0 392409 130007

39-24-09-13
(123.2)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант ____________

Место проведения МОСКВА
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по МАТЕМАТИКЕ
профиль олимпиады

Кудрявцева Александра Сергеевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

13:28~13:30

Дата
«29» 03 2026 года

Подпись участника

80 (Восемьдесят) [illegible]

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

39-24-09-13 (123.2)

Черновик.

$$\frac{a^{2x}-3a^{x+1}+2a^2}{\log_2 a} \geq 0$$

$$\frac{a^2(a^{2(x-1)}-3a^{x-1}+2)}{\log_2 a} \geq 0$$

$a^{x-1}=t>0$.

$$\frac{t^2-3t+2}{\log_2 a} \geq 0$$

$$\frac{(t-2)(t-1)}{\log_2 a} \geq 0$$

$tg 30 = \sqrt{3}$

1) $\log_2 a > 0$ $\boxed{a>2}$.

$+ \quad - \quad +$; 1, 2, t

$\begin{cases} a>2 \\ \left[\begin{array}{l} t \geq 2 \\ t \leq 1. \end{array} \right. \end{cases}$ $\begin{cases} a>2 \\ \left[\begin{array}{l} a^{x-1} \geq 2 \\ a^{x-1} \leq 1. \end{array} \right. \end{cases}$

$2^{x-1} \leq 2^0$

$x-1 \geq 1$. $\boxed{x \geq 2}$

$x-1 \leq 0$ $\boxed{x \leq 1}$.

$\log_2 a < 0$.

$\begin{cases} a<2 \\ t \geq 1 \\ t \leq 2. \end{cases}$ $\begin{cases} a<1 \\ a^{x-1} \geq 1 \\ a^{x-1} \leq 2. \end{cases}$

$1 - tgx\,tgy - tgy\,tgz - tgz\,tgx = 0$.

$tgx\,tgy + tgy\,tgz + tgz\,tgx = 1$.

$\sqrt[3]{tgx\,tgy\,tgz}$.

$\log_2 a \neq 0$

$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3$.

$tgx\,tgy\,tgz \leq \frac{1}{3}$.

$tgx = tgy = tgz$.

$(\sqrt{3})^3 = 3\sqrt{3}$.

$x = \frac{\pi}{6}$

$2a$, $30°$, $\sqrt{3}a$

$S^{\frac{2}{3}} \leq \frac{1}{3}$

$S \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{3/2} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 = \frac{1}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{9}$.

$0 < x, y, z < \frac{\pi}{2}$

$x+y+z = \frac{\pi}{2}$.

$$tgx\,tgy\,tgz \leq \left(\frac{tgx+tgy+tgz}{3}\right)^3$$

$$tg(x+y+z) = tg(x+(y+z)) = \frac{tgx + tg(y+z)}{1 - tgx\,tg(y+z)} =$$

$$= \frac{tgx + \frac{tgy+tgz}{1-tgy\,tgz}}{1 - tgx\frac{(tgy+tgz)}{1-tgy\,tgz}} = \frac{tgx(1-tgy\,tgz)+tgy+tgz}{1-tgy\,tgz - tgx\,tgy - tgx\,tgz} =$$

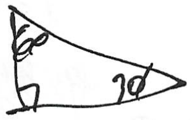
$$= \frac{tgx+tgy+tgz - tgx\,tgy\,tgz}{1 - tgy\,tgz - tgx\,tgy - tgx\,tgz} = tg\frac{\pi}{2}.$$

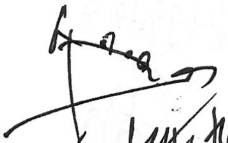
$ctg 90 = ctg 90 = 0$.

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

черновик.

$x+y+z=\frac{\pi}{2}$.



