



**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА**

Вариант 5, 11 класс

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников ~~Москвы~~ "Ломоносов"
наименование олимпиады

по Математике
профиль олимпиады

Кряжнина Алексея Сергеевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

« 29 » 03 2026 года

Подпись участника

Kryazh

ВВВ Числовый

N1

$$\sqrt{6(1-\cos^2 x)} = 4 \sin x \quad | \cdot 2 \quad \sin x \geq 0 \Rightarrow x \in [\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}]; n \in \mathbb{Z}$$

$$6(1 - \frac{\sin^2 x}{1 - \sin^2 x}) = 16 \sin^2 x$$

~~$$6 - 6 \sin^2 x = 16 \sin^2 x$$~~

$$6 - 12 \sin^2 x = 16 \sin^2 x - 16 \sin^4 x \quad | : 2$$

$$3 - 6 \sin^2 x + 8 \sin^4 x = 0$$

$$\frac{D}{4} = 9 - 8 \cdot 3 = 49 - 24 = 25 = 5^2$$

$$\sin^2 x = \frac{7 \pm 5}{8}$$

$$\begin{cases} \sin^2 x = 1,5 & \emptyset \\ \sin^2 x = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Итак как $\sin x \geq 0$:

$$\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi m; m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi m; m \in \mathbb{Z} \end{cases}$

N2

Пусть одна из трёхзначных чисел кратна 9, А имеет вид \overline{abc}
тогда $(\frac{abc}{9})$: 9. Так как $a+b+c$ - целое число, то одна
выдел, то \overline{abc} : 9. По по причине симметричности 3 эти
суммают, то $(a+b+c):9$, т.е. $abc = 9k \quad (k \in \mathbb{Z})$

$$(\frac{abc}{9k}) : 9, \text{ или } \frac{abc}{9k} = 9n \quad (n \in \mathbb{Z})$$

значит $\overline{abc} = 81kn \Rightarrow \underline{\overline{abc} : 81}$

~~Всего 11~~ Таким образом трёхзначных чисел всего 11:

$$\frac{162}{9} \quad \frac{243}{9} \quad \frac{324}{9} \quad \frac{405}{9} \quad \frac{486}{18} \quad \frac{567}{18} \quad \frac{648}{18} \quad \frac{729}{9} \quad \frac{810}{9} \quad \frac{891}{18} \quad \frac{972}{18}$$

Все числа с суммой цифр 9 подходят, т.е. $:81 \Rightarrow \frac{abc}{9} : 9$.

Эти числа $\boxed{162}, \boxed{243}, \boxed{324}, \boxed{405}, \boxed{810}$.

Числа с суммой цифр 18 подходят только следующие четвёрки:

Эти числа $\boxed{486}, \boxed{648}, \boxed{972}$, они подходят только 567, 729 и 891

Все числа $\boxed{162}, \boxed{243}, \boxed{324}, \boxed{405}, \boxed{486}, \boxed{648}, \boxed{810}, \boxed{972}$ $243+648+972 = 1863$

Ответ: 1863

08-43-55-92
(124.30)

Умножение

и ч

Все сиринданы написаны в \mathbb{Q} , м.к. $\sin 0 = 0$.

Получим точки θ , каждая группа на $x \in (0, 1]$ имеет k раз пересечений с \mathbb{Q} (м.к. $\sin \theta_k = 0$; но $\sin k\theta \cdot \frac{1}{k} = \sin k\theta \cdot \frac{2}{k} = \dots = \sin k\theta \cdot \frac{k}{k} = 0$), и все группы снова соединятся в точку $(1; 0)$.

При этом каждая группа имеет $\frac{k+1}{2}$ раз, q точек $\frac{k-1}{2}$ раз. При этом крайние точки $(0; 0)$ и $(1; 0)$, все эти группы симметрично не пересекаются. Пусть это неверно, тогда $\sin 11\theta_1 = \sin 15\theta_1 = \sin 19\theta_1$. Значит, θ_1 пересекать

эти точки с $\sin \theta = 0$ не совпадают ни с какими группами, м.к. все корни из $k \in \{11, 15, 19\}$ - взаимнопросты.

