0 451698 610000

45-16-98-61
(123.10)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант ____________________

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Ломоносов"
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Кузнецовой Екатерины Андреевны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

13:28 ~ 13:35

Дата

«29» марта 2026 года

Подпись участника

70 (семьдесят) [signature]

45-16-98-61 (123.10)

ЧЕРНОВИК

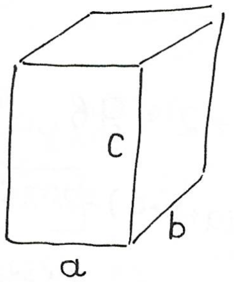
Нет

① Числа a, b, c

$a\cdot b + 2(a+b) = 14$

$\cancel{2b + 2b + 4}$

$4a + 8 + 2b = 6 = b = 1$



$abc + 2ac + 2bc + 2ab + 4(a+b+c) = 2026$

$\boxed{a^3 + 6a^2 + 12a} = 2026$

$444 + 8 + 222 + 888 + 4\cdot 116 = 2026$

$abc + 2(ac+bc+ab) + 4(a+b+c) = 2026$

$V + 2\left(\frac{V}{b} + \frac{V}{a} + \frac{V}{c}\right) + 4\left(\frac{V}{ab} + \frac{V}{bc} + \frac{V}{ac}\right) = 2026$

