0 514234 380000

51-42-34-38
(122.9)

1755

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 9 класс

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Кострикина Андрея Николаевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«29» марта 2026 года

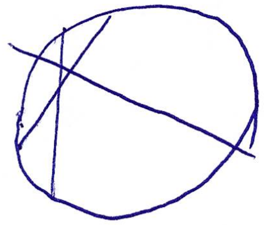
Подпись участника
Костр

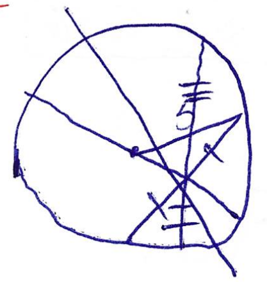
100 (сто)

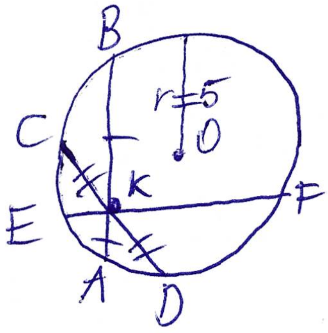
51-42-34-38 (122.9)

1)

Чистовик







Дано: $\omega(O;5)$

$r=5$ $AB; CD; EF$ — хорды

$K = AB \cap CD \cap EF$

$AK=KB$; $CK=KD$

Найти: $\min(EF)$

Диагонали четырёхугольник ACBD делят друг друга точкой пересечения пополам. Это признак параллелограмма (далее пар-грамм), поэтому ACBD — пар-грамм.

Пар-грамм ACBD вписан в $\omega(O;r)$, поэтому, по признаку прямоугольника, прямоугольником является.

Диагонали ACBD, как прямоугольника, проходят через O, т.к. по св-ву прямоугольника они равны. Значит они пересекаются в точке O.

Хорда EF тоже проходит через O как единственную точку пересечения 3 хорд, а значит EF — диаметр, и её минимальная длина равна $2r = 2\cdot 5 = 10$

Ответ: 10.

Стр 1 из

2) $n^2 = \overline{abcd} \in \mathbb{N} \mid 10^6 \leq n^2 \leq 10^8$ Чистовик

$$\left[\begin{array}{l} n^2 = \overline{abcdefgh} \\ n^2 = \overline{abcdefg\cancel{hi}} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} n^2 = 1000n + \overline{efg} \\ n^2 = \overset{10000n}{\cancel{1000n}} + \overline{efgh} \end{array}\right.$$

$$n^2 - 1000n - \overline{efg} = 0$$

$$n_{1,2} = \frac{1000 \pm \sqrt{1000000 + 4\overline{efg}}}{2} =$$

$$= 500 \pm \sqrt{250000 + \overline{efg}}$$

$$250000 = 500^2$$

$$501^2 = 250000 + 500 + 501 = 251001$$

$$1001 > \overline{efg} \Rightarrow \overline{efg} = 0$$

$$500 + \sqrt{250000} = 500 + 500 = 1000 = \overline{abcd}$$

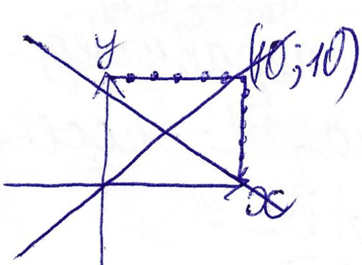
$1000 < \overline{abcd} + n$, где $n \in \mathbb{N}$, $n < 9000$, $\overline{abcd} < 10000 \Rightarrow 1000 = \min(\overline{abcd})$

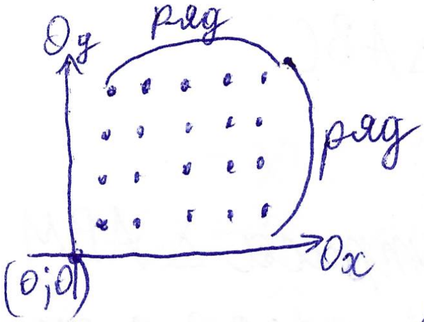
Ответ: 1000.