могут быть $11\theta_1, 15\theta_1$ и $19\theta_1$ симметричны на $2\theta_1$ или в сумме дают $\pi + 2\theta_1$ ($m, n \in \mathbb{Z}$)

Для $11\theta_1$ и $15\theta_1$

1) $11\theta_1 + 2\pi m = 15\theta_1$; $4\theta_1 = 2\pi m \Rightarrow$, м.к. $\theta_1 \in (0; 1)$, $\theta_1 = \frac{95}{26} m$, $m \in \mathbb{Z}$ ← симметрично

$\sin 11\theta_1 = \sin 15\theta_1 = -1$

2) $11\theta_1 + \pi + 2\pi m = 15\theta_1$

$26\theta_1 = \pi + 2\pi m$; $\theta_1 = \frac{\pi(1+2m)}{26}$; $m \in \mathbb{Z}$, $\theta_1 \in (0; 1)$ ← $\frac{1}{26} \cdot \frac{3}{26} \dots \frac{25}{26}$

Для $11\theta_1$ и $19\theta_1$

1) $11\theta_1 + 2\pi m = 19\theta_1$; $8\theta_1 = 2\pi m \Rightarrow$ м.к. $\theta_1 \in (0; 1)$; $\theta_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{2\pi}{3} m$, $m \in \mathbb{Z}$ ← для значений

2) $11\theta_1 + \pi + 2\pi m = 19\theta_1$

$28\theta_1 = \pi + 2\pi m \Rightarrow$ м.к. $\theta_1 \in (0; 1)$; $\theta_1 = \frac{1}{28} \cdot \frac{3}{28} \dots \frac{27}{28} m$, $m \in \mathbb{Z}$ ← 14 значений

Для $15\theta_1$ и $17\theta_1$

1) $15\theta_1 + 2\pi m = 17\theta_1$; $2\theta_1 = 2\pi m \Rightarrow$, м.к. $\theta_1 \in (0; 1)$, $m \in \mathbb{Z}$ ←

2) $15\theta_1 + \pi + 2\pi m = 17\theta_1$

$32\theta_1 = \pi + 2\pi m \Rightarrow$, м.к. $\theta_1 \in (0; 1)$, $\theta_1 = \frac{1}{32} \cdot \frac{3}{32} \dots \frac{31}{32} m$, $m \in \mathbb{Z}$ ← 16 значений

множества $\{\frac{1}{26} \cdot \frac{3}{26} \dots \frac{25}{26}\}$; $\{\frac{1}{28} \cdot \frac{3}{28} \dots \frac{27}{28}\}$; $\{\frac{1}{32} \cdot \frac{3}{32} \dots \frac{31}{32}\}$ не имеют

единого общего элемента, более того, как бы уделили мы эти отрезки, мы не в той мере еще группы не пересекаются влито, а влито - иррационально.

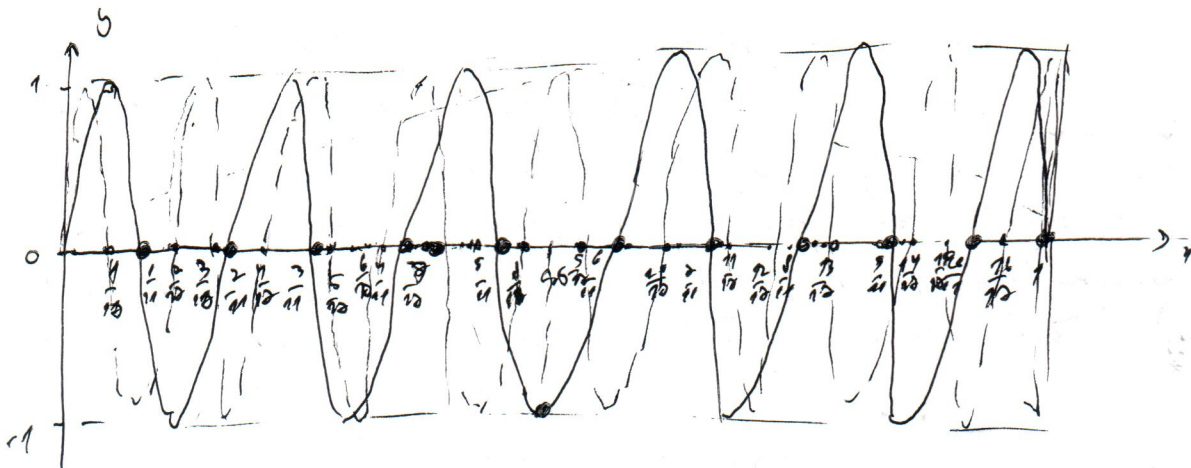
Умножить

не все слагаемые в этой сумме пересеклись. Значит некоторые пересеклись один раз, некоторые не пересеклись ни разу.

