0 973215 870006

97-32-15-87
(124.1)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 11 класс 7 вар.

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Копейкиной Мулы Петровны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«29» 03 2026 года

Подпись участника

Мк

97-32-15-87
(124.1)

Чистовик

№1

$\sqrt{3(1-ctg^2x)} = 2\sqrt{2}\cos x$

$\begin{cases} 2\sqrt{2}\cos x \geq 0 \mid :2\sqrt{2} \\ 3(1-ctg^2x) = 4\cdot 2\cos^2 x \end{cases}$

$\begin{cases} \cos x \geq 0 \\ 3 - 3ctg^2x - 8\cos^2 x = 0 \quad (1) \end{cases}$

(1) $-3ctg^2x - 8\cos^2 x + 3 = 0 \mid \cdot(-1)$

$3ctg^2x + 8\cos^2 x - 3 = 0$

$3\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} + 8\cos^2 x - 3 = 0$

$\frac{3\cos^2 x + 8\cos^2 x \cdot (1-\cos^2 x) - 3(1-\cos^2 x)}{1-\cos^2 x} = 0$

$\frac{3\cos^2 x + 8\cos^2 x - 8\cos^4 x - 3 + 3\cos^2 x}{1-\cos^2 x} = 0$

$\frac{14\cos^2 x - 8\cos^4 x - 3}{1-\cos^2 x} = 0$

Домножим ч числ. и знамен. на (-1).

$\frac{8\cos^4 x - 14\cos^2 x + 3}{\cos^2 x - 1} = 0$

Пусть $\cos^2 x = t$. Тогда:

$\frac{8t^2 - 14t + 3}{\cos^2 x - 1} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 8t^2 - 14t + 3 = 0 \\ \cos^2 x \neq 1 \end{cases}$

$8\left(t - \frac{3}{2}\right)\left(t - \frac{1}{4}\right)$

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

Листовик

№1

$\sqrt{3(1-ctg^2x)} = 2\sqrt{2}\cos x$

ОДЗ:

$3\cdot(1-ctg^2x) \geq 0$

$1-ctg^2x \geq 0$

$ctg^2x \leq 1$

$ctg x$ определен только при $\sin \neq 0$

$2\sqrt{2}\cos x \geq 0$

$\cos x \geq 0$

$3(1-ctg^2x) = 8\cos^2 x$

$3(\sin^2 x - \cos^2 x) = 8\cos^2 x \cdot \sin^2 x$

$t = \cos^2 x$

$\sin^2 x = 1-t$

$3((1-t)-t) = 8\cdot t(1-t)$

$3(1-2t) = 8t - 8t^2$

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

97-32-15-87
(124.1)

Чистовик

$3-6t-8t=-8t^2$

$8t^2-14t+3=0$

$D=(-14)^2-4\cdot8\cdot3=196-96=100$

$t=\frac{14\pm10}{16}$

$t_1=\frac{24}{16}=\frac{3}{2}$ – не подх., т.к. $\cos^2x\le1$

$t_2=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$

$\cos^2x=\frac{1}{4}$ т.к. $\cos x\ge0$, то $\cos x=\frac{1}{2}$

Ответ: $2\pi k\pm\frac{\pi}{3}$; $k\in Z$

№2

Пусть сумма цифр числа $n=x$, тогда

$\frac{n}{x}=9k$, где $k\in Z$

$n=9k\cdot x \Rightarrow n\vdots9 \Rightarrow x$ тоже $\vdots9$ по признаку делимости на 9

Рассм. трехзн. числа $\Rightarrow x$ может быть 9, 18, 27.

$x=27$ Только при $n=999$, но $\frac{999}{9+9+9}=37$

$37\not\vdots9 \Rightarrow$ не подх.