3) Назовём „рядом" набор из точек, лежащих на прямой, параллельной одной из коорд. осей.

Стр 2 из

3)





Чистовик

Дано: пл-сть $(O_x; O_y)$

$F = \{(x_1; y_1); (x_2; y_2) \dots (x_n; y_n)\}$, что $x_k \in \mathbb{N}$; $y_k \in \mathbb{N}$; $x_k \leq 10$; $y_k \leq 10$

$\triangle ABC$ – прям. треуг. с гипотен. AC; $AB \parallel O_y$; $BC \parallel O_x$

Найти: кол-во $\triangle ABC$

Т.к. x_k и $y_k \in \mathbb{N}$, то $1 \leq x_k \leq 10$; $1 \leq y_k \leq 10$, т.е. на плоскости 10 „рядов" по 10 точек в каждом

Точку B можно выбрать 100 способами.

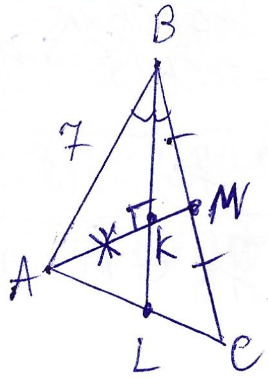
Точку A можно выбрать из точек ряда, параллельного O_y, которому принадлежит B. При этом $A \neq B$, т.е. выбрать A можно 9 способами, независимо от расположения B, т.к. все ряды одинаковы и равны 10.

Точку C, аналогично A, выбираем из 9 оставшихся точек ряда, содержащего B и параллельного O_x.

Всего треугольников ABC: $100 \cdot 9 \cdot 9 = 8100$

Ответ: 8100.

Стр 3 из 3

4) 

Чистовик

Дано: $\triangle ABC$ - неравнобедр.

AM - медиана; BL - биссект.

$AM \perp BL$ $AB=7$

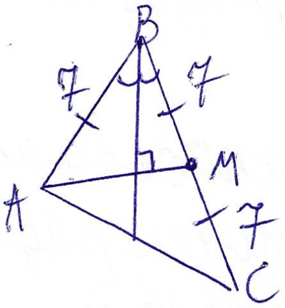
$BC \in \mathbb{Z}$ $AC \in \mathbb{Z}$

Найти: $P_{\triangle ABC}$

Пусть $K = AM \cap BL$

BK - высота и биссектриса $\triangle ABM$

Из этого, по признаку равнобедр. треуг., $\triangle ABM$ - равнобедр., где $AB = BM$



$BM = MC \Rightarrow BC = 2BM = 2AB = 14$

$AC \neq 14$, т.к. $\triangle ABC$ - неравнобедр.

По правилу $\triangle$, сумма AB и BC больше $AC \Rightarrow AC < 21$

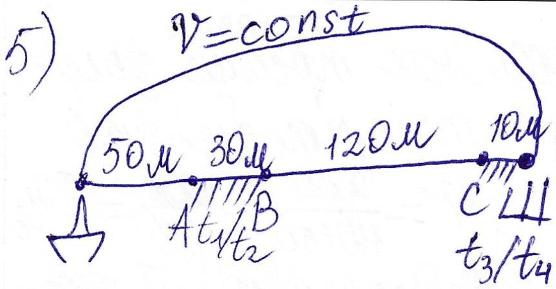
По правилу $\triangle$, сумма AB и AC больше $BC \Rightarrow AC > 7$

$7 < AC < 21$; $AC \neq 14$

Целочисленный периметр $\triangle ABC$ варьируется от $8+7+14=29$ до $20+7+14=41$, за исключением $14+7+14=35$

Ответ: $P_{ABC} \in [29; 41]$, $P_{ABC} \in \mathbb{Z}$; $P_{ABC} \neq 35$.