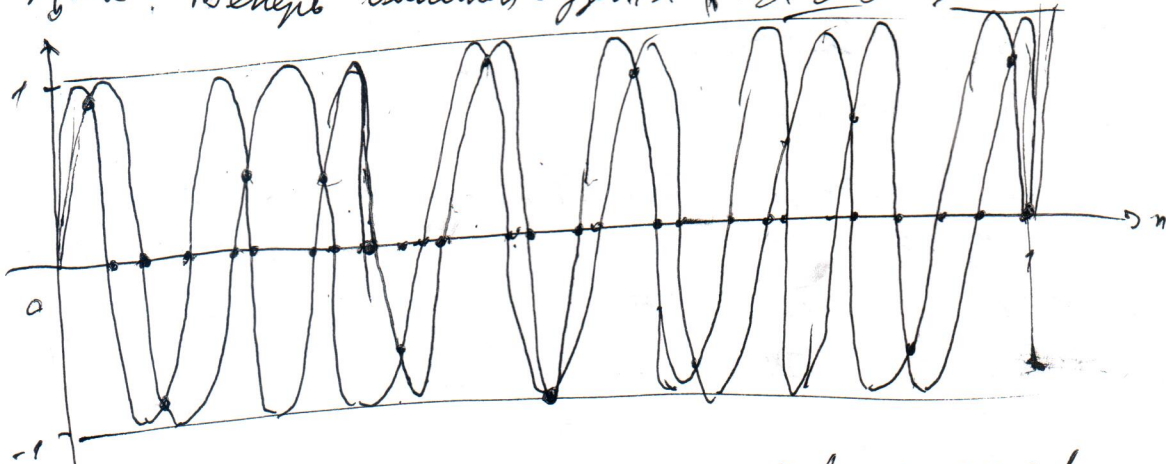
Число:	$y=1$	$y=-1$	$y=0$
$y = \sin 11\pi x$	6	5	12
$y = \sin 15\pi x$	8	7	16
$y = \sin 20\pi x$	9	8	18

16π на $y=1$, 0 на $y=-1$
 12π на $y=1$, 0 на $y=-1$
 16π на $y=1$, 0 на $y=-1$

Сумма значений функции $y = \sin 11\pi x$. Она равна нулю на 13 местах ($6+5+1+1=13$)



Добавим функцию $y = \sin 15\pi x$. Она имеет нули на $y=0$, 13 местах (вплоть до $(0,0)$ и $(1,0)$), одна из точек $(0,5; -1)$ - не на $y=0$. Теперь сумма будет $13 + (8+7) + 1 + 1 = 41$



Добавим функцию $y = \sin 20\pi x$, найдет π все слагаемые в $16 + 16 + 2 = 34$ местах $(\frac{1}{32}, \frac{2}{32}, \dots, \frac{31}{32}) \cup \{\frac{1}{28}, \frac{2}{28}, \dots, \frac{27}{28}\} \cup \{\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\}$

Сумма будет $41 + (9+8) + 34 - 1 = 91$ точек

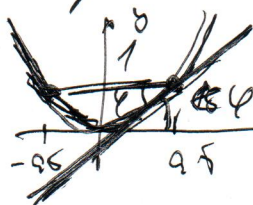
Ответ: 91

08-43-55-92
(124,30)

Условие:

N5

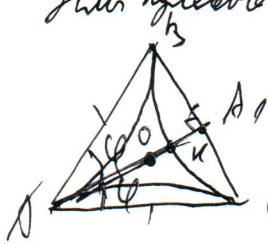
Дан конус с "треугольным" сечением, где все вывес, то четыре "дуги" параболы, являющиеся "сечениями треугольника" для вершины параболы $C \neq 0$. Тогда, мы рассмотрим с вершинами C равно 1, все дуги параболы имеют с $C \neq 0$ и $C \neq 0$ по x



$y' = 2C x$ и $y'(±95) = ±C$

Тогда $\tan \varphi$ уже известен, равно $\pm C$.

