Вышел в 13:57:10
Вернулся в 13:59:30

0 956925 910002

95-69-25-91
(129.3)

1755

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 11 класс Вариант 4.

Место проведения Санкт-Петербург
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Ломоносов" 2025/26 уч. года
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Корольчука Данила Егоровича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«29» марта 2026 года

Подпись участника

70 (семьдесят) фраз

95-69-25-91 (129,3)

$y = x$ Черновик

$0{,}5 = c \cdot 0{,}5^2$

$3x^2 \cdot \log_a^2 x - 1 - 2x \log_a x$ Черновик

$6(1 - ctg^2 x) = 16\cos^2 x$

$4\cos x > 0$

$x > 0 \quad x \neq 1$

$a > 0 \quad a \neq 1$

$1 + ctg^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$

$2 - \frac{1}{\sin^2 x} = 16\cos^2 x$

$99A + 9B \vdots 9$

$123 - 6 = 117$

$2t^2 - 2t - 1 \geq 0.$

$122 - 5 = 117$

$121 - 4 = 117$

$99A + 9B$

$\frac{100A + 10B + C}{A + B + C} = 9k$

$100A + 10B + C = 9k \cdot A + 9k \cdot B + 9k \cdot C$

$A \cdot (100 - 9k) + B \cdot (100 - 9k) + C \cdot (100 - 9k) = 0.$

$A \cdot (100 - 9k)$

$162 : 9 =$

$= 18$

$A + B + C \vdots 9$

$y = Cx^2 + R$

$y = -Cx^2 - R$

$100A + 10B + C \vdots 9 \cdot 9$

$81 \times 13 = 243$, $243 + 81 = 1053$

$x = Cy^2 + R$

$Cy^2 - y + R = 0.$

$C - 1 + R = 0$

$R = 1 - C.$

$648 + 486 = 1134$, $1134 + 324 = 858$

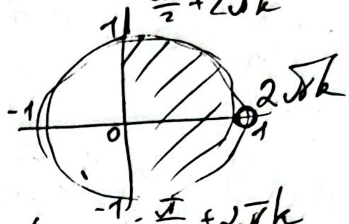
$648 + 486 + 324 = 1458$

$324 + 486 = 810$

Чистовик. Задача №1. стр 1/1 (этой задачи)

$\sqrt{6(1-\operatorname{ctg}^2 x)} = 4\cos x$

1. Ограничение:
$4\cos x \geq 0.$
$\sin x \neq 0$ (т.к. есть $\operatorname{ctg} x$).
$\cos x \geq 0$
$\sin x \neq 0$



$x \in [-\frac{\pi}{2}+2\pi k; 2\pi k) \vee \cancel{(2\pi k}$
$\vee (2\pi k, \frac{\pi}{2}+2\pi k]$ $k \in Z$

2. Возведем в квадрат:
$6(1-\operatorname{ctg}^2 x) = 16\cos^2 x$ (a)

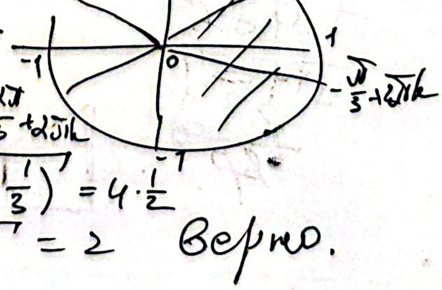
3. Из основного тригонометрического тождества следует, что
$1+\operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$
отсюда
$1-\operatorname{ctg}^2 x = 2-\frac{1}{\sin^2 x}$

4. (a) подставим п.3
$6\cdot\left(2-\frac{1}{\sin^2 x}\right) = 16\cos^2 x \;|:2$
$3\cdot\left(2-\frac{1}{\sin^2 x}\right) = 8\cos^2 x$
$\frac{6\sin^2 x}{\sin^2 x} - \frac{3}{\sin^2 x} = \frac{8\sin^2 x\cdot\cos^2 x}{\sin^2 x}$
$6\sin^2 x - 3 = 8\sin^2 x\cdot\cos^2 x.$
$-3\cdot(1-2\sin^2 x) = 2\cdot(2\sin x\cdot\cos x)^2$
$-3\cos 2x = 2\sin^2 2x.$ $\qquad 2\sin^2 2x = 2-2\cos^2 2x$
по осн. тригоном.

