0 303936 610009

30-39-36-61

(124.45)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 7

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Кулашина Руслана Александровича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«29» марта 2026 года

Подпись участника

30-39-36-61 (124.45)

85 (Восемьдесят пять) Куцев

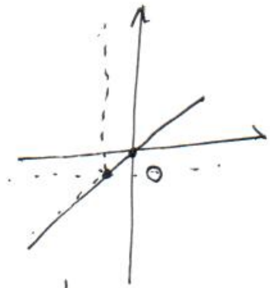
Черновик

$$\sqrt{3(1-ctg^2x)} = 2\sqrt{2}\cos x$$

$-5\ -4\ -3\ -2\ -1\ 0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5$

$$\begin{cases} \cos x \geq 0 \\ 3-3ctg^2x = 8\cos^2 x \end{cases}$$

729 точек



$$1+\frac{1}{ctg^2x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\frac{1}{ctg^2x} = \frac{1-\cos^2x}{\cos^2x}$$

$$ctg^2x = \frac{\cos^2x}{1-\cos^2x}$$

$$A:\ \frac{n}{S(n)} = 9k$$

$$3-\frac{3\cos^2x}{1-\cos^2x} = 8\cos^2x \quad \Big|\cdot(1-\cos^2x)\neq 0$$

$$3-3\cos^2x-3\cos^2x = 8\cos^2x - 8\cos^4x$$

$n \vdots 9 \Rightarrow S(n) \vdots 9 \Rightarrow n \vdots 81$

$\overset{9}{162},\ \overset{9}{243},\ \overset{9}{324},\ \overset{9}{405},\ \overset{18}{486},\ \cancel{\overset{18}{567}},\ \overset{18}{648},\ \cancel{\overset{18}{729}},\ \overset{9}{810},\ \cancel{\overset{18}{891}},\ \overset{18}{972}$

$$\frac{162}{9} = 18$$

324

$$\frac{243}{9} = \frac{81\cdot 3}{9} =$$

$81\cdot 5$ 405

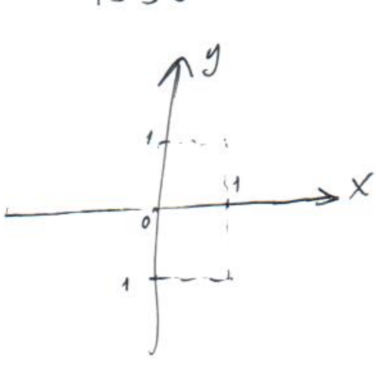
486

$\cancel{108}$ $\underline{27\cdot 4}$

$$\begin{array}{r} \times\ 54 \\ 18 \\ \hline +\ 432 \\ 54\ \ \\ \hline 972 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times\ 81 \\ 19 \\ \hline +\ 729 \\ 81\ \ \\ \hline 1539 \end{array}$$

$$\boxed{64\cdot 3\cdot 729}$$



$\sin 13\pi x$

Чистовик

№1. $\sqrt{3(1-ctg^2x)} = 2\sqrt{2}\cos x$

$$\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \geqslant 0 \\ 3 - 3ctg^2x = 8\cos^2 x \end{cases}$$

$$1 + tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \Big| \Rightarrow ctg^2 x = \frac{\cos^2 x}{1-\cos^2 x}$$

$$\begin{cases} \cos x \geqslant 0 \\ \cos x \neq \pm 1 \\ 3 - \frac{3\cos^2 x}{1-\cos^2 x} = 8\cos^2 x \Big| \cdot (1-\cos^2 x) \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos x \geqslant 0 \\ \cos x \neq \pm 1 \\ 3 - 3\cos^2 x - 3\cos^2 x = 8\cos^2 x - 8\cos^4 x \; * \end{cases}$$

* Пусть $\cos^2 x = t$, $t \in [0;1]$

$3 - 6t = 8t - 8t^2$

$8t^2 - 14t + 3 = 0$

$D = 196 - 96 = 10^2$

$t_1 = \frac{14-10}{16} = \frac{1}{4}$

$t_2 = \frac{14+10}{16} > 1 \Rightarrow$ не подходит

$$\begin{cases} \cos x \geqslant 0 \\ \cos x \neq \pm 1 \\ \cos^2 x = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \geqslant 0 \\ \cos x \neq \pm 1 \\ \cos x = \pm\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2}$$

$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

Ответ. $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

30-39-36-61 (124.45)

Чистовик

№2. Если число кратно 9, то его сумма цифр также кратна 9.