Тогда нулевой по дуге, тогда $\varphi = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$



$\tan \varphi = \frac{1}{\sqrt{3}} = |C| \Rightarrow |C| = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Из симметрии четырех окружностей линия в середине C и $C \triangle ABC$. $y(±95) = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (95)^2 = \frac{1}{\sqrt{3}} = AA_1 K$.

$AA_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ - высота $\triangle ABC$ с стороной 1.

$\sin \varphi = \frac{AK}{AA_1} = \frac{2}{3} \Rightarrow AK = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$OK = AA_1 - AK = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = R$ окружностью, мы

из соображений симметрии, в точке K окружности параболы дуги касаются. Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{12}$

N7

Очевидно, что параболы с одинаковым значением не пересекаются, мы, $y_1 = \frac{x^2}{2} + C_1$ и $y_2 = \frac{x^2}{2} + C_2$, тогда $y_1 = y_2 = \frac{x^2}{2} + C_1 = \frac{x^2}{2} + C_2 \Rightarrow C_1 = C_2$ неверно.

Рассмотрим параболы $y_1 = \frac{x^2}{2} + C_1$ и $y_2 = \frac{x^2}{2} + C_2$ и найдем их пересечение:

$\frac{x^2}{2} + C_1 = \frac{x^2}{2} + C_2 \Rightarrow x^2 = C_2 - C_1$ ($C_2 \geq C_1$)
 $x = \pm \sqrt{C_2 - C_1}$

$y(\sqrt{C_2 - C_1}) = \frac{C_2 - C_1}{2} + C_1 = \frac{C_1 + C_2}{2}$

Тогда точки пересечения имеют вид $(\pm \sqrt{C_2 - C_1}; \frac{C_1 + C_2}{2})$, где $C_1, C_2 \in \mathbb{Z}$, $C_2 \geq C_1$.

А теперь, учитывая условие "дуги касаются", имеем координаты вида $(\pm \sqrt{C_2 - C_1}; \frac{C_1 + C_2}{2})$.

$(\pm \sqrt{C_2 - C_1}; \frac{C_1 + C_2}{2}); (\pm \sqrt{C_2 + 1 - C_1}; \frac{C_1 + C_2 + 1}{2}); (\pm \sqrt{C_2 - (C_1 + 1)}; \frac{C_1 + C_2 - 1}{2}); (\pm \sqrt{C_2 - C_1}; \frac{C_1 + C_2}{2} + 1)$.

Заметим, что касательные к параболам в этих точках являются касательными к дугам параболы, тогда касательные к дугам параболы касаются в этих точках.

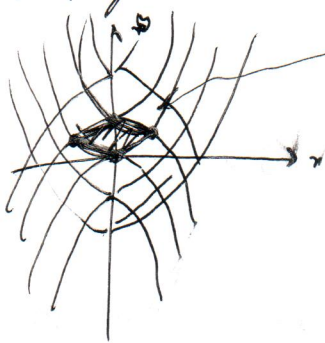
Умножить

звонкое урдлимым ваветим, равна $\frac{1}{2} \left(\frac{c_1+c_2}{2} + 1 - \frac{c_1+c_2}{2} \right) (\sqrt{c_2-c_1+1} - \sqrt{c_2-c_1-1})$
 $= \frac{1}{2} (\sqrt{c_2-c_1+1} - \sqrt{c_2-c_1-1})$ Физический-по член c_1 и c_2 , что

уделит то короткото велики удовлетворяют условию $|x| \leq 10,5$
 $|y| \leq 14,85$

онизально решается ваветим, когда $c_1+c_2=0$ ($c_1=c_2$)

на основе для момента. ~~В~~ короткото се велики:



$(0; 0); (0; c+1); (1; \frac{1}{2}+c); (-1; \frac{1}{2}-c)$

или $S = \frac{1}{2} \cdot (c+1 - c) \cdot (1-(-1)) = \frac{1}{2}$

это значит не интересен, и т. бм $c_2 = c_1 = 1$!