$2-2\cos^2 2x = -3\cos 2x$
$2\cos^2 2x - 3\cos 2x - 2 = 0.$
$\cos^2 2x - 1{,}5\cos 2x - 1 = 0$

Пусть $\cos 2x = t$
$t^2 - 1{,}5t - 1 = 0$
$t_1+t_2 = +1{,}5$
$t_1 t_2 = -1$
$t = 2 \quad t = -0{,}5$

$\cos 2x = 2$ корней нет $\qquad \cos 2x = -\frac{1}{2}$
$2x = \pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$
$x = \pm\frac{\pi}{3}+\pi k.$ + ОГР:



$x = \pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k \in Z.$

Проверка: подставим $x=\frac{\pi}{3}$ $\quad -\frac{2\pi}{3}+2\pi k$
$\sqrt{6\cdot(1-\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{3})} = 4\cos\frac{\pi}{3} \iff \sqrt{6\cdot(1-\frac{1}{3})} = 4\cdot\frac{1}{2}$
$\sqrt{4} = 2$ верно.

Ответ: $x = \pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k \in Z.$

Чистовик. Задача №2. стр 1/1 (этой задачи)

Пусть $x_i \in A$, где $x_i \in N$ и i - индекс.

Тогда $x_i = \overline{a_i b_i c_i} = 100a_i + 10b_i + c$.

Заметим, что по условию $x_i : (a_i + b_i + c_i) = 9k$, где $k \in \cancel{Z}$, то $x_i = (a_i + b_i + c_i) \cdot 9k$.

Значит $x_i \vdots 9$, то по признаку делимости числа на 9 $(a_i + b_i + c_i) \vdots 9$, тогда если $a_i + b_i + c_i = 9m$, где $m \in Z$,

то $x_i = 9m \cdot 9k = 81 \cdot m \cdot k$, т.е. $x_i \vdots 81$.

* x_i - трехзначное число

Среди всех трехзначных чисел на 81 делятся:

$81 \cdot 1 = 81$ не трех-значное ×
$81 \cdot 2 = 162$ ✓
$81 \cdot 3 = 243$ ✓
$81 \cdot 4 = 324$ ✓
$81 \cdot 5 = 405$ ✓
$81 \cdot 6 = 486$ ✓
$81 \cdot 7 = 567$ ✓
$81 \cdot 8 = 648$ ✓
$81 \cdot 9 = 729$ ✓
$81 \cdot 10 = 810$ ✓
$81 \cdot 11 = 891$ ✓
$81 \cdot 12 = 972$ ✓
$81 \cdot 13 = 1053$ не трехзначное
...

Проверим эти числа (которые подходят)

$162 : (1+6+2) = 162 : 9 = 18$, $18 \vdots 9$ ✓
$243 : (2+4+3) = 243 : 9 = 27$, $27 \vdots 9$ ✓
$324 : (3+2+4) = 324 : 9 = 36$, $36 \vdots 9$ ✓
$405 : (4+0+5) = 405 : 9 = 45$, $45 \vdots 9$ ✓
$486 : (4+8+6) = 486 : 18 = 243 : 9 = 27$, $27 \vdots 9$ ✓
$567 : (5+6+7) = 567 : 18 \notin Z \Rightarrow$ не подходит ($567 \notin A$).
$648 : (6+4+8) = 648 : 18 = 324 : 9 = 36$, $36 \vdots 9$ ✓
$729 : (7+2+9) = 729 : 18 \notin Z \Rightarrow$ не подходит ($729 \notin A$)
$810 : (8+1+0) = 810 : 9 = 90$, $90 \vdots 9$ ✓
$891 : (8+9+1) = 891 : 18 \notin Z \Rightarrow$ не подходит ($891 \notin A$)
$972 : (9+7+2) = 972 : 18 = 486 : 9 = 54$, $54 \vdots 9$ ✓.