$1\cdot x = x$

$\frac{x}{2} + 2x = x$

$\boxed{1\cdot 2\cdot x}$

$x + 2(2\cdot x + 2\cdot x + 2\cdot 2) + 4(2+2+x) =$

$\boxed{2,5x \quad 1 \quad x+1}$

$1998 : 18 = 111$

♥ $+ V\cdot 2\left(\frac{1}{b}\right.$

$= 2026$

$888 + 444 + 222 = 1554$

$1554 + 444 = 1998$

$\cancel{x + 6x + 6 + 12 + 4x = 2026}$

$1001 : 13 = 77$

$\boxed{11x} \cancel{+ 18 = 2026}$

$\cancel{2008 = 11x}$

$ab + 2(a+b) = \alpha$

$\cancel{2 + 6} = \boxed{8}$

$\cancel{x + 8x + 8 + 16 + 4x = 2026}$

$\alpha(x+4) = 2026 - 4x$

$77 \times 26 = 2002$

$\times 9$

$\cancel{13x = 2002}$

$\cancel{x = \frac{77\cdot 2\cdot 13}{13} = 154}$

$\cancel{V = 2\cdot 2\cdot 154 =}$

$x(ab + 2a + 2b + 4) + 2ab + 4(a+b) = 2026$

$x(\alpha + 4) + 2\alpha = 2026$

$ab\boxed{x} + 2(ax + bx + ab) + 4(a + b + x) = 2026$

$\cancel{3x + 2(x + 3x + 3) + 4(1 + 3 + x) = 2026}$

$bx + 2(x(b+1) + b) + 4(b + x + 1) = 2026$

$bx + 2(bx + 2x + 2b) + 4b + 4x + 4 = 2026$

$3bx + 6b + 6x = 2022$

$1003 : 7$

$2022 : 3 = 674$

$bx + 2b + 2x = 674$

$x(b+2) + 2b = 674$

22

$6x + 2(2x + 3x + 6) + 4(2 + 3 + x) = 2026$

$6x + 10x + 12 + 20 + 4x = 2026$

$\cancel{20x = 2026}$

2002

$x(\alpha + 4) + 2\alpha = 2026$

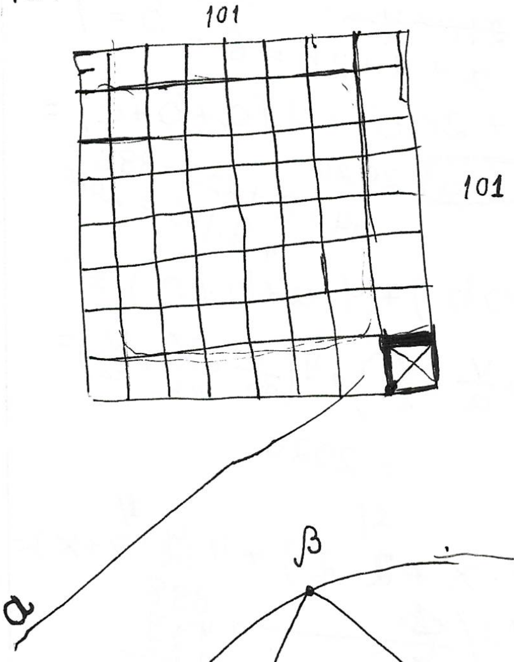
$18 \quad 28 \to 1998$

$\alpha = 14$

$x = \frac{1998}{18} = 111$

$a = 1;\ b = 4;\ c = 111 \Rightarrow V = \boxed{444}$

ЧЕРНОВИК



Т.е. стороны ≤ 100

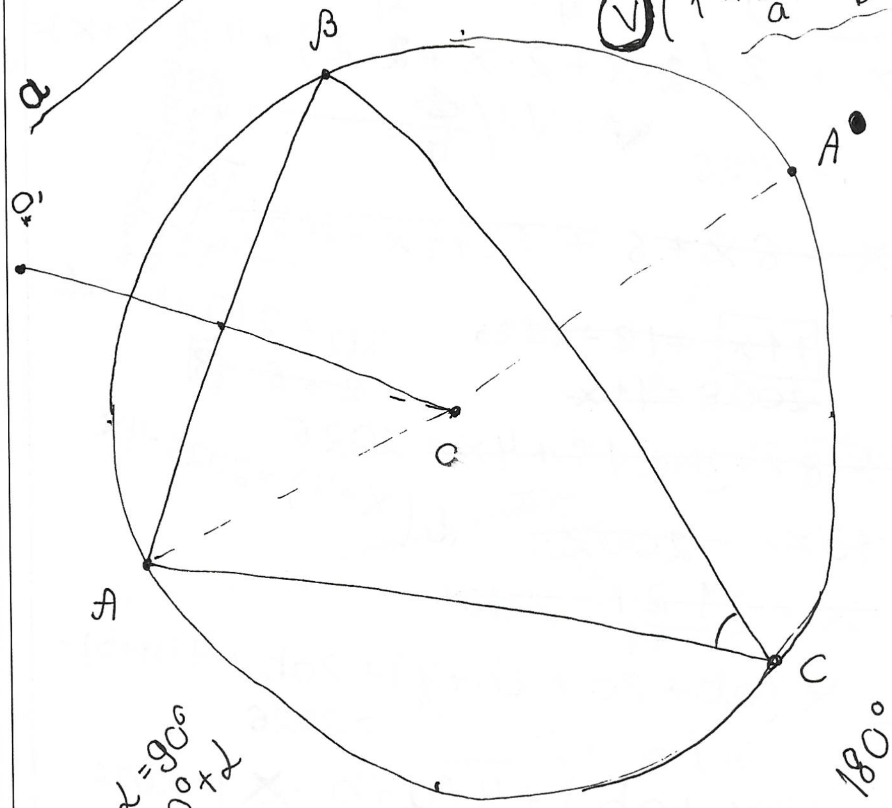
100×100 4 в.

100×99 $3+2+2+2=9$ в.

$\boxed{abc} + 2(ab+bc+ac) + 4(a+b+c) = \boxed{2026}$

$\cancel{V + V \cdot 2}$

$V\left(1 + \frac{2}{a} + \frac{2}{b} + \frac{2}{c} + \frac{4}{ab} + \frac{4}{ac} + \frac{4}{bc}\right) = 2026$