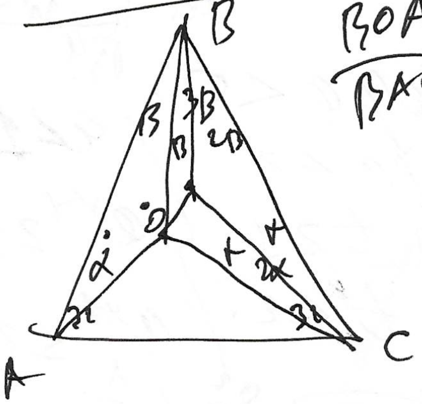


$\operatorname{tg}(x+\alpha)\operatorname{tg}(z-\alpha)\cancel{\operatorname{tg}y}$

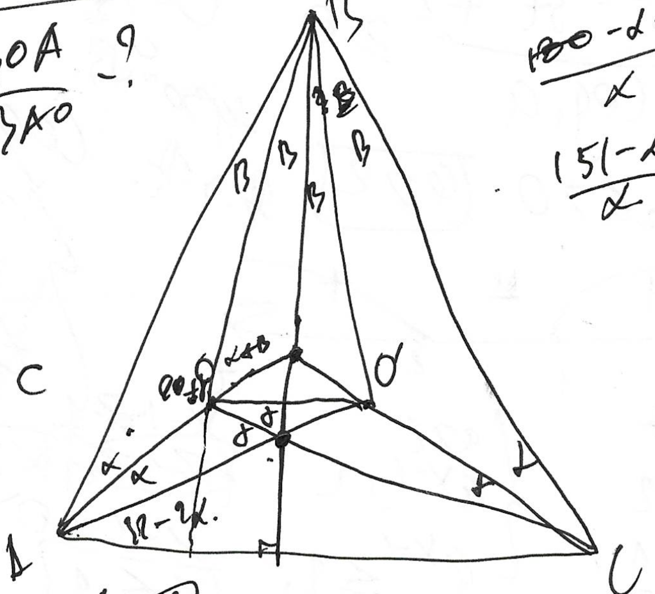
$\operatorname{tg}x\,\cancel{\operatorname{tg}y}\,\operatorname{tg}z \vee \operatorname{tg}(x+\alpha)\operatorname{tg}(z-\alpha) \vee \operatorname{tg}x\operatorname{tg}z.$

$\left(\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}\alpha}\right)\left(\frac{\operatorname{tg}z-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}z\operatorname{tg}\alpha}\right)\vee \operatorname{tg}x\operatorname{tg}z$

$\operatorname{tg}x\operatorname{tg}z-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}z-\operatorname{tg}^2\alpha \vee \operatorname{tg}x\operatorname{tg}z$



$\frac{BOA}{BAO}$ − ?



$\frac{180-\alpha-2\beta}{\alpha}$

$\frac{151-\alpha}{\alpha}$

$\boxed{58}$

$2\beta=58$

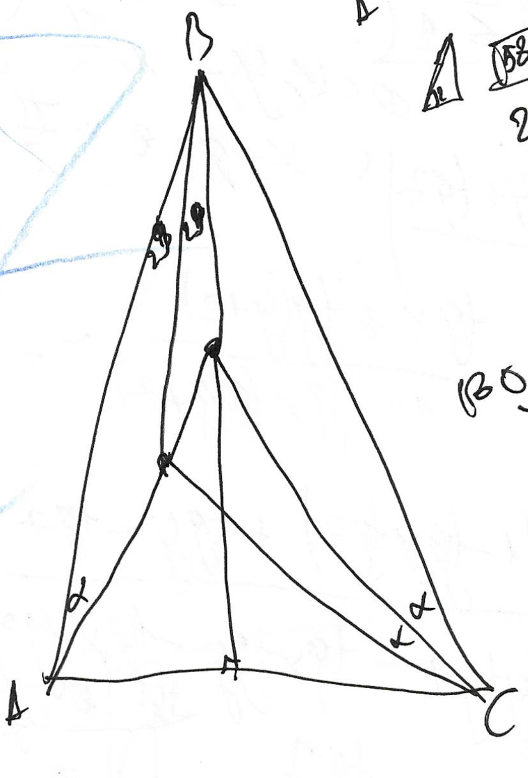
$\beta=29.$

$29\cdot4=80+36=116+64$ ok.