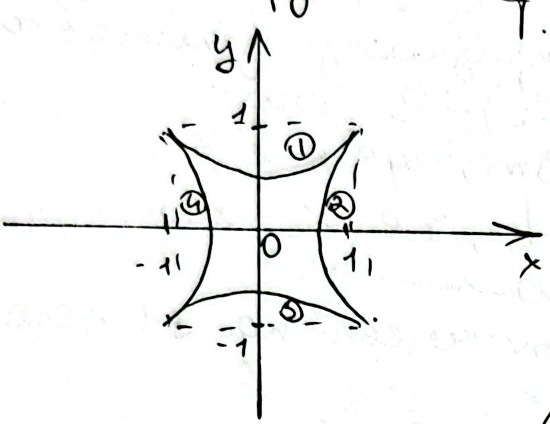
То ~~A~~ числа 162; 243; 324; 405; 486; 648; 810 и 972 принадлежат A, а числа 567; 729 и 891 не принадлежат, т.к. не делятся нацело на сумму своих цифр.

Значит сумма третьего, пятого и предпоследнего равна: $324 + 486 + 810 = \cancel{1458}\ 1620$.

Ответ: 162; 243; 324; 405; 486; 648; 810; 972.
сумма равна: 1620.

Чистовик. задача №5 стр 1/1 (этой задачи)

Поместим симметричный „квадрат" на плоскости так, чтобы линия пересечения диагоналей совпадала с нулем, а вершины парабол лежали на осях координат.



Т.к. это квадрат, то центр вписанной окружности лежит на пересечении диагоналей (т.е. в нуле). То расстояние до вершин парабол от центра окр. равны R, где R - радиус этой окр. (Выше сказанное верно для этого квадрата в силу симметрии).

Тогда запишем уравнение „сторон „квадрата", а точнее парабол, которые их образуют:

1. $y = Cx^2 + R$.
2. $Cy^2 + R = x$
3. $y = -Cx^2 - R$.
4. $-Cy^2 - R = x$

Т.к. углы равны нулю, то углы ~~пара~~ между параболами и диагоналями в вершинах тоже равны нулю, то они касаются. диагонали это $y = x$ (из-за симметрии) то $y = Cx^2 + R$ и $y = x$ иксы и игрики равны в точке касания. А т.к. это вершины и расстояния между вершинами равны единице, то (пример для вершины в I четверти) $y = x = \frac{1}{2}$.

То $x = Cx^2 + R \Rightarrow Cx^2 - x + R = 0$

$0{,}25C - 0{,}5 + R = 0 \Rightarrow R = 0{,}5 - 0{,}25C$.

Ответ: $0{,}5 - 0{,}25C$.

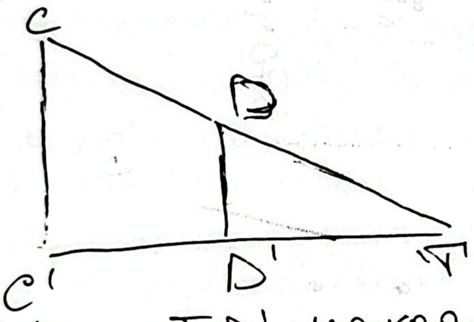
95-69-25-91 (129.3)

Чистовик. Задача №6 стр 1/1

1. Пусть пустырь плоский (в условии это не сказано) ~~Тогда~~ Т.к. забор высотой 2 метра, то ~~его верхний край~~ на расстояние его верхнего края до плоскости тоже 2 метра (для удобства пусть забор перпендикулярен плоскости, т.к. вид сверху - прямая). Тогда т.к. ~~прое~~ линия, соединяющая проекцию светлячка и самого светлячка перпендикулярна плоскости пустыря, то она параллельна забору.

2. Возьмем произвольное положение ~~свето~~ светлячка (назовем $C(x_i; y_i)$) и произвольную точку вершины забора $D(x_j; 0)$.

То:

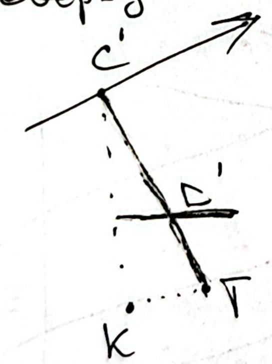


Они лежат в одной перпендикулярной пустырю плоскости (забор ⊥ пустырю; проекция C ⊥ пустырю).

Назовем точку продолжения линии CD до П с C'D' T

Отрезок TD' находится в тени.