$150^\circ - 90 - \alpha =$
$= 60^\circ - \alpha$

$\angle B = 90^\circ + \alpha$

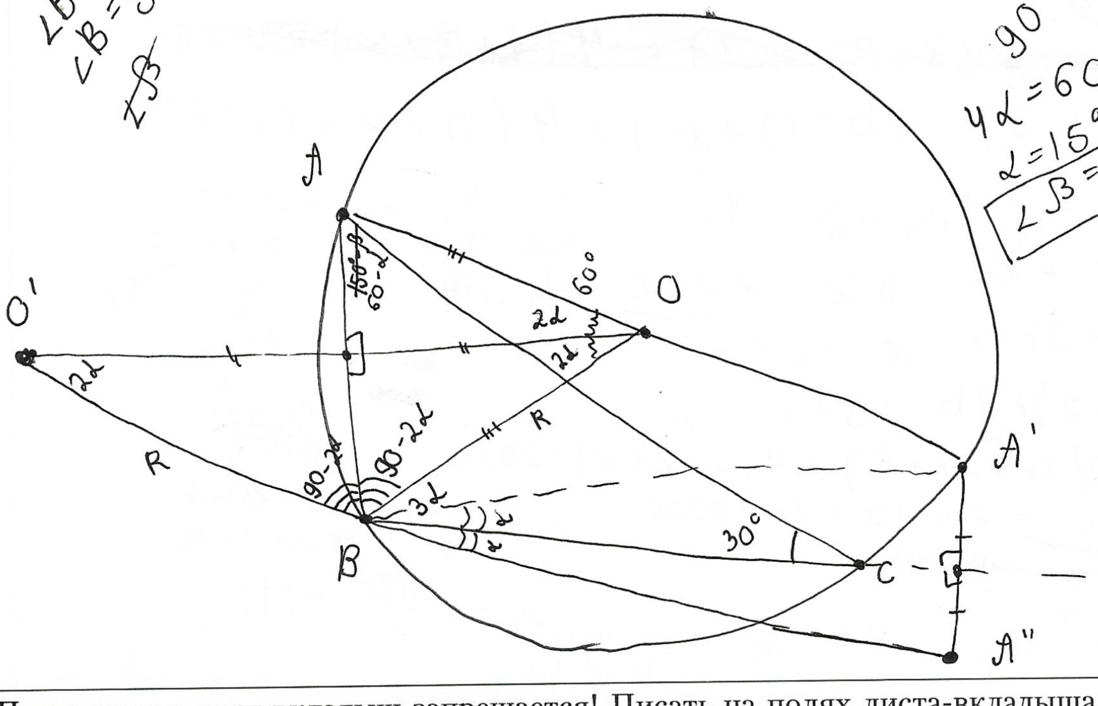
$\cancel{180^\circ - \alpha - 96}$

$180^\circ - \angle B - \alpha =$
$= 180^\circ - 90 - \alpha - \alpha =$
$= 90^\circ - 2\alpha$

$\angle B - \alpha = 90^\circ$
$\angle B = 90^\circ + \alpha$
$\cancel{\angle B}$

$90^\circ + \alpha$

$4\alpha = 60^\circ$
$\alpha = 15^\circ$
$\boxed{\angle B = 105^\circ}$



45-16-98-61 (123.10)

ЧЕРНОВИК

④ $a>0$

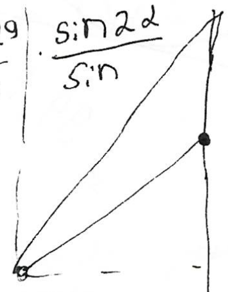
$$\frac{a^{2x}-3a^{x+1}+2a^2}{\log_2 a}\geq 0$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\log_2 a > 0\\ a^{2x}-3a^{x+1}+2a^2\geq 0\end{cases}\Rightarrow a>1\\ \begin{cases}\log_2 a<0\\ a^{2x}-3a^{x+1}+2a^2\leq 0\end{cases}\Rightarrow a\in(0;1)\end{array}\right.$$

$$\frac{\cancel{tg}\ \sin^2 x}{\cos^2 x}\cdot\frac{\sin(90^\circ-2x)}{\cos(90^\circ-2x)}=\frac{\sin^2 x\cdot\cos 2x}{\cos^2 x\cdot\sin 2x}=$$