По условию, если $\frac{n}{S(n)} = 9k$ $(n, k \in \mathbb{N})$, то $n \in A$.

Тогда понятно, что $n \vdots 9$, а значит $S(n)$ кратно 9.

Тогда, чтобы равенство выполнялось, n хотя бы кратно $81 = 9^2$.

Выпишем все 3-хзначные числа, кратные 81:

162, 243, 324, 405, 486, 567, 648, 729, 810, 891, 972.

Сумма цифр чисел 567, 729, 891 чётна и равна 18, однако сами числа нечётны, значит $\frac{n}{S(n)}$ нецелое.

Остальные числа удовлетворяют условию:

$\frac{162}{9} = 9 \cdot 2$, $\frac{243}{9} = 9 \cdot 3$, $\frac{324}{9} = 9 \cdot 4$, $\frac{405}{9} = 9 \cdot 5$, $\frac{486}{18} = 9 \cdot 3$,

$\frac{648}{18} = 9 \cdot 4$, $\frac{810}{9} = 9 \cdot 10$, $\frac{972}{18} = 9 \cdot 6$. $(2, 3, 4, 5, 6, 10 \in \mathbb{N})$

Требуемая сумма:

$S = 243 + 486 + 810 = 81 \cdot (3 + 6 + 10) = 81 \cdot 19 = 1539$

Ответ. 1539

№3. Рассмотрим все точки, которые могут являться вершинами таких треугольников, лежащих напротив гипотенузы. Все точки из условия могут быть такими, а всего их $11^3 = 1331$. (каждая координата от -5 до 5 вкл.).

Рассмотрим плоскость, в которой лежит одна из таких точек M и которая параллельна XOY. В этой плоскости есть 2 перп. прямые, ~~через котор~~ проходящие через M и параллельные Ox и Oy. Если выбрать на одной прямой точку A, а на другой B (точки из условия), то $\triangle AMB$ будет прямоугольным и будет подходит под условия.

Чистовик

№3. Таких точек на каждой прямой по 10, т.е. кол-во способов выбрать такой треугольник $10 \cdot 10 = 100$.

Аналогично по 100 треугольников можно выбрать в плоскостях, параллельных xOz и yOz.

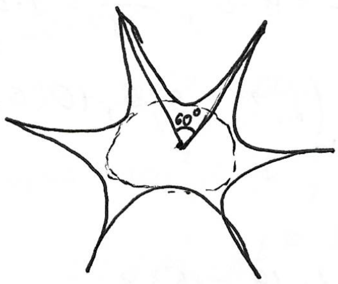
Тогда для каждой из ~~729~~ 1331 точек можно выбрать 300 треугольников, причём никакие треугольники не совпадают (у прямоуг. $\triangle$ 1 вершина при угле в $90°$).

Тогда всего треугольников:

$1331 \cdot 300 = 399300$

Ответ. 399300

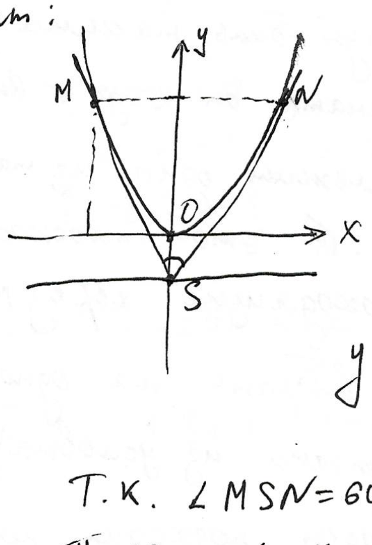
№5.



Т.К. „шестиугольник" имеет нулевые углы, прямая, соединяющая его центр с вершиной, касается двух ~~окружностей~~ парабол в вершинах.