Вид сверху

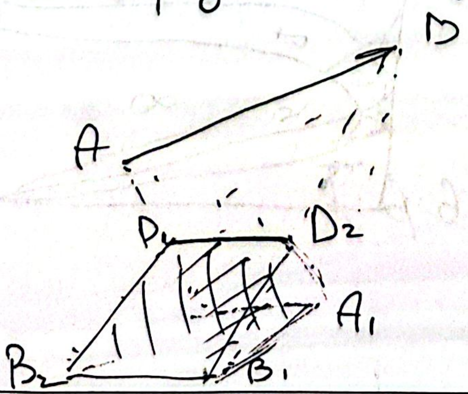


K имеет координаты

~~[illegible]~~

* Короче, из физики следует, что линия пересечения тени с плоскостью α будет являться отрезком, соединяющим

~~точку~~



Черновик

$$3x^2\log_a x - \log_x a - 2x \geq 0.$$

$$\frac{3x^2\cdot\log_a^2 x - 2x\cdot\log_a x - 1}{\log_a x} \geq 0.$$

$$\frac{(x\log_a x - 1)\left(x\cdot\log_a x + \frac{1}{3}\right)}{\log_a x} \geq 0.$$

$$x\cdot\log_a x - 1 \vee 0.$$

$$x\cdot\log_a x \vee 1.$$

$$x \vee \log_x a.$$

$$x^x = a$$

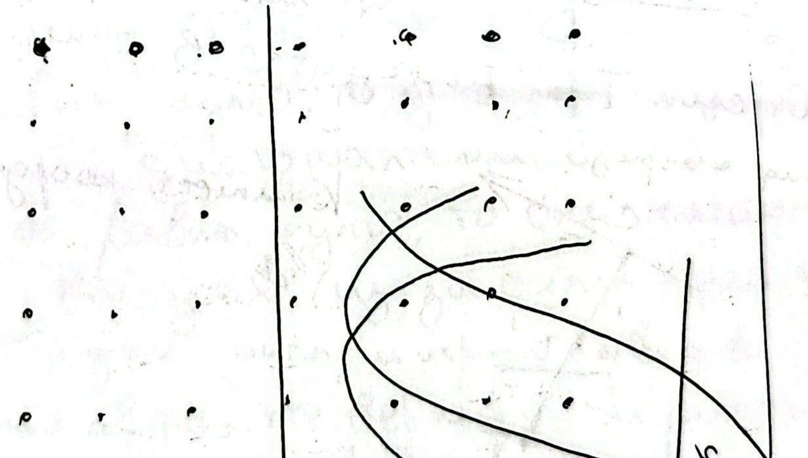
$\times$ 143
17
1001
143
2431

11
$\times$ 13
$\times$ 17

180 | 13
13 | 14,61
50
42
80

123
121
143.

180 | 11
16,36



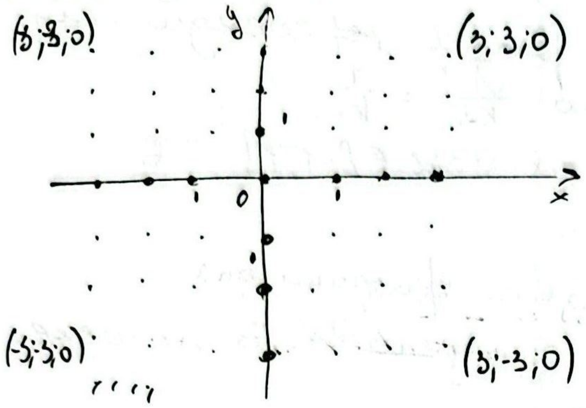
A // б // б

$x\cdot 6\cdot 6\cdot 7 + x\cdot 6\cdot 6\cdot 7$

Чистовик. Задача №3 стр. 1/1 (этой задачи)

Возьмем произвольную точку.

Всего точек:

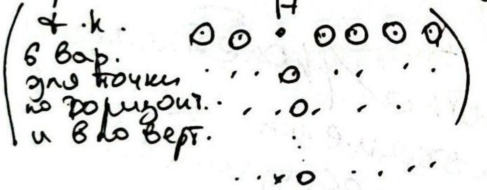


Т.к. каждая из координ (x, y или z) может принимать одно из 7 значений (-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3) меньших 3 по модулю и являющихся целыми, то всего точек $7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^3$

Т.к. катеты нашего треугольника параллельны осям, то треугольники лежат в плоскостях, параллельных xy; xz и zy.