$$=\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x\cdot 2\cancel{\sin x}\cdot\cos x}$$

$$\frac{\sin 29}{\sin 87}\cdot\frac{\sin 2\alpha}{\sin}$$



$$a^{2x-2}-3a^{x-1}+2\leq 0$$

$$a^{2(x-1)}-3a^{x-1}+2\leq 0$$

$$a^{2(x-1)}-3a^{x-1}\leq -2$$

$$\underbrace{a^{x-1}}_{>0}(a^{x-1}-3)\leq -2$$

$\cancel{a^{x-1}-3<0}$

$\cancel{a^{x-1}<3}$

$\cancel{\cos 90^\circ\cdot\cos 2x+}$

$\cancel{+\sin 90^\circ}$

$$\cos 2\beta=\cos^2\beta-\sin^2\beta$$

$\cancel{\cos 2\beta=}$

$4\beta=180-64=116$

$\beta=29$

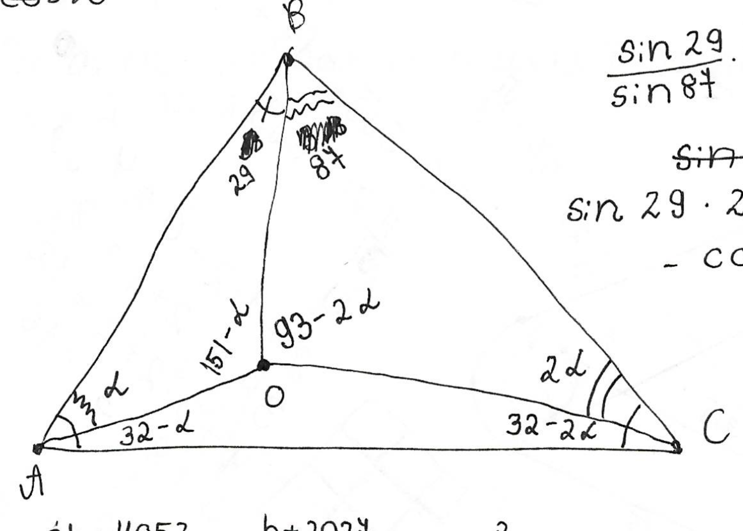
синусная т. Чевы

$$\frac{\sin 29}{\sin 87}\cdot\frac{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\sin(32-2\alpha)}\cdot\frac{\sin(32-\alpha)}{\cancel{\sin\alpha}}=1$$

$\cancel{\sin 29\cdot 2\cos}$

$\sin 29\cdot 2\cdot\cos\alpha\cdot(\sin 32^\circ\cdot\cos\alpha-$

$-\cos 32\cdot\sin\alpha($



$2\alpha<32$

$\alpha<16$

$$\frac{a^{2b+4052}-3^{b+2027}+2a^2}{\log_2 a}\geq 0$$

$$\frac{151-\alpha}{\alpha}=\frac{151}{\alpha}-1$$

$$\frac{a^{2b}+3^{b+1}+2a^2}{\log_2 a}\geq 0$$

$$\frac{\sin\beta}{\sin 3\beta}=\frac{\sin\beta}{\sin 2\beta\cdot\cos\beta+\sin\beta\cdot\cos 2\beta}=$$

$\cos^2 2\beta=1-\sin^2 2\beta$

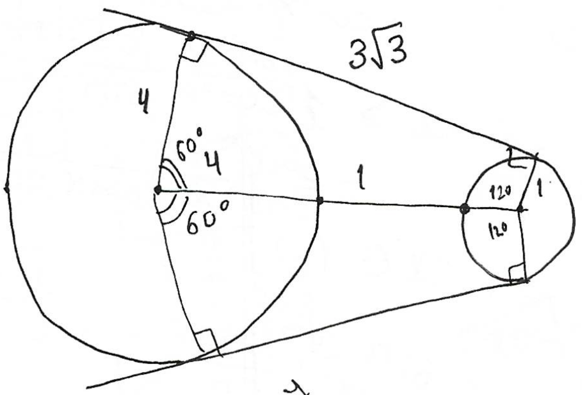
$\cos^2 2\beta=\cos^2\beta+\cancel{\cos^2}\beta-2/\cos^2\beta\cdot\sin^2\beta$