Также из-за симметрии угол между двумя соседними касательными к одной параболе равен $\frac{360°}{6} = 60°$

Поместим вершину параболы $y = cx^2$ в начало координат:



S — центр вписанной окружности

Из-за симметрии параболы отн. Oy

$x_M = -x_N = -0{,}5$

Запишем ур-е касательной для т. N:

$y = (x - x_N) \cdot 2c\,x_N + c\,x_N^2 = \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot c + \frac{c}{4}$

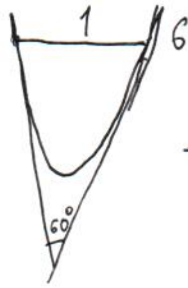
$y = cx - \frac{c}{4}$

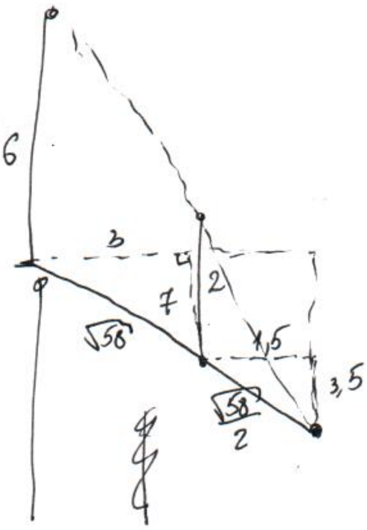
Т.к. $\angle MSN = 60°$, $\angle OSN = 30°$, а значит $c = tg(90° - 30°) = \sqrt{3}$