Посчитаем для нашей точки кол-во треугольников, в которых она будет вершиной с прямым углом, в 1 плоскости: т.к. катеты параллельны осям, то одна из координат совпадает, а другая отличается от нашей произв. точки (в плоскости).

то $p = 6 \cdot 6 = 36$ треугольников в 1 плоскости, параллельной xy, yz и xz можно составить



Всего через 1 точку проходит 3 плоскости, параллельные xy, yz и xz.

То для произвольной точки есть $3p = 108$ ~~вариан~~ треугольников, в которых она является вершиной с прямым углов. То всего таких прямоугольных треугольников $7^3 \cdot 3p = 7^3 \cdot 108 = 37044$ прям. треугольников.

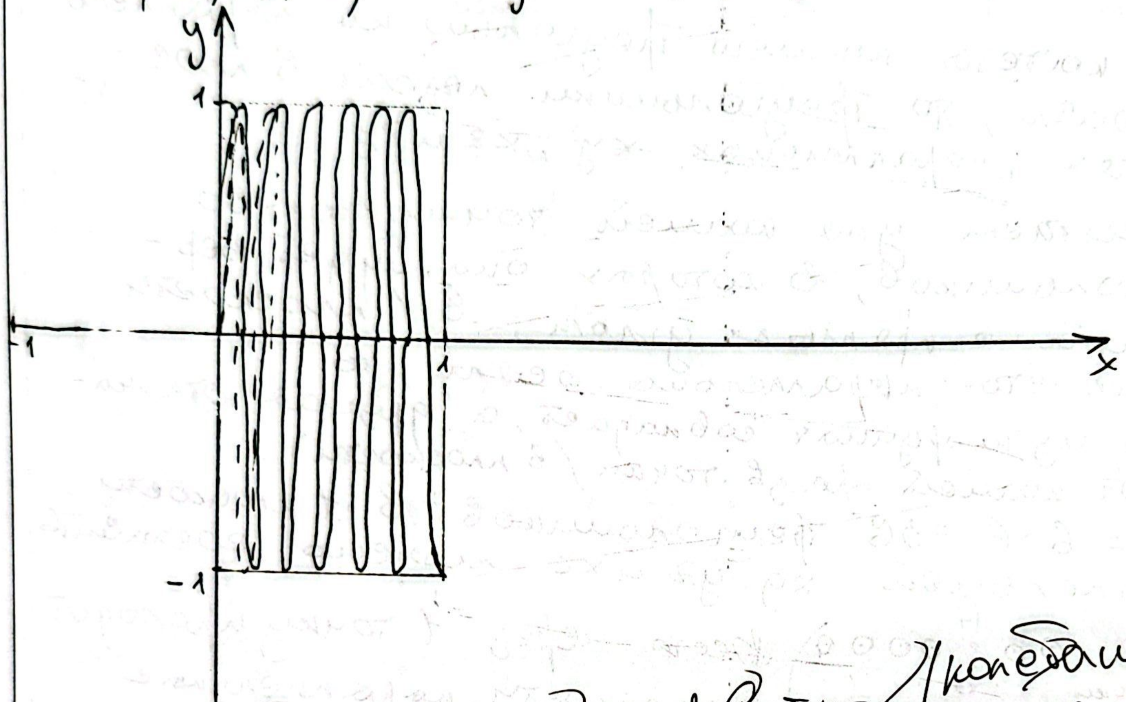
Ответ: 37044.

~~Доработка~~ Чистовик. Задача №4 стр. 1/2 (этой задачи)

$y = \sin k\pi x$. Графиком является синусоида, у которой начало в нуле, а расстояние между точками одной фазы (например ~~...~~ соседними пересечениями с Ox) равно: $\frac{\pi}{k\pi} = \frac{1}{k}$.

$y \in [-1;1]$ т.к. $y = \sin k\pi x$, а $\sin\alpha \in [-1;1]$. В данном случае $\alpha = k\pi x$.