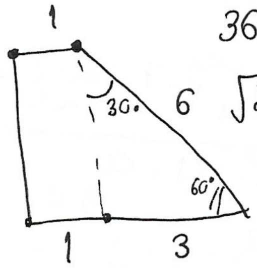
$\cancel{\cos^2\beta(1-2\sin^2\beta)}$

$$=\frac{\sin\beta}{2\sin\beta\cdot\cos^2\beta+\sin\beta}=$$

$$=\frac{1}{2\cos^2\beta+\cos^2\beta-\sin^2\beta}=\frac{1}{3\cos^2\beta-\sin^2\beta}$$

ЧЕРНОВИК





$36-9=27$

$\sqrt{27}=3\sqrt{3}$

$l_2 = 2\pi r = 2\cdot\pi\cdot 4 = 8\pi$

$l_1 = \frac{2}{3}\cdot 8\pi = \frac{16}{3}\pi$

$l = 2\cdot\pi$

$l_2 = \frac{2}{3}\pi$

99,7

+

~~2·2~~

~~$4x+2(4x+4)+4(4+x)=2026$~~

~~$4x+8x+8+16+4x$~~

~~$4x+8x+8+24=2$~~

~~$16x+24=2002$~~

~~$16x=2002$~~

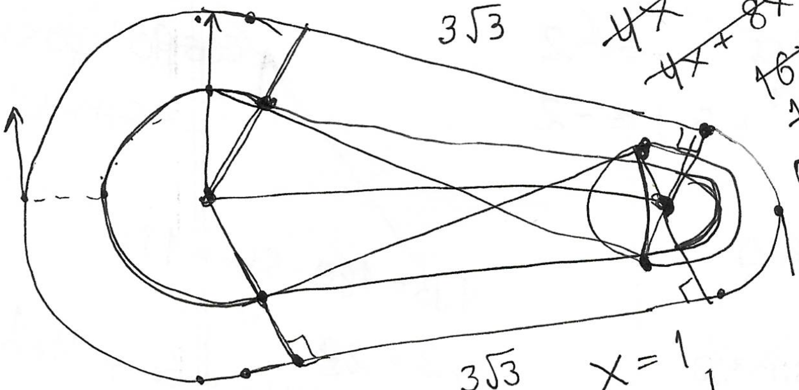
994

$6x+2(5x+6)+4(5+x)=2026$

$6x+32=2026$

$20x=1994$

$x=99{,}7$



$\boxed{x=1}$

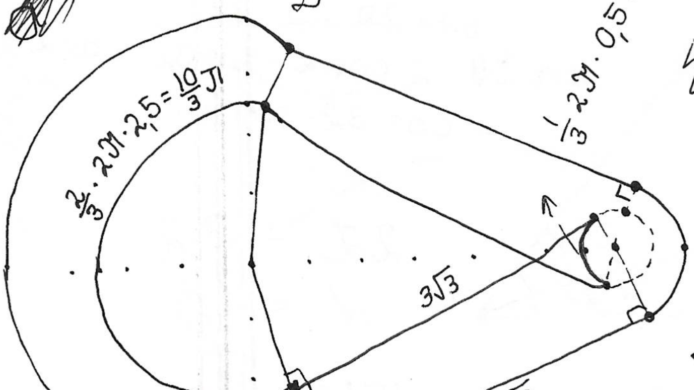
$a^2-3a^2+2a^2=0$

$1-3a+2a^2$

$D=9-8=1$

$\Sigma l = 3\sqrt{3}+3\sqrt{3}+\frac{10}{3}\pi+\frac{\pi}{3}=$

$=\frac{11}{3}\pi+6\sqrt{3}$



100

$2+1\cdot 2+0=4$ 99

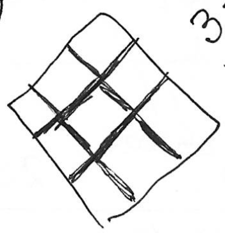
4

$2+1\cdot 2+1=8$

$3+2\cdot 2+1=12$

$4+3\cdot 2+2=16$

$5+8+3$



4

$4\left(\frac{1+100}{2}\right)\cdot 100 = 200\cdot 101 = 20200$

45-16-98-61 (123.10)