Тогда, т.к. $x_S = 0$, $S \in NS$ (касат.), то $y_S = -\frac{\sqrt{3}}{4}$

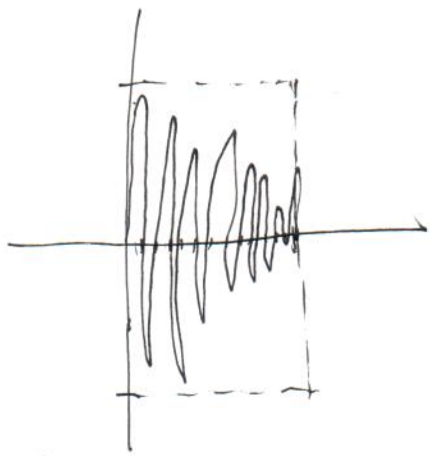
OS — радиус вписанной окружности

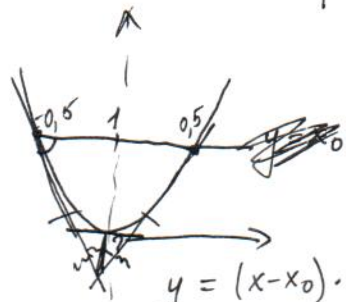
Черновик





$y = \sin 13\pi x$





$y = (x-x_0)\cdot 2cx_0 + cx_0^2$

$y = 2cx_0x - cx_0^2$

$y = 2cx_0x - cx_0^2$

$(x_1;y)$ $(x_2;y)$

x_1-x_2

$y = \pm cx - \frac{c}{4}$

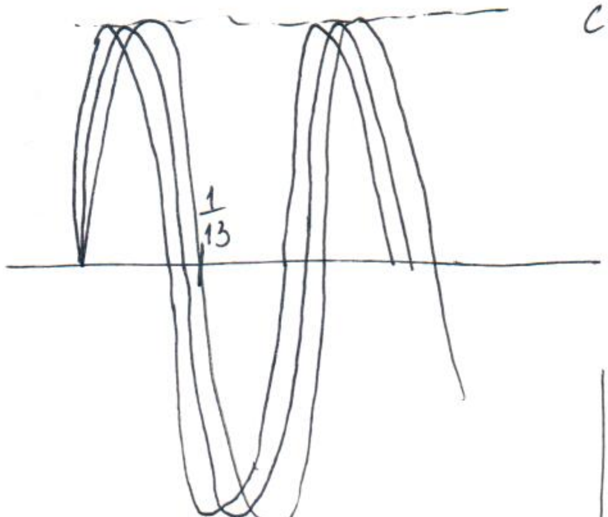
$y = cx^2$

$c = \sqrt{3}$

$y = \sqrt{3}x - \frac{\sqrt{3}}{4}$

$y = \frac{3\sqrt{3}}{4}$

$x=0$ $y = -\frac{\sqrt{3}}{4}$

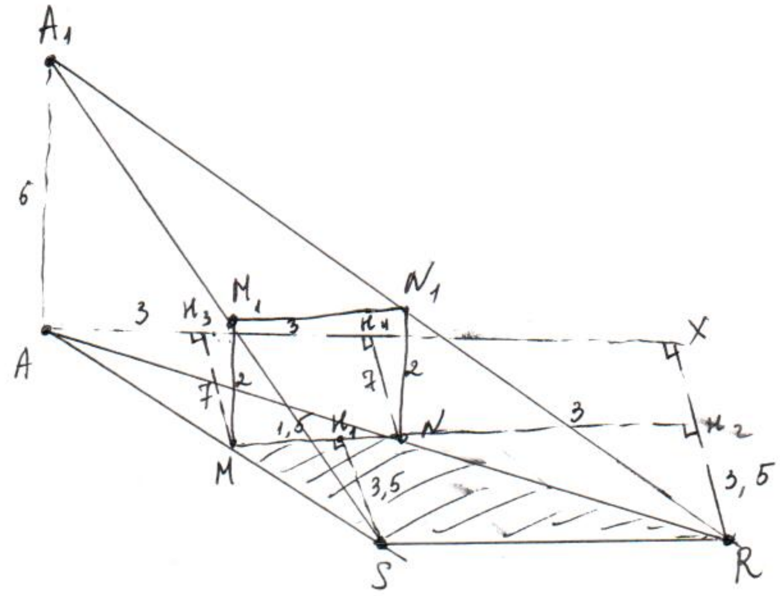


№5. $OS = |y_S| = \frac{\sqrt{3}}{4}$ Чистовик

Ответ. $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

№6. Рассмотрим затенённый участок в начальный и конечный моменты.

1)

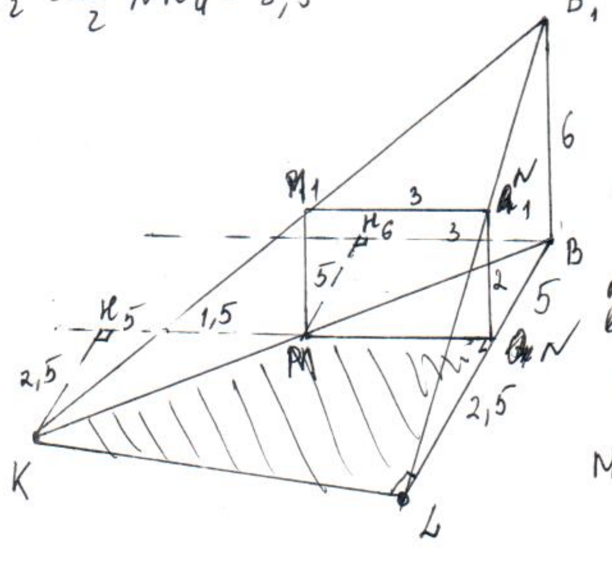


из подобия $\triangle AA_1S$ и MM_1S (коэф. $\frac{1}{3}$) можно понять, что $\frac{AM}{MS} = 2$. Пусть $SH_1 \perp MN$, тогда $MH_1 = \frac{1}{2} AH_3 = 1,5$,
$MH_3 \perp AX$,
$AX \parallel MN$

$SH_1 = \frac{1}{2} MH_3 = 3,5$.

Пусть $RH_2 \perp MN$, $NH_4 \perp AX$, тогда из аналогичного подобия $\triangle AA_1R$ и $\triangle NN_1R$ получим $NH_2 = \frac{1}{2} AH_4 = 3$,
$RH_2 = \frac{1}{2} NH_4 = 3,5$

2)



По аналогии с п. 1) из подобия $\triangle BB_1L$ и $\triangle NN_1L$, а также $\triangle BB_1K$ и $\triangle MM_1K$ (коэф. подобия $\frac{1}{3}$) имеем:

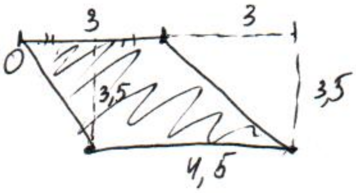
$NL = \frac{1}{2} BN = 2,5$

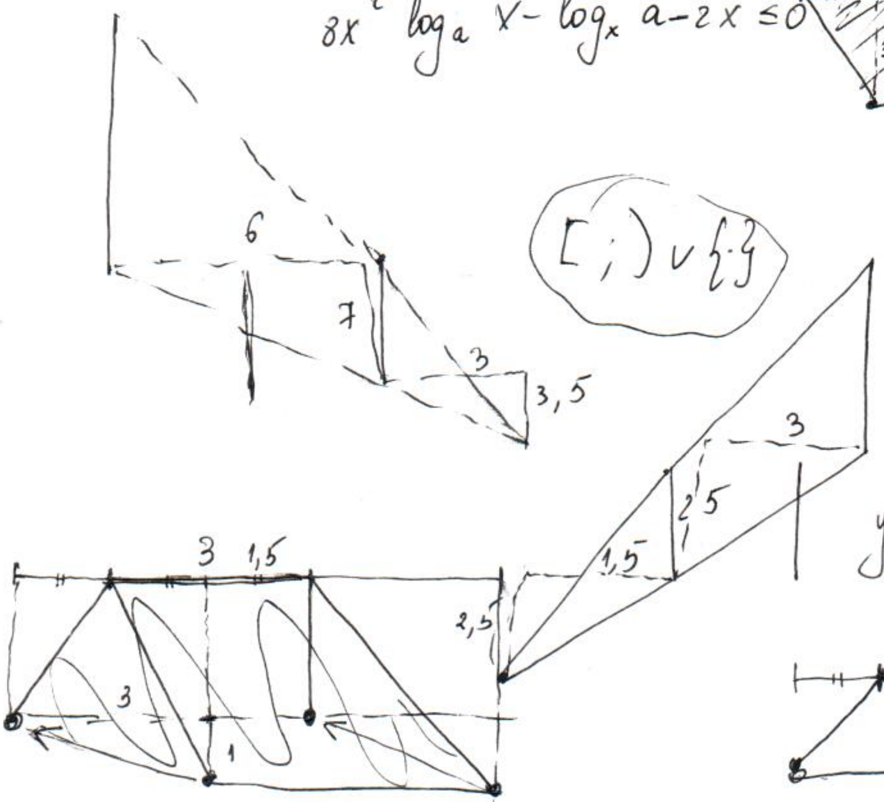
$KH_5 = \frac{1}{2} MH_6 = 2,5$

$MH_5 = \frac{1}{2} BH_5 = 1,5$

Черновик

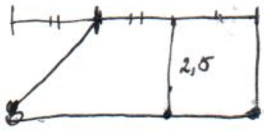
$8x^2 \log_a x - \log_x a - 2x \le 0$





$[\ ;\ ) \cup \{\ ;\ \}$

$y_b \in [-21; 21]$

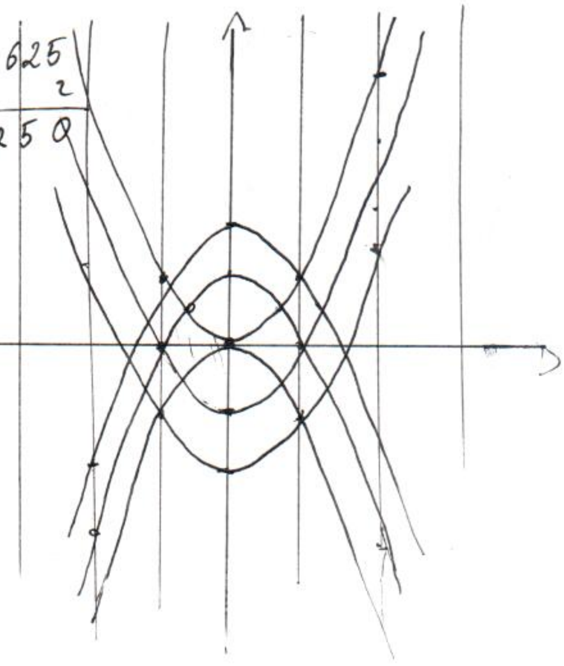


$$S = \frac{1,5+3}{2} \cdot 2,5 + \frac{3 \cdot 1}{2} + \frac{1,5+4,5}{2} \cdot 3,5 =$$