5) Чистовик



Дано: ДА = 50 м

АВ = 30 м

ВС = 120 м

СШ = 10 м

$v = const$

$t_1 = 30$ с $\quad t_2 = 50$ с $\quad t_{c_1} = 0$ с

$t_3 = t_4 = 50$ с $\quad t_{c_2} = 10$ с

Найти: v_{max}

Чтобы проехать светофор №1 на зелёный свет так, чтобы зелёный свет ко времени прибытия Агриппины (далее Аг) не загорелся во второй раз, девочке нужно ехать со скоростью не менее $\frac{50м+30м}{30с+50с} = 1$ м/с, но не более $\frac{50м}{30с} = \frac{5}{3}$ м/с, иначе она попадёт на красный свет в конце или в начале ~~своего пути.~~ пересечения перехода №1. $1 \leq v_{max} \leq \frac{5}{3}$

Теперь обратим внимание на переход №2. На нём Аг должна уложиться в 50 из 100 секунд цикличной работы светофора. Дано, что красным он загорается через 10 секунд после выезда Аг из Д. Если Аг хочет уложиться в первые 60 сек после выезда, то она должна ехать с $v = \frac{200}{60} = \frac{10}{3}$ м/с, но $1 \leq v \leq \frac{5}{3}$. Значит, она должна уложиться в 110 сек, чтобы светофор не зажёгся красным во 2-й раз. Значит ей надо ехать с $v = \frac{210}{110} = \frac{21}{11}$ м/с, что всё ещё больше $\frac{5}{3}$ м/с.

Стр 5 из

Чистовик

5) Поэтому ей надо приехать на третий зелёный свет 2-го светофора. Для того, чтобы это сделать, ей нужно ехать с $v=\frac{200}{110+50}=\frac{200}{160}=\frac{5}{4}$ м/с

$1\le\frac{5}{4}\le\frac{5}{3}$. Таким образом Аг проедет 1-й переход за $\frac{80}{\frac{5}{4}}=64$ с, приехав к нему на $\frac{50}{\frac{5}{4}}=40$ с, а 2-й переход проедет на $\frac{210}{\frac{5}{4}}=168$ с, приехав к нему за $\frac{200}{\frac{5}{4}}=160$ с, ни разу не попав на красный свет.

Ответ: 1,25 м/с

6) $\frac{1}{a}+\frac{2x}{a^2}\cancel{x}-\frac{3x^2}{a^3}\le 0$

$\frac{a^2+2xa-3x^2}{a^3}\le 0$

$\frac{3x^2-2xa-a^2}{a^3}\ge 0$ $3x^2-2xa-a^2$ – парабола, в-ви ↑

$a\ne 0$

При $a<0$: $3x^2-2xa-a^2\le 0$

При $a>0$: $3x^2-2xa-a^2\ge 0$

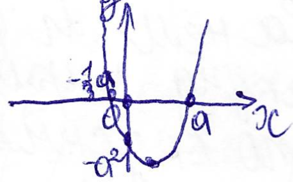


Рис 1: $a>0$

$D=4a^2+12a^2=16a^2$

$x_{1,2}=\frac{2a\pm 4a}{6}=a;\ -\frac{1}{3}a$

$a>0 \Rightarrow 3x^2-2xa-a^2\ge 0$ $x\in(-\infty;-\frac{1}{3}a]\cup[a;+\infty)$

не подходит, т.к.

~~мн-во бесконечное~~

длина бесконечная

Стр 6 из

б)

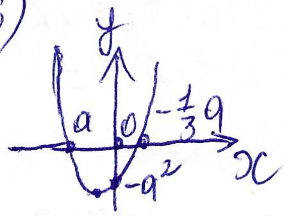


Рис 2: $a<0$

Чистовик

$a<0 \Rightarrow 3x^2-2xa-a^2\le 0$

$x\in[a;-\frac{1}{3}a]$, подходит, т.к. длина небесконечная

$-\frac{1}{3}a-a=2026$

$-\frac{4}{3}a=2026$

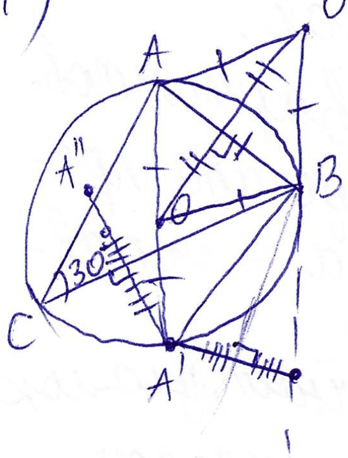
$\frac{4}{3}a=-2026$

$4a=-6078$

$a=\frac{-6078}{4}=-1519{,}5$

Ответ: $-1519{,}5$

7)