ЧИСТОВИК

Задача 1

Пусть a, b, c - стороны призмы; $a, b, c \in N$

$S = V + S_{пов.} + S_{реб.} = a \cdot b \cdot c + 2(ab+bc+ac) + 4(a+b+c) =$

$= 2026$

Пусть c - наиб. Заметим, что чем меньше становится разница c с a и b, тем больше становится $V \Rightarrow a$ и b - наименьшие возможные, c - наиб.

$$c(4+ab+2(a+b)) + 2(ab+2(a+b)) = 2026$$

$$ab + 2(a+b) = \alpha$$

$$c(\alpha+4) + 2\alpha = 2026$$

$\alpha \geq 8$ (т.к. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 8$)

Наименьшее α, при котором $c \in N$ равно 14

$$c \cdot 18 + 28 = 2026$$

$$18c = 1998$$

$$c = \frac{999}{9} = 111$$

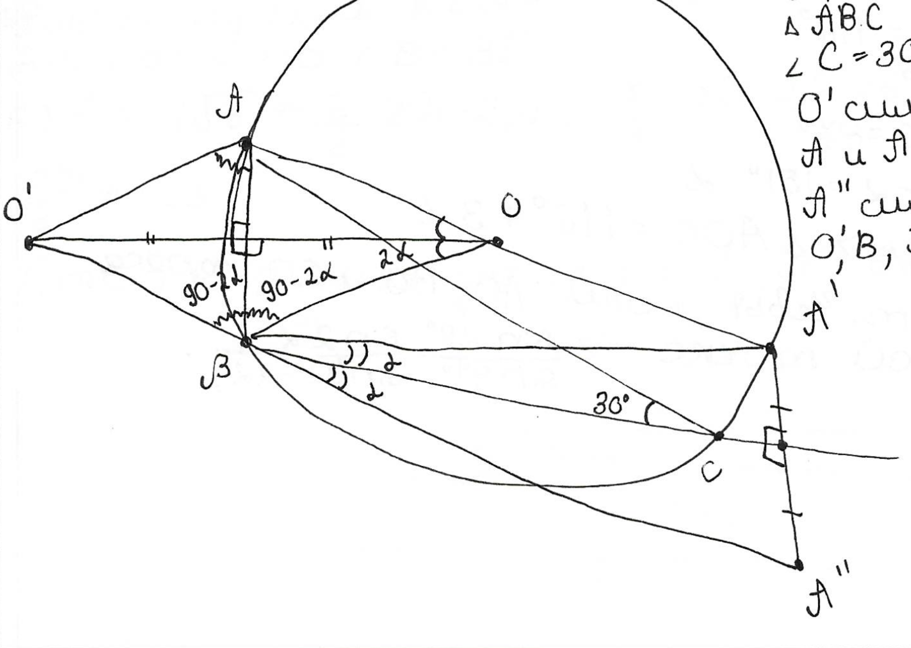
$$ab + 2(a+b) = 14$$

Это верно при $a=1$, $b=4$ или наоборот

$$V = 1 \cdot 4 \cdot 111 = 444$$

Ответ: наименьший объём призмы равен 444

Задача 3



Дано:

$\omega(O)$

$\triangle ABC$

$\angle C = 30°$

O' сим. O отн. AB

A и A' - диам. прот.