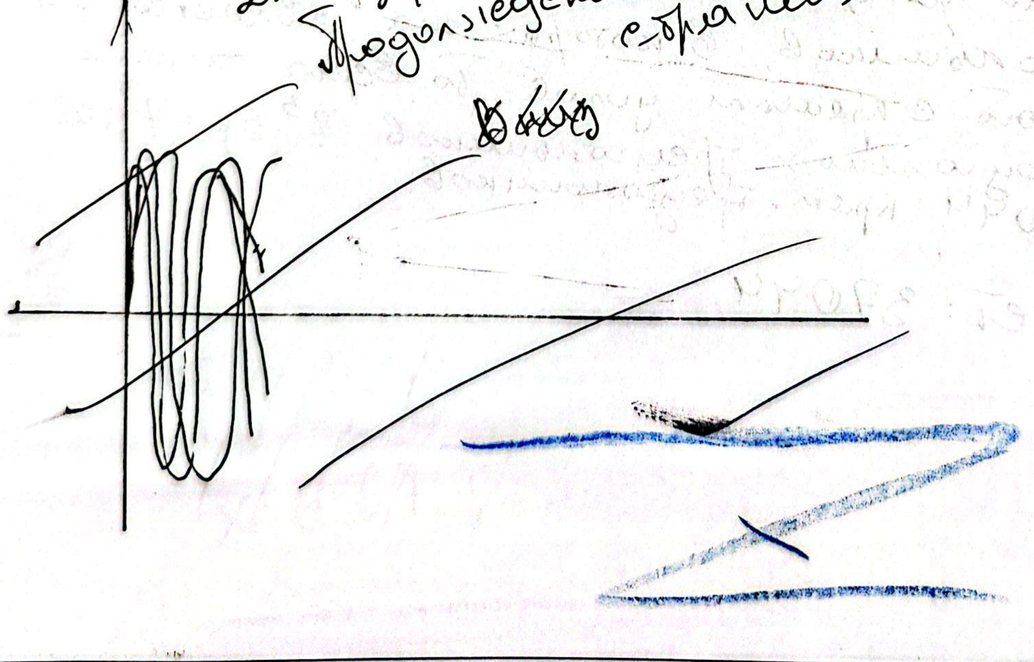
Тогда схематично изобразим график для $k \in \{11, 13, 17\}$ на данной по условию полоске:



Изобразим по 2 витка (колебания)