$S = \frac{1}{2} (\sqrt{1+1} - \sqrt{1-1}) = \frac{\sqrt{2}}{2} > \frac{1}{2}$. Углом $c_2 - c_1 = 0$

Каждо минимально значение $S(\Delta C) = \frac{1}{2} (\sqrt{c_2+c_1} - \sqrt{c_2-c_1})$

$S'(\Delta C) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{c_2+c_1}} - \frac{1}{\sqrt{c_2-c_1}} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{\sqrt{c_2-c_1} - \sqrt{c_2+c_1}}{\sqrt{c_2^2-1}} \right) = 0$
 $\sqrt{c_2-c_1} = \sqrt{c_2+c_1}$ - не выполняется

при этом $S'(\Delta C)$ всегда < 0 , и $\frac{1}{2} (\sqrt{c_2-c_1} - \sqrt{c_2+c_1}) < 0$

значит $c_1 \uparrow \Delta C$ значение $S \downarrow$. Минимум достигается

при $\Delta C = 1; S = \frac{\sqrt{2}}{2}$

это как $|x| \leq 10,5$ $|y| \leq 14,85$, а чм $c_2=1; c_1=0$ велики $(1; 0,5); (\sqrt{2}; 1); (\cos 1); (\sin 1)$

но это значит достигается $S_{\min} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Умножить:

и 8

$8x^2 \log_9 x - \log_9 9 - 2x \geq 0$

$8x^2 \log_9 x - \frac{1}{\log_9 x} - 2x \geq 0$

$8x^2 \cdot \log_9^2 x - 2x \cdot \log_9 x - 1 \geq 0$

$\frac{(4x \log_9 x + 1)(2x \log_9 x - 1)}{2 \log_9 x} \geq 0$

OD3) $\begin{cases} x, 9 > 0 \\ x \neq 1 \\ 9 \neq 1 \end{cases}$

$|; 8x^2 > 0$

Числами

$$\frac{(\log_a x - (-\frac{1}{4x})) (\log_a x - \frac{1}{2x})}{\log_a x} \geq 0$$

$$\frac{(a-1)(x + a^{-\frac{1}{4x}})(a-1)(x - a^{\frac{1}{2x}})}{(a-1)(x-1)} \geq 0 \quad x: (a-1)^2 > 0$$

$$\frac{(x + a^{-\frac{1}{4x}})(x - a^{\frac{1}{2x}})}{(a-1)(x-1)} \geq 0$$

$$\frac{(x^{\frac{4x}{4}} - \frac{1}{a})(x^{\frac{2x}{2}} - a)}{(a-1)(x-1)} \geq 0$$

$\begin{cases} x > 0 \\ a > 0 \\ x \neq 1 \\ a \neq 1 \end{cases}$ Система этих условий:

$$(4x \log_a x)' = 4x \cdot \frac{1}{x \ln a} + 4 \cdot \log_a x = \frac{4}{\ln a} + 4 \cdot \frac{\ln x}{\ln a} = \frac{4}{\ln a} (\ln x + 1) > 0$$

При $a > e$: $\frac{4}{\ln a} (\ln x + 1)$ - монотонно

~~Если~~ $\forall x \in \mathbb{R} \log_a e + 1 \geq 0$

$$\log_a e + \frac{1}{4e} \geq 0$$

$$\frac{(a-1)(e - a^{\frac{1}{4e}})}{2e} \geq 0$$

$$e \geq a^{\frac{1}{4e}}$$

$$a \leq \frac{e^{4e}}{1}$$

При $a < 1$ $1 < a < e^{-4e}$ $\forall x \log_a x + 1 > 0$

При $a = e^{-4e}$ $4x \log_a x + 1 = 0$ при $x = e$

При $a > e^{-4e}$ $a > e^{-4e}$ - 2x на $(4x \log_a x + 1) = 0$

При $a < 1$: $\forall x \in \mathbb{R} \log_a e + 1 < 0$

$$\frac{(a-1)(e - a^{\frac{1}{4e}})}{2e} \geq 0$$

$$e \leq a^{\frac{1}{4e}}$$

$$a \geq e^{4e} > 1 \quad \text{и } \forall x \cdot \log_a x + 1 < 0 \text{ все } x \text{ при } a < 1$$

$$(2x \log_a x)' = 2x \cdot \frac{1}{x \ln a} + 2 \cdot \log_a x = \frac{2}{\ln a} (\ln x + 1); \quad x = \frac{1}{e} \text{ - наим. значение}$$