A'' сим A' отн. BC

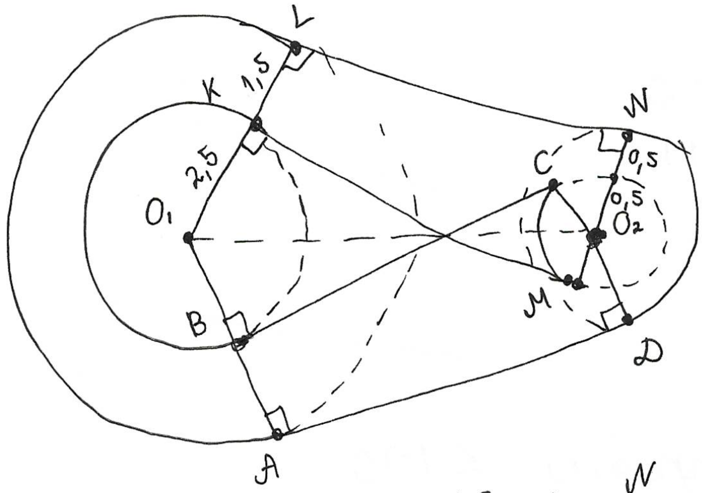
$O', B, A'' \in$ одной прямой

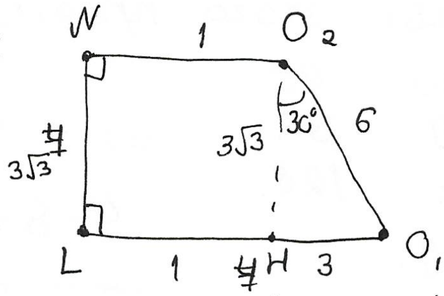
Найти:

$\angle B = ?$

ЧИСТОВИК

Задача 7.





Рассмотрим O_1LNO_2:

O_2H проведём высоту

$LH=1$

$O_1H=3$

1) $O_1H=\frac{1}{2}O_1O_2$ гипотенузы

$\Rightarrow \angle O_1O_2H=30^\circ \Rightarrow \angle O_2O_1H=60^\circ \Rightarrow \angle NO_2O_1=120^\circ$

2) $O_2H=\sqrt{36-9}=3\sqrt{3} \Rightarrow NL=3\sqrt{3}$

3) Т.е. дуга AL (бол.) $=360^\circ-120^\circ=240^\circ$ ($\frac{2}{3}$ окр.)

4) Т.е. дуга ND (мен.) $=120^\circ$ ($\frac{1}{3}$ окр.)

Проведём дорожку из скошенной травы

Её длина:

$l=\frac{2}{3}$ окр. (ц. в O_1; $R_1=4-1,5=2,5$) $+KM+CB+$

$+\frac{1}{3}$ окр. (ц. в O_2; $R_2=1-0,5=0,5$)

5) Рассмотрим $KLNM$ - это ПУ $\Rightarrow KM=NL=3\sqrt{3}$

Аналогично $CB=3\sqrt{3}$

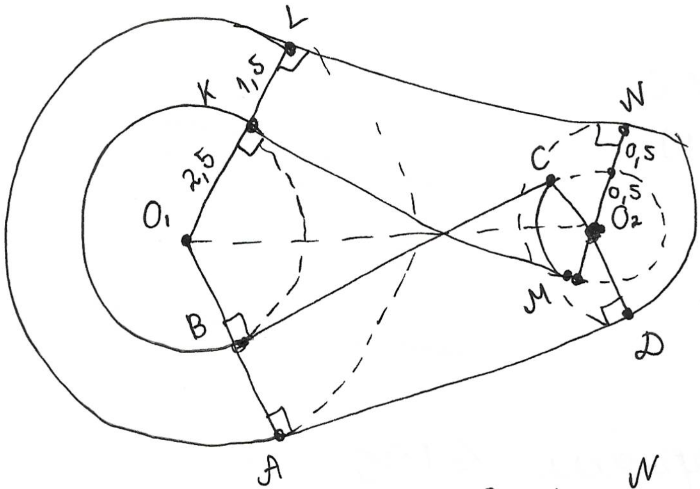
6) $l=6\sqrt{3}+\frac{2}{3}2\pi\cdot 2,5+\frac{1}{3}\cdot 2\pi\cdot 0,5=6\sqrt{3}+\frac{10}{3}\pi+\frac{\pi}{3}=$