Пусть $x=9$, тогда $n=9k\cdot9=81k \Rightarrow$ трехзн. числа $\vdots81$

162, 243, 324, 405, 486, 567, 648, 729, 810, 891, 972

Сумма цифр $=9$: 162, 243, 324, 405, 810

Пусть $x=18 \Rightarrow n=9k\cdot18=162k \Rightarrow$ трехзн. числа $\vdots162$

162, 324, 486, 648, 810, 972

Сумма цифр $=18$: 486, 648, 972

$A=\{162, 243, 324, 405, 810, 486, 648, 810, 972\}$

$243+486+810=1539$ Ответ: 1539

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

Листовик

№3

Координаты полек $F:(-5;5)$

Каждый прямоуг. $\triangle$ опр. верш. прямого угла, выберем пары осей (x_1y, x_2, $_2y$) и выберем концов катетов.

Вершину прямого угла можно выбрать 11^3 способами.

Пару осей 3 способами.

Конец одного катета вдоль выбранной оси можно выбрать 10 способами, т.к. одна точка занята вершиной прямого угла.

Итого: $11^3 \cdot 3 \cdot 10 \cdot 10 = 1331 \cdot 3 \cdot 100 = 399300$

Ответ: 399300

№5

У прав. шестиуг. радиус опис. окр = стороне

Выберем координаты:

$O = (0;0)$

Если парабола сторона симметрична оу

$A - \left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$B - \left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

97-32-15-87
(124.1)

Чистовик

$y = 2 + Cx^2$ в точке B

B: $\frac{\sqrt{3}}{2} = 2 + C \cdot \frac{1}{4}$

две соседн. пар. симм. относ. OB,

их общ. кас - OB

Луч OB обр. $< 60°$ с осью OX, Знать

наклон $\operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}$.

У параболы y:

$y = 2 + Cx^2$

$y' = 2Cx$

$y'(B) = 2 \cdot C \cdot \frac{1}{2} = C$ Знать,

$C = \sqrt{3}$.

$\frac{\sqrt{3}}{2} = 2 + \frac{\sqrt{3}}{4}$

$2 = \frac{\sqrt{3}}{4}$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{4}$

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

Листовик

№5

№2

Рассм. на., огр. параболами:

$y = x^2 + t$, $y = x^2 + t + 1$, $y = -x^2 + d$, $y = -x^2 + d + 1$

Где t и $d \in Z$

Пусть $k = t - d$. Тогда возм. 2 типа на.:

$k = 0$, $k \geq 1$.

1) $k = 0 \Leftrightarrow t = d$.

Нижн. верш. $-x^2 + c \Rightarrow A(0; c)$

Верхн. верш. $c^2 + c + 1 = -x^2 + c + 1 \Rightarrow C(0; c_1)$

Боковая верш.: $x^2 + c = -x^2 + c + 1 \Rightarrow 2 \cdot x^2 = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$, $y = x^2 + c = \frac{1}{2} + c \Rightarrow B\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; c + \frac{1}{2}\right)$,

$D\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; c + \frac{1}{2}\right)$

Заметим, что $AC = ax$ $BD = \sqrt{2} \Rightarrow$

Площадь клетки $= \frac{AC \cdot BD}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

2) $K \geq 1$. Рассм. правые клетки. $(x > 0)$

Нижняя вершина $x^2 + c = -x^2 + d \Rightarrow$

$x = \sqrt{\frac{d - c}{2}} = \sqrt{\frac{k}{2}}$, $y = \frac{c + d}{2} \Rightarrow$

$A\left(\sqrt{\frac{k}{2}}; \frac{c + d}{2}\right)$

Левая верш. $-x^2 + c + 1 = x^2 + d \Rightarrow$

$x = \sqrt{\frac{d - c - 1}{2}} = \sqrt{\frac{k - 1}{2}}$, $y = (c + d + 1) \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow$