Дано: $\triangle ABC$, впис. в $\omega(O;OA)$

$\angle C=30^\circ$

O' симм. O отн. (AB)

A' симм. A отн. O

A'' симм. A' отн. (BC)

~~$O'BA''$ – прямая~~

$O'\in(BA'')$

~~Док-ть~~ Найти: $\angle B$

Т.к. $\angle C=30^\circ$ и он вписанный, то $\angle AOB=60^\circ$, а т.к. $\triangle AOB$ – равнобедр. с $\angle 60^\circ$, то $\triangle AOB$ – равностор. $\Rightarrow AB=OA=OB$

Т.к. O' симм. с O отн. AB, то $O'B=OB=OA=O'A$

$\triangle OBA'$ – равнобедр., AA' – диаметр

Стр 7 из

Чистовик

7) Поэтому $\angle BOA' = 120^\circ$; $\angle OBA' = \angle OA'B =$
$= 30^\circ$

$\triangle A'BA''$ – равнобедр., т. к. BC – ось симметрии $\Rightarrow$ BC – отрезок выс. и мед. $\triangle A'BA''$

Значит $\angle A'BC = \angle A''BC = (180^\circ - 2\cdot 60^\circ - 30^\circ)/2 =$
$= 30^\circ/2 = 15^\circ$

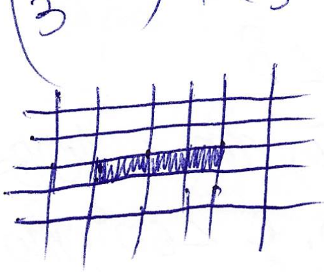
$\angle B = \angle ABO + \angle OBA' + \angle A'BC = 60^\circ + 30^\circ + 15^\circ =$
$= 105^\circ$

Ответ: 105°

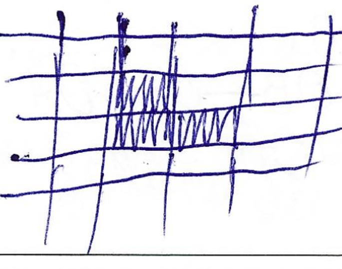
8) Робот выбирает первые 2 клетки с вероятностью 1.
Далее пути расходятся.

У Робота есть 6 вариантов, 2 из которых – сделать прямую полосу из 3 клеток, а 4 оставшихся – сделать трёхклеточный „уголок".

$\left(\frac{1}{3}\cdot x\right) + \left(\frac{2}{3}\cdot y\right) = P$, где P – вероятность.



При выборе „прямой" с шансом $\frac{1}{3}$ у Робота есть 4 из 8 вариантов развития в „кольцо.



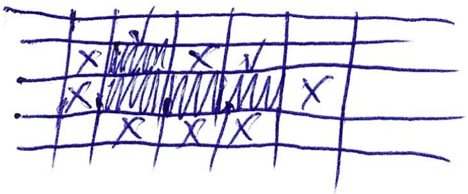
При выборе „уголка" Роботу остаётся 2 из 7 вариантов.

Стр 8 из

8) $\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{7}\right)=P$, где P - вероятность закрасить „уголок" из 4 клеток.

$$\frac{1}{6}+\frac{4}{21}=\frac{7}{42}+\frac{8}{42}=\frac{15}{42}=\frac{5}{14}=P$$

Отсчитываем от „уголка" 2 варианта из 9. $\cancel{\frac{5}{14}\cdot\frac{2}{9}=}$



Черновик

64 − 30 = 34

40 − 30 = 10

108 − 10 − 50 − 50 − 50 = 8

160 − 160 = 0