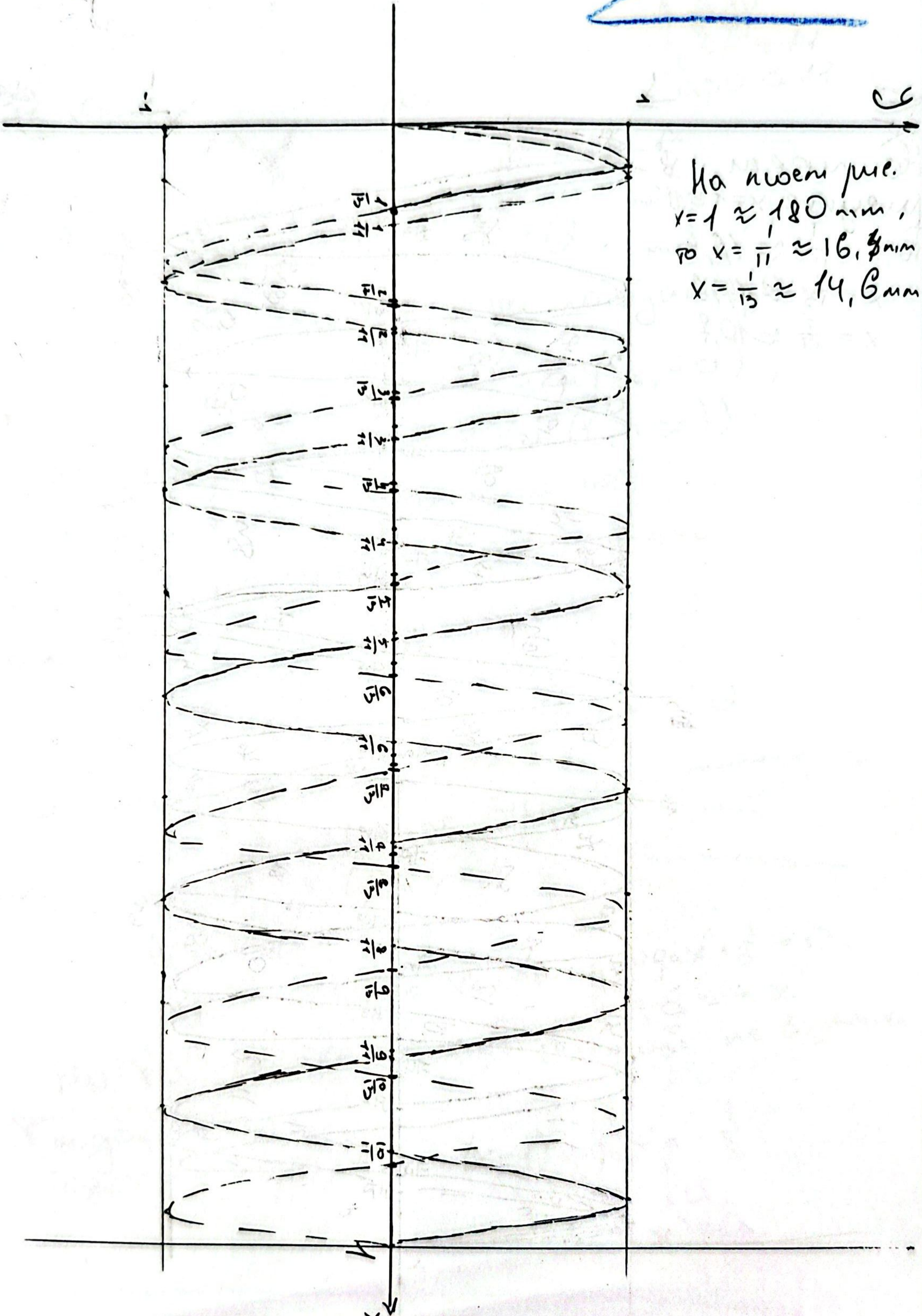
Для удобства растянем x.

Продолжение на следующей странице.