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

Чистовик

$B\left(\sqrt{\frac{k-1}{2}}; \frac{c+d+1}{2}\right)$

В прх. верш. $x^2+c+1 = -x^2+d+1 \Rightarrow$

$x = \sqrt{\frac{d-c}{2}} = \sqrt{\frac{k}{2}}$, $y = \frac{c+2+d}{2} \Rightarrow$

$C\left(\sqrt{\frac{k}{2}}; \frac{c+2+d}{2}\right)$

$x^2+c = -x^2+d+1 \Rightarrow 2\cdot x^2 = 2-c+1 \Rightarrow$

$x = \sqrt{\frac{k+1}{2}}$, $y = \frac{c+d+1}{2} \Rightarrow$

$D\left(\sqrt{\frac{k+1}{2}}; \frac{c+d+1}{2}\right)$

Есть также $AC = 1$; $BD = \sqrt{\frac{k+1}{2}} - \sqrt{\frac{k-1}{2}} \Rightarrow$

$S_k = \frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{\frac{k+1}{2}} - \sqrt{\frac{k-1}{2}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k-1}\right) =$

$\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{k+1-k+1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k-1}} = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot(\sqrt{k+1}+\sqrt{k-1})}$

Площ. $\to$ max при min k. То есть

$k = 1$

$S_1 = \frac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+0)} = \frac{1}{2}$.

Но $\frac{1}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \max S = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Отвег: $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

Черновик

№2

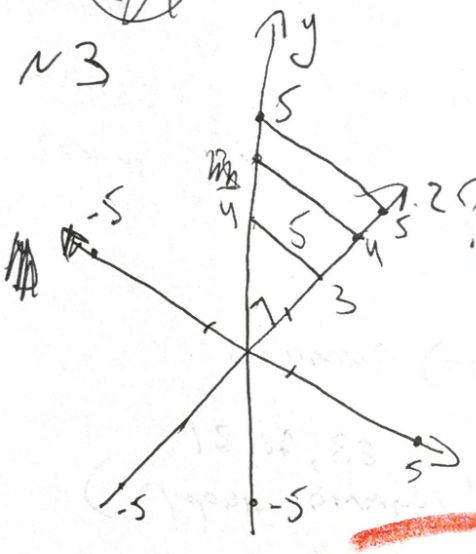
9+9

27

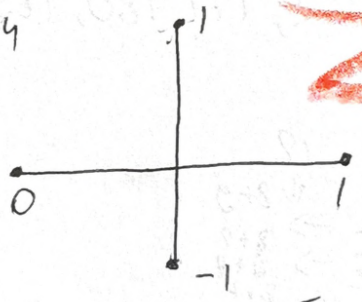
9+18 →

108, 117, 126, 135, 144 ... 990, 999

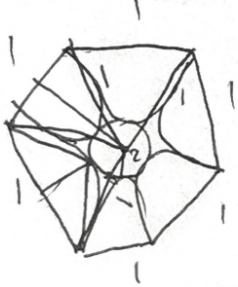
№3



№4



№5



№6

$h = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$S = \frac{1+2}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \frac{3\sqrt{3}}{4}$

$h = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(-3; 7)

(3; 5)

№7

№8

$8x^2 \log_a x - \frac{1}{\log_a x} - 2x \leq 0$

Пусть $\log_a x = t$

$8x^2 t - \frac{1}{t} - 2x \leq 0$

$8x^2 t^2 - 2tx - 1 \leq 0$

№1

$\frac{14\cos^2 x - 8\cos^4 x - 3}{1 - \cos^2 x} = 0$

$\frac{14t - 8t^2 - 3}{1 - t} = 0$

$\frac{-8t^2 + 14t - 3}{-t + 1} = 0$

$8t^2 - 14t + 3 = 0$

$t_{1,2} = \frac{14 \pm \sqrt{196 - 4 \cdot 8 \cdot 3}}{16}$

$t_1 = \frac{24}{16}, t_2 = \frac{4}{16}$

$t_{1,2} = \frac{14 \pm 10}{16}$

$= \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ $\frac{1}{4}$

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

Черновик

№1

$$\sqrt{3(1-ctg^2x)} = 2\sqrt{2}\cos x$$

$$\begin{cases} 2\sqrt{2}\cos x \geq 0 \;|:2\sqrt{2} \\ 3(1-ctg^2x) = (2\sqrt{2}\cos x)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos x \geq 0 \\ 3 - 3ctg^2x = 8\cos^2 x \end{cases}$$