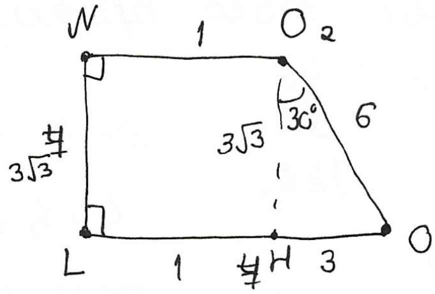
$=\frac{11}{3}\pi+6\sqrt{3}$

Ответ: длина дорожки $\frac{11}{3}\pi+6\sqrt{3}$

ЧИСТОВИК

Задача 7.





Рассмотрим O_1LNO_2:

O_2H проведём высоту

$LH=1$

$O_1H=3$

1) $O_1H=\frac{1}{2}O_1O_2$ гипотенузы

$\Rightarrow \angle O_1O_2H=30^\circ \Rightarrow \angle O_2O_1H=60^\circ \Rightarrow \angle NO_2O_1=120^\circ$

2) $O_2H=\sqrt{36-9}=3\sqrt3 \Rightarrow NL=3\sqrt3$

3) Т.е. дуга AL (бол.) $=360^\circ-120^\circ=240^\circ$ ($\frac{2}{3}$ окр.)

4) Т.е. дуга ND (мен.) $=120^\circ$ ($\frac{1}{3}$ окр.)

Проведём дорожку из скошенной травы

Её длина:

$l=\frac{2}{3}$ окр. (ц. в O_1; $R_1=4-1,5=2,5$) $+KM+CB+$

$+\frac{1}{3}$ окр. (ц. в O_2; $R_2=1-0,5=0,5$)

5) Рассмотрим $KLNM$ – это ПУ $\Rightarrow KM=NL=3\sqrt3$

Аналогично $CB=3\sqrt3$

6) $l=6\sqrt3+\frac{2}{3}2\pi\cdot2,5+\frac{1}{3}\cdot2\pi\cdot0,5=6\sqrt3+\frac{10}{3}\pi+\frac{\pi}{3}=$

$=\frac{11}{3}\pi+6\sqrt3$

Ответ: длина дорожки $\frac{11}{3}\pi+6\sqrt3$

Задача 4 ЧИСТОВИК

$$\frac{a^{2x}-3a^{x+1}+2a^2}{\log_2 a} \geq 0 \quad ; a>0 ; a \neq 1$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a^{2x}-3a^{x+1}+2a^2 \leq 0 \\ \log_2 a < 0 \Rightarrow a \in (0;1) \end{cases} \\ \begin{cases} a^{2x}-3a^{x+1}+2a^2 \geq 0 \\ \log_2 a > 0 \Rightarrow a > 1 \end{cases} \end{array}\right.$$

Задача 2.

Стороны этого прям. ≤ 100

100×100 4в.

100×99 8в. $\Rightarrow$ кол-во вариантов:

100×98 12в.

и т.д.

$4+8+12+\ldots+400 =$

$= 4\,(1+2+\ldots+100) =$

$= \frac{4 \cdot 101}{2} \cdot 100 = 20.200$ вар.

(если одна из сторон $= 100$)

99×99 8в.

99×98 12в. $\Rightarrow 8+12+\ldots+400 =$

$= 20200 - 4 = 20196$

...

и т.д. т.е. общее суммарное кол-во вариантов: $\cancel{20200 \cdot 100}$ $\frac{20200 \cdot 100 - 20200}{2} +$

$+ 20200 = 10100 \cdot 99 + 20200 =$

$$\begin{array}{r} \times\; 10100 \\ 99 \\ \hline 909 \\ 909 \\ \hline 181800 \end{array} \qquad \begin{array}{r} +\; 181800 \\ 20200 \\ \hline 202000 \end{array}$$

Ответ: 202.000 способов это сделать.