$\alpha+\beta+\gamma=90°.$

$\cancel{180-\alpha-\beta}=$

$90+\gamma.$



BO − $58+2\alpha.$

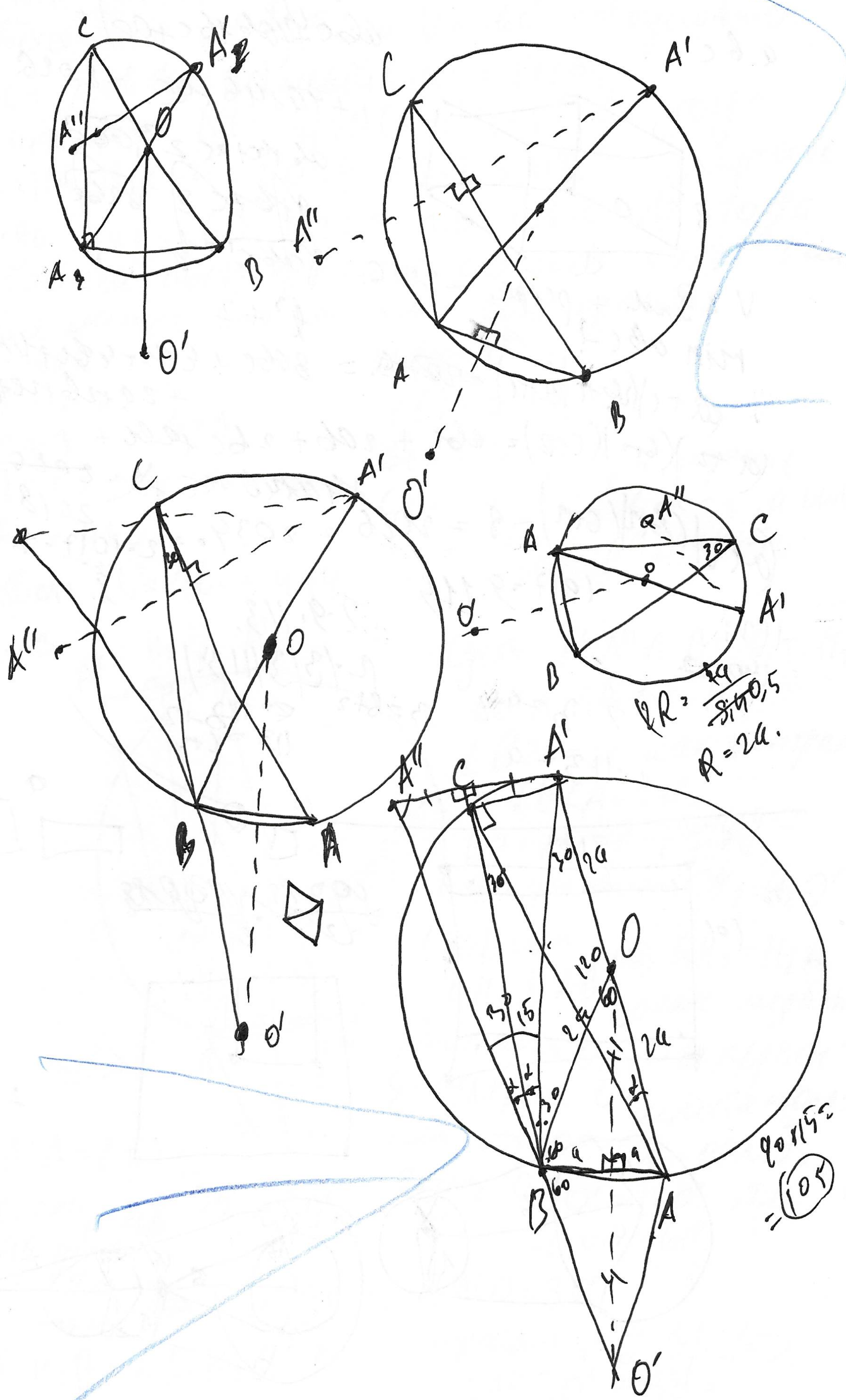
$180-8-2\alpha=\frac{122-2\alpha}{2}=$

$=61-\alpha.$

$90+61-\alpha=$

$=151-\alpha.$

черновик.