$$= \frac{4,5 \cdot 2,5}{2} + \frac{3}{2} + 3,5 \cdot 3$$

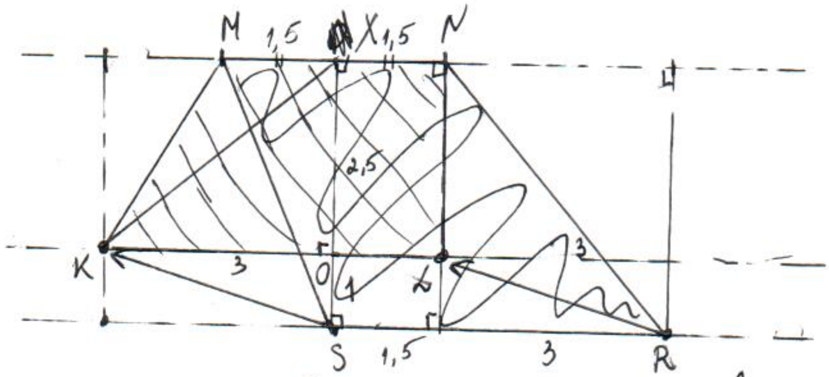
$$\begin{array}{r} \times\ 45 \\ 25 \\ \hline 225 \\ +\ 90 \\ \hline 1125 \\ +\ 03,00 \\ 21,00 \\ \hline 3525 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times\ 17,625 \\ 2 \\ \hline 35,250 \end{array}$$



Чистовик

№ 6.



Т. к. ~~…~~ крайние точки тени движутся по прямой, $S \to K$, $R \to L$. Следовательно, закрашенным (затенённым) будет пятиугольник KMNRS.

Общая площадь равна:

$$S_{KMNRS} = S_{KMXO} + S_{KOS} + S_{SXNR} = \frac{1,5+3}{2} \cdot 2,5 + \frac{3 \cdot 1}{2} + \frac{1,5+4,5}{2} \cdot 3,5 =$$

$$= \frac{4,5 \cdot 2,5 + 3 + 6 \cdot 3,5}{2} = \frac{35,25}{2} = 17\frac{5}{8} = 17,625 \ (м^2)$$