При $a > 1$: $2x \ln a e - 1 \geq 0$

$$\ln a e - \frac{1}{2e} \geq 0$$

$$\frac{(a-1)(e - a^{\frac{1}{2e}})}{2e} \geq 0$$

$$e \geq a^{\frac{1}{2e}}$$

$$a \leq \frac{e^{2e}}{1}$$

При $a < 1$ $a < e^{-2e}$ $\forall x \log_a x - 1 > 0$

При $a = e^{-2e}$ $2x \log_a x - 1 = 0$ при $x = \frac{1}{e}$

При $a > e^{-2e}$ - 2x

При $a < 1$: $(2x \log_a x - 1)$ все $x < 1$

Иногда надо проверить \log_a в левом полуинтервале и некий.

Умножим

$$\sqrt{b(1-\sin^2 x)} = 4 \sin x$$

$$\sqrt{b(\cos^2 x - \sin^2 x)} = 4 \sin x$$

$$y = kx^2 \quad y = k(x^2 + 2bx + b^2) \quad (k \in \mathbb{R}; b \neq 0; x \in \mathbb{Z})$$

$$6 \cos^2 x - 6 \sin^2 x - 16 \sin^2 x \cos^2 x = 0$$

$$6 - 6 \sin^2 x - 6 \sin^2 x - 16 \sin^2 x (1 - \sin^2 x) = 0$$

$$16 \sin^4 x - 28 \sin^2 x + 6 = 0$$



$$8 \sin^2 x - 14 \sin^2 x + 3 = 0$$

$$\frac{1}{4} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 3 \right) = 49 - 2 \sin^2 x$$

$$\cos^2 x - 4 \geq 0 \quad \sin^2 x = \frac{7 \pm 5}{16}$$

$$(25 - 1)(x - 25) \geq 0 \quad \sin^2 x = \frac{1}{4}$$

$$x \geq 24 \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}$$

$$x \leq \frac{1}{16}$$

$$b = 9, 9n, \dots, 9n$$

$$\left(\frac{b}{9, 9n, \dots, 9n} \right) : 9$$

$$a, b, c, k \in \mathbb{Z}$$

$$\log_2 x + 4 \geq 0$$

$$\frac{1}{4} \log_2 x + 1 \geq 0 \quad \log_2 x + 4 \geq 0$$

$$\left(\frac{100a + 100b + c}{a + b + c} \right) : 5 = 9k$$

$$y = 9, 9n = \sqrt{a, 1, 1} \quad y = 24, 3 = y < 1$$

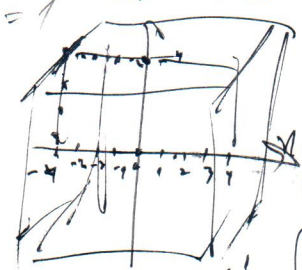
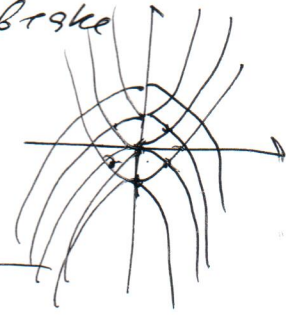
$$y = \frac{1}{2} \geq 0 \quad \frac{243}{648} = \frac{972}{972}$$

$$0.29699 = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{18,63}{18}$$

$$y = \frac{1}{2} \geq 0 \quad \frac{4x \cdot \frac{1}{2} + y \cdot \log_2 x}{274} = \frac{4x \cdot \frac{1}{2} + y \cdot \log_2 x}{274}$$

$$\frac{2x + y \cdot \log_2 x}{137} = \frac{2x + y \cdot \log_2 x}{137}$$

$$\frac{2x + y \cdot \log_2 x}{137} = \frac{2x + y \cdot \log_2 x}{137}$$



$$y = \frac{x^2}{5} + C_1 = y_2 = \frac{x^2}{2} + C_2$$

$$x^2 = \Delta C \geq 0 \quad x = \sqrt{\Delta C}$$

$$y = \frac{b}{2} x^2 = C_2 - C_1 + C_3 = \frac{19.02}{2}$$

$$y = -\frac{x^2}{2} + C_1 \quad y = \frac{1}{2} + C$$