Черновик

abc − парал.

$abc + 2(ab+bc+ac) +$

$+4a+4b+4c = 2026.$

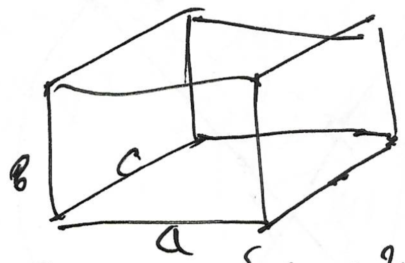
$ab+bc+ac \geq \sqrt[3]{a^2b^2c^2}$

$a+b+c \geq \sqrt[3]{abc}$

$\sqrt[3]{abc} = t$

$t^3 + 2$

a b c



$V + S_{пов} + \text{рёбра} = 2026.$

min abc − ?

$(a+1)(2b+1)(2c+1) = 8abc + 4ab + 4bc + 4ac + 2a+2b+2c+1$

$(a+2)(b+2)(c+2) = abc + 2ab + 2bc + 2ac + 4a+4b+4c + 8 = \cancel{2026}.$

$(a+2)(b+2)(c+2) - 8 = 2026 = 2034 = 2\cdot 1017\cdot 1$

2018

9.

$1017 = 9\cdot 113$

113;

140 27

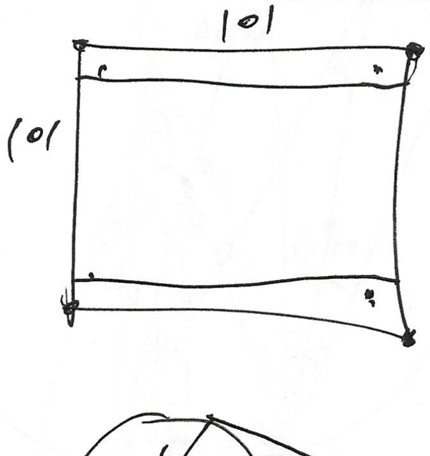
$2\cdot 9\cdot 113.$

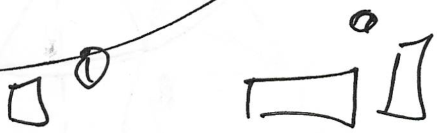
$2\cdot 3\cdot 3\cdot 113\cdot 1$

$2\cdot 3 = a+2$ $3 = b+2$ $2 = ... + 2.$

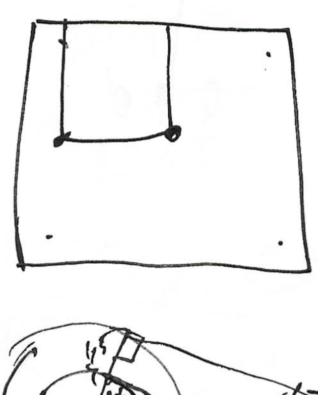
$113 = c+2.$

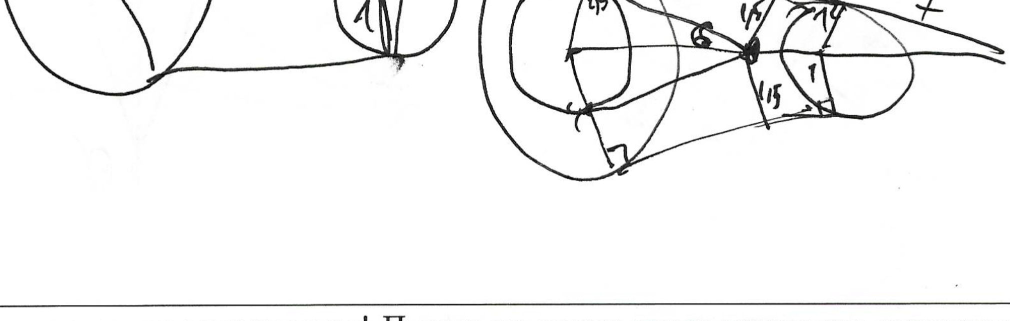
$2\cdot 113 = a$





$\cancel{100\cdot 99 ...}$





Чистовик №1

Пусть длина, ширина, высота призмы равны соответственно a, b, c. Тогда $V = abc$. По условию:

$abc + 2(ab + bc + ac) + 4a + 4b + 4c = 2026$

Заметим, что $ЛЧ = (a+2)(b+2)(c+2) - 8$, тогда

$(a+2)(b+2)(c+2) = 2034 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 113$. 113 - простое

Тогда $a+2, b+2, c+2 \geq 3$ т.к. $a, b, c \in \mathbb{N}$. Тогда 2 должна быть в числе с 3 или с 113. В числах не может быть больше двух простых.