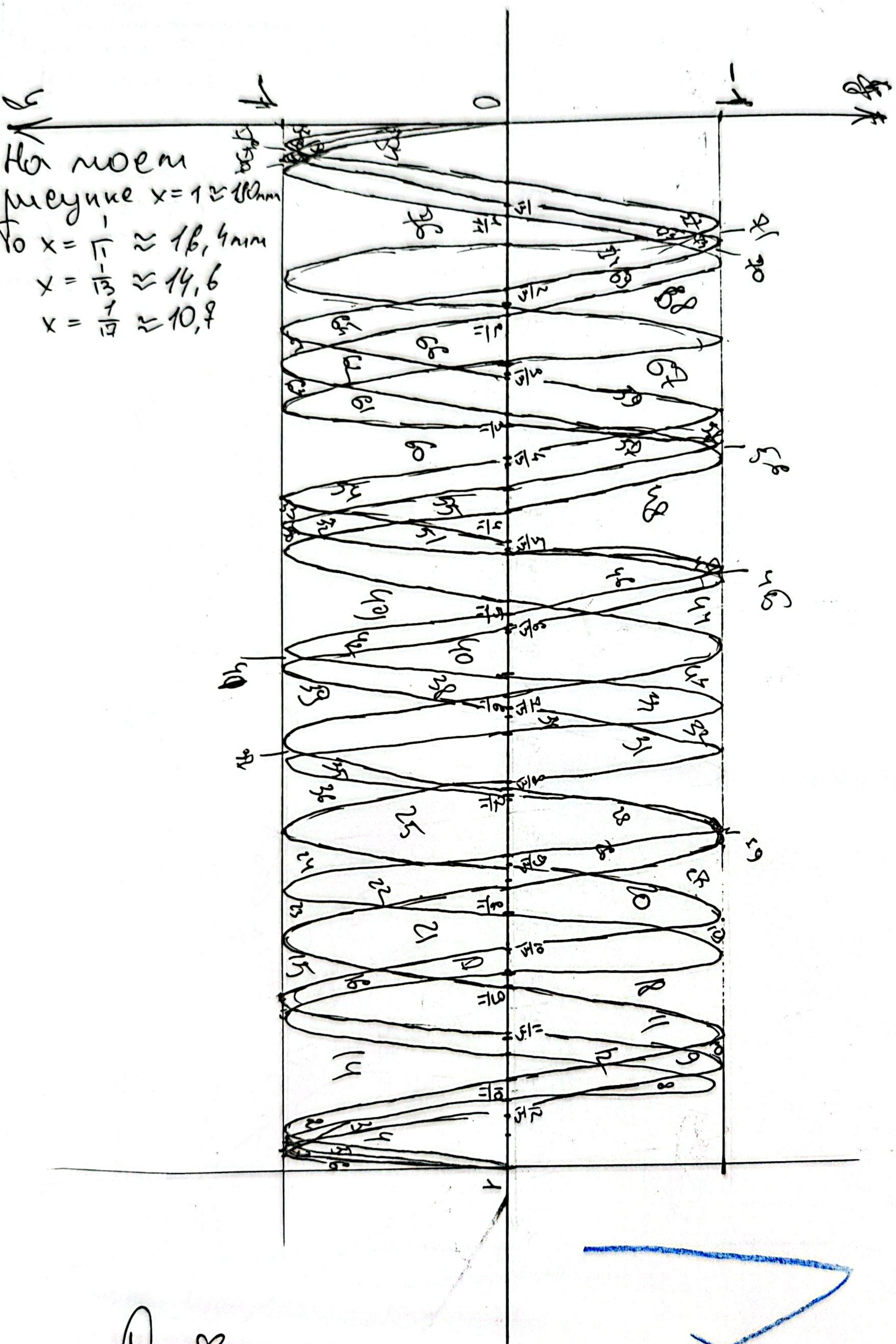
~~Чистовик. Задача №4 стр 21~~

Черновик



На листе рис.
$x = 1 \approx 180$ мм,
то $x = \frac{1}{11} \approx 16,3$ мм
$x = \frac{1}{13} \approx 14,6$ мм

Чистовик. Задача №4. стр 2/2 (этой задачи)



На моем рисунке $x = 1 \approx 180$ mm

то $x = \frac{1}{11} \approx 16,4$ mm

$x = \frac{1}{13} \approx 14,6$

$x = \frac{1}{17} \approx 10,7$

Ответ: 84.

Чистовик. Задача № 8.

$3x^2 \cdot \log_a x - \log_x a - 2x \geq 0$

1. Ограничение:

$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$

$x > 0$ $x \neq 1$

$a > 0$ $a \neq 1$.

$3x^2 \cdot \log_a x - \frac{1}{\log_a x} - 2x \geq 0$

$\frac{3x^2 \cdot \log_a^2 x - 1 - 2x \log_a x}{\log_a x} \geq 0$

$\frac{3(x\log_a x - 1) \cdot (x\log_a x + \frac{1}{3})}{\log_a x} \geq 0.$

Т.к. $x > 0$ и $x \neq 1$ то полуинтервал имеет вид: $[x_0; +\infty)$ или $(x_0; +\infty)$, где $x_0 \geq 1$ (если $x_0 = 1$, то $(1; +\infty)$).

Т.к. при $x \to -\infty$ решений нет.

Значит одна точка будет только если или $\log_a x = x \cdot \log_a \cancel{x} - 1$ ①

или $\log_a x = x \cdot \log_a x + \frac{1}{3}$ ②

или $x \log_a x + \frac{1}{3} = x \cdot \log_a x - 1$ ③

③ $x \cdot \log_a x + \frac{1}{3} = x \cdot \log_a x - 1$

$+\frac{1}{3} = -1$ не верно.

① $\log_a x = x \cdot \log_a x - 1$

$\log_a x \cdot (x - 1) = 1.$

$x^{x-1} = a$. То x_0 это $x \cdot \log_a x + \frac{1}{3} = 0.$

$\frac{1}{3} a = -x^x.$

Но т.к. $a > 0$ то этот случай не возможен

Тогда

$\log_a x = x \cdot \log_a x + \frac{1}{3}$ $(x-1)\log_a x = -\frac{1}{3}$

$x^{x-1} = -\frac{1}{3} a.$

$x_0 = x^x = a.$