36 - 9} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$

$\angle CO_1E = \angle CO_1O_2 + \angle EO_1O_2 = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$, ~~[illegible]~~ длина дуги, по которой шёл газонокосильщик, составляет $\frac{2}{3}$ длины окружности w_1 ($\frac{240^\circ}{360^\circ} = \frac{2}{3}$)

В силу гомотетии ~~[illegible]~~ и $\frac{2}{3}$ длины окружности w_2 это след ~~[illegible]~~ скошенной травы, тогда

l_1 ~~l_{12}~~ $= \frac{2}{3} \cdot 2\pi R_1 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 2,5 = \frac{10\pi}{3}$

$\angle DO_2O_1 = 180^\circ - \angle CO_1O_2 = 120^\circ$, значит

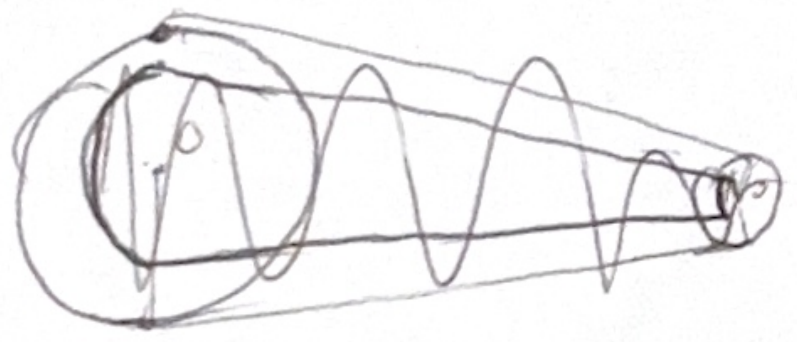
$\angle DOF = 360^\circ - 120^\circ - 120^\circ = 120^\circ$, тогда он шёл по дуге длиной $\frac{1}{3}$ окр. ($\frac{120^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{3}$), тогда в силу гомотетии это и $\frac{1}{3}$ длины окружности w_1 это след скошенной травы, т.е.

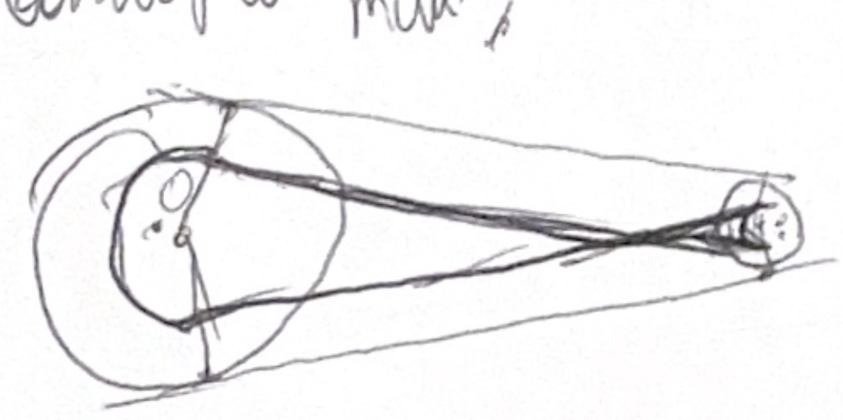
$l_2 = \frac{1}{3} \cdot 2\pi R_2 = \cancel{\frac{1}{3}} \frac{2}{3} \pi \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$

Тогда ~~всего он шёл~~ длина дорожки из травы)

$\frac{10\pi}{3} + 3\sqrt{3} + \frac{\pi}{3} + 3\sqrt{3} = \frac{11\pi}{3} + 6\sqrt{3}$ (2 касательные и 2 части окр.).

След выглядит так:





Ответ: $\frac{11\pi}{3} + 6\sqrt{3}$