1 случай:

$a+2 = 2 \cdot 3$ $a = 4$

$b+2 = 3$ $b = 1$

$c+2 = 113$ $c = 111$

$abc = 444$.

Ответ: $V = abc = 444$.

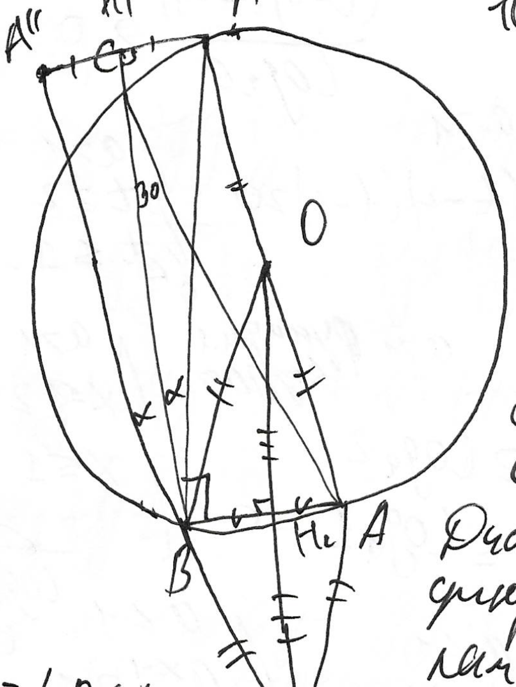
2 случай

$a+2 = 2 \cdot 113$

$b+2 = 3$

$c+2 = 3$. !! Противоречие т.к. $b = c = 1$, а они различны.

№3



Пусть $A'A'' \perp BC$ в т. H_1, $OO' \perp AB$ в т. H_2.

$\angle BOA = 60$ как централ. и $\angle BCA = 30°$.

$BO = AO = r$ - радиус

По условию $OH_2 = H_2O'$

$OB = OA$, $OH_2 \perp AB$ $\Rightarrow BH_2 = H_2A$ как медиана.

Диагонали $OBO'A$ перпендикулярны и делятся пополам $\Rightarrow OBO'A$ - ромб.

Тогда $\angle OBO' = 120°$, т.к. $\angle BOA = 60°$.

$\angle BA'A = \angle BCA = 30°$ как опир. на одну дугу.

$OA' = OB = r \Rightarrow \angle A'BO = \angle BA'O = 30°$

$\Delta A'H_1B = \Delta A''H_1B$ по 2 сторонам и углу. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle A''BH_1 = \angle H_1BA' = \alpha$.

$\angle A''BO' = 180 =$

$= \angle OBO' + \angle A'BO + 2\alpha =$

Чистовик

$= 120 + 30 + 2\alpha = 180^\circ.$

$\alpha = 15^\circ$

$\angle CBA = \angle B = \angle OBA + \angle A'BO + \alpha = 60 + 30 + 15 =$
$= 105^\circ$

Ответ: $\angle B = 105^\circ$.