$$-3ctg^2x - 8\cos^2x + 3 = 0$$

$$3ctg^2x + 8\cos^2x - 3 = 0$$

$$3\cdot\frac{\cos^2x}{\sin^2x} + 8\cos^2x - 3 = 0$$

$$\cos^2x\left(\frac{3}{\sin^2x} + 8\right) - 3 = 0$$

$$\frac{3\cos^2x}{1-\cos^2x} + \frac{8\cos^2x\cdot(1-\cos^2x)}{1-\cos^2x} = \frac{3}{1-\cos^2x}$$

$$= \frac{3\cos^2x + 8\cos^2x - 8\cos^4x - 3}{1-\cos^2x}$$

$$\frac{14\cos^2x - 8\cos^4x}{1-\cos^2x} = 0$$

$$\frac{8\cos^2x\left(\frac{14}{8} - \cos^2x\right)}{1-\cos^2x} = 0$$

$8\cos^2x = 0$; $1-\cos^2x \neq 0$; $\cos^2x \neq 1$; $\cos^2x = 0$; $\cos x = 0$; $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$.

$-\cos x = -\frac{14}{8}$; $\cos x = \frac{14}{8}$ — невозм.

$\cos x \neq \pm 1$.

Ответ: $\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$.

№2

$100 : 9$ → сумма цифр : 9 =) число : 9

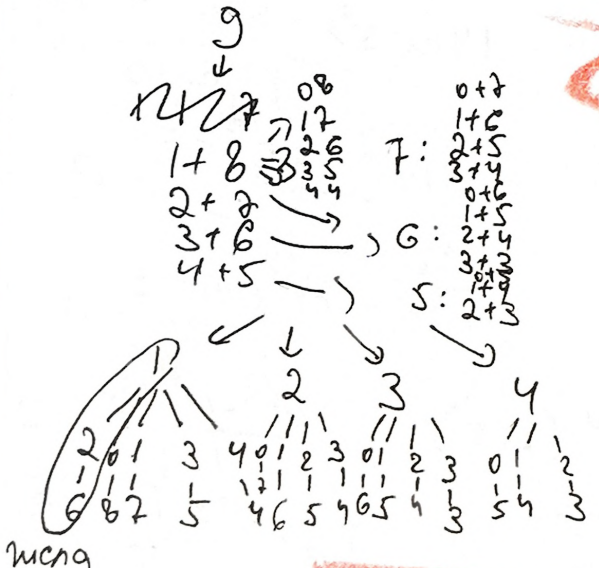
9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81

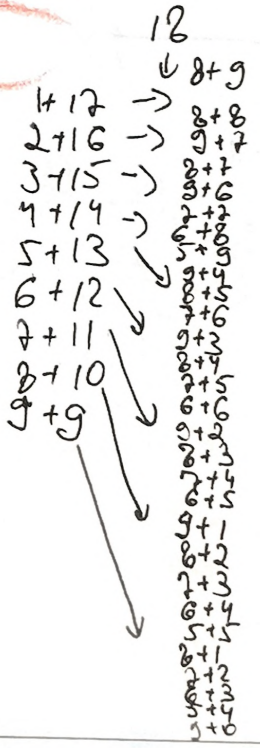
$108 : 9 = 12$

max — 27. => 9, 18, 27 (сумма цифр.)

108, 117, 126, 135, 144, 153, 162, 171, 180, 189,

2





Аналогично