№4.

$\frac{a^{2x} - 3a^{x+1} + 2a^2}{\log_2 a} \geq 0 \qquad \frac{a^2(a^{2(x-1)} - 3a^{x-1} + 2)}{\log_2 a} \geq 0$

$a > 0$ тогда на a^2 можно поделить.

$\frac{a^{2(x-1)} - 3a^{x-1} + 2}{\log_2 a} \geq 0. \qquad \frac{t^2 - 3t + 2}{\log_2 a} \geq 0$

Пусть $a^{x-1} = t > 0$, тогда

$\frac{(t-2)(t-1)}{\log_2 a} \geq 0.$

1 случай:

$\begin{cases} \log_2 a > 0 \\ (t-2)(t-1) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a > 1 \\ (t-2)(t-1) \geq 0 \end{cases} \begin{cases} a > 1 \\ \left[\begin{array}{l} t \geq 2 \\ 0 < t \leq 1. \end{array}\right. \end{cases}$

$+ \quad 1 \quad 2 \quad + \quad t$

$a > 1$ функция возраст.

$\begin{cases} a > 1 \\ \left[\begin{array}{l} a^{x-1} \geq 2 \\ 0 < a^{x-1} \leq 1 \end{array}\right. \end{cases} \begin{cases} a > 1 \\ \left[\begin{array}{l} x - 1 \geq \log_a 2 \\ x - 1 \leq \log_a 1. = 0. \end{array}\right. \end{cases} \begin{cases} a > 1 \\ \left[\begin{array}{l} x \geq \log_a 2 + 1. \\ x \leq 1 \end{array}\right. \end{cases}$

2026

$\log_a 2 + 1 \quad 1 \quad x$

$\log_a 2 = -2026$

$a = 2^{-\frac{1}{2026}}$

2 случай

$\begin{cases} \log_2 a < 0 \\ (t-2)(t-1) \leq 0 \end{cases} \begin{cases} a < 1 \\ t \geq 1 \\ t \leq 2. \end{cases} \begin{cases} a < 1 \\ a^{x-1} \geq 1 \\ a^{x-1} \leq 2. \end{cases}$

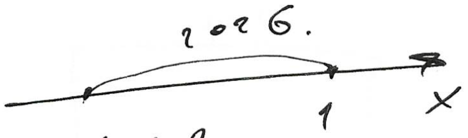
$a < 1$ функция убыв. знак меняется.

$\begin{cases} a < 1 \\ \cancel{x-1} \; x - 1 \leq 0 \\ x - 1 \geq \log_a 2. \end{cases} \begin{cases} a < 1 \\ x \leq 1. \\ x \geq 1 + \log_a 2. \end{cases}$

$a = \frac{1}{2^{2026}}$

но $a > 1$?!

Чистовик.



$1+\log_a 2$.

$1+\log_a 2 = 1-2026$

$a^{-2026}=2$.

$a^{2026}=\frac{1}{2}$

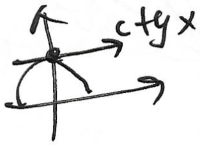
$a=\frac{1}{\sqrt[2026]{2}}$

Ответ: $a=\frac{1}{\sqrt[2026]{2}}$

№5

$\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y\operatorname{tg}z$ — max?

$x+y+z=\frac{\pi}{2}$. возьмём ctg от обеих частей.



$\operatorname{ctg}(x+y+z)=0$.

$\frac{1}{\operatorname{tg}(x+y+z)}=0$.

$$\frac{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y-\operatorname{tg}y\operatorname{tg}z-\operatorname{tg}z\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y+\operatorname{tg}z-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y\operatorname{tg}z}=0.$$

$\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y+\operatorname{tg}y\operatorname{tg}z+\operatorname{tg}z\operatorname{tg}x=1$.

$\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y\operatorname{tg}z=S$

$3\cdot S^{\frac{2}{3}}\le \operatorname{tg}x\operatorname{tg}y+\operatorname{tg}y\operatorname{tg}z+\operatorname{tg}z\operatorname{tg}x=1$

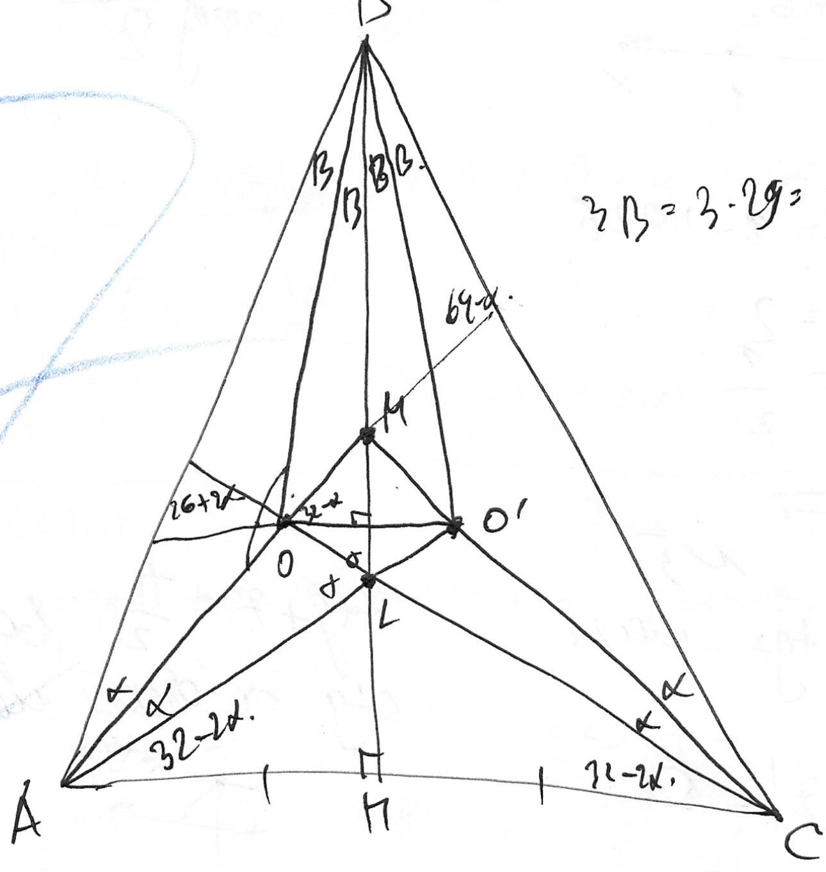
по нерав-ву о средних.

Тогда $S\le\left(\frac{1}{\sqrt{3}^3}\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3$ Равенство при $\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y=\operatorname{tg}y\operatorname{tg}z=\operatorname{tg}z\operatorname{tg}x$

$\left.\begin{array}{l}\operatorname{tg}x=\operatorname{tg}y=\operatorname{tg}z\\ x+y+z=\frac{\pi}{2}\end{array}\right| \Rightarrow x=y=z=\frac{\pi}{6}$. $\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\right)^3=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3$

Ответ: $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3$

Черновик №6



$3B = 3 \cdot 29 = 60 + 27 =$
$= 87$

~~22 64−32+α = 24+α.~~ Проведём CM: ∠BCM = = BAO = α.

Из симметрии: BH ⊥ AC, AH = HC,

∠ABO = ∠OBM = ∠MBO' = ∠O'BC = B.

4B = 180 − 32 · 2 = 180 − 64 = 116

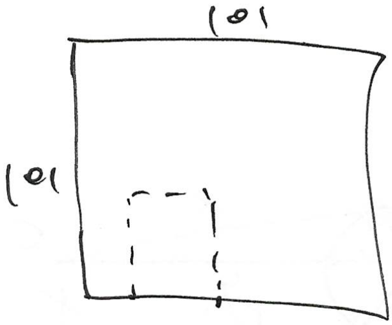
B = 29. по сумме углов тр-ка.

O – центр впис. окр. △ABL

∠BOA = 180 − α − B

= 151 − α.

№2. Чистовик

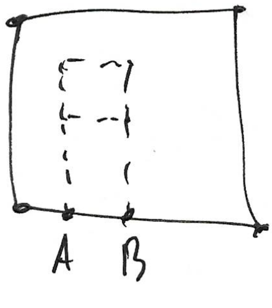


Посчитаем для одной стороны и умножим на 4. (но не на углу).

Выбираем 2 точки на стороне ~~...~~

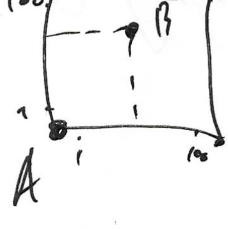
Это можно сделать $\frac{100 \cdot 101}{2}$ способами.

Далее выберем любую длину прямоугольника: (до 101 не вкл.) это можно сделать 100 способами. (длина $\in [1;100]$). (чтобы не было дыров A, B должны быть на стороне).



Чтобы квадрат не распался надо чтобы ~~его~~ длина вырезанного прямоугольника была ≤ 100

Если точка на углу:



То выбираем любую точку внутри квадрата (B). ~~Они~~ точки задают прямоугольник. На это: 100^2 способов. Для каждого угла (умножаем на 4).

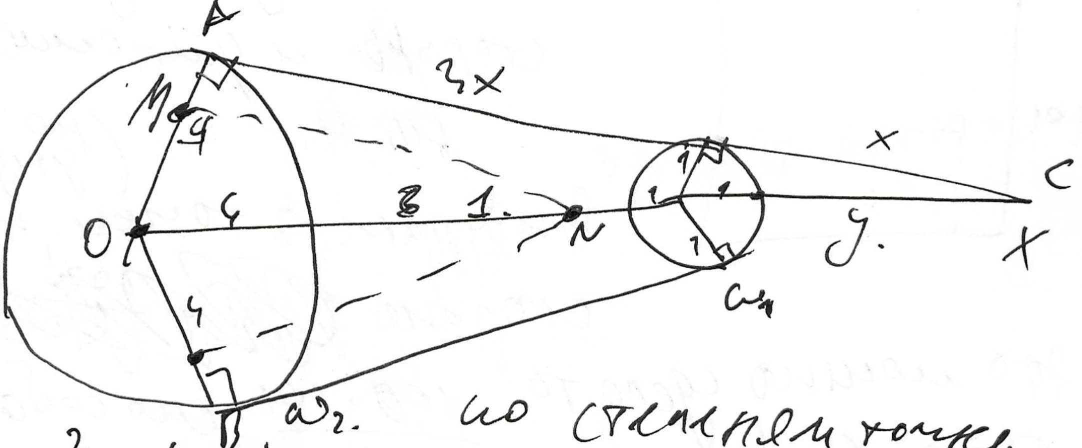
~~Ответ~~: $4\left(\frac{100 \cdot 101}{2}+\frac{100^2}{4}\right)=$

$=2 \cdot 100 \cdot 101+100^2=100(202+100)=$

$=100 \cdot 302=30200$

Ответ: 30200.

листовик



по степени точки для ω_1 и ω_2 соот.

$$\begin{cases} x^2 = y(y+1) \\ (4x)^2 = (y+3)(y+7) \end{cases}$$

$4y(y+1) = (y+3)(y+7)$

$4y^2 + 4y = y^2 + 10y + 21$

$3y^2 - 6y - 21 = 0$

$D = 36 + 84 \cdot 3 = 36 + 252 = 288.$

$\triangle OAC \sim \triangle OMN$ с коэф. $\cancel{1{,}5}$ $\frac{2{,}5}{4}$.

OX выразим через y. найдём ON.

OM выразим по подобию через OA.

$OMN = 90° \Rightarrow$ Найдем MN.