Ответ. 17,625 ~~…~~ $м^2$

№ 8. $8x^2 \log_a x - \log_x a - 2x \le 0$

ОДЗ:
$x \in (0;1) \cup (1;+\infty)$
$a \in (0;1) \cup (1;+\infty)$

$$8x^2 \log_a x - \frac{1}{\log_a x} - 2x \le 0$$

$$\frac{8x^2 \log_a x - 2x \log_a x - 1}{\log_a x} \le 0 \quad \Big| :(2x) > 0$$

$$\frac{8x^2 \log_a x - 2x \cdot \log_a x - 1}{2x \log_a x} \le 0$$

Пусть $2x \log_a x = t$

$$\frac{2t^2 - t - 1}{t} \le 0$$

$$\frac{(2t+1)(t-1)}{t} \le 0$$

Черновик

$$8x^2 \log_a x - \frac{1}{\log_a x} - 2x \le 0 \,\Big|\cdot \log_a x \ne 0$$

$\times\ 121$
11
121
121

$$8x^2 \log_a^2 x - 1 - 2x \log_a x \le 0$$

$x > 0$
$x \ne 1$
$a > 0$
$a \ne 1$

$x \ln x = \frac{2}{e}$

$2x \log_a x = t$

$2t^2 - t - 1 \le 0$

$x \in (0;1) \cup (1;+\infty)$

$(2t+1)(t-1) \le 0$

$x \ln x = -\frac{1}{e}$ $\quad t \in [-\frac{1}{2}; 1]$

$(2x \log_a x)' = 2 \cdot \log_a x + \frac{2x}{x \ln a}$

$\frac{1}{2} = \log_a \sqrt{a}$

$$\begin{cases} 2x \log_a x \ge -\frac{1}{2} \\ 2x \log_a x \le 1 \end{cases}$$

$x > 0$

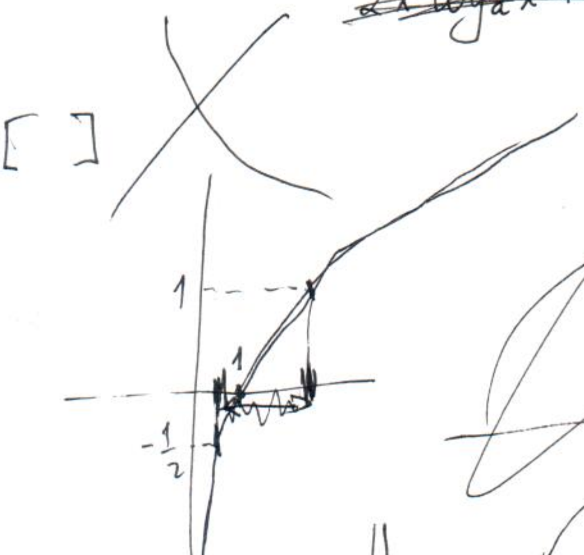
$a \in (0;1)$

$2 \log_a x + \frac{2}{\ln a} < 0$

$\cancel{2x \log_a x + \log_a \sqrt{a}}$

$2x \log_a x + \log_a \sqrt{a} \le 0$

$2x \log_2 x \ge -\frac{1}{2}$



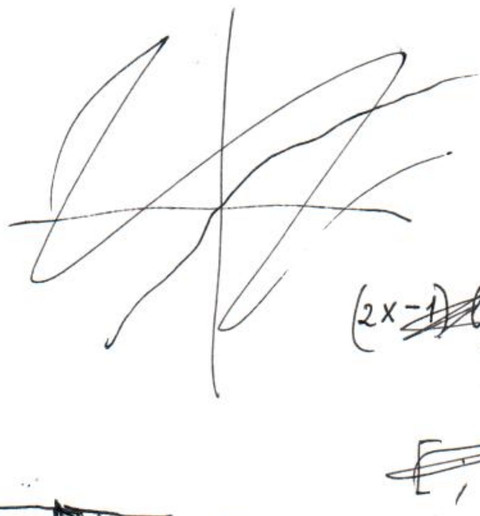
$x = 0$

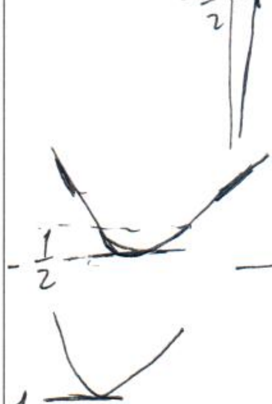
$x = 1$ $\quad x = e$

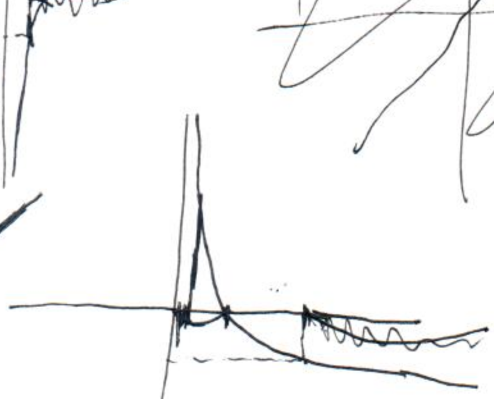
$\log_a x = \frac{1}{\ln a}$

$\log_a x = \log_a e$

$\cancel{(2x-1)\log_a x + \log_a \frac{x}{\sqrt{a}} \le 0}$



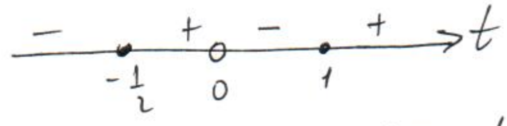




$\cancel{[\ ,\ ) \cup (\ ;+\infty)}$

$(\quad] \cup [\quad)$

№8. Чистовик



$t \in (-\infty; -\frac{1}{2}] \cup (0; 1]$.

~~t~~ Обр. замена:

$$\left[\begin{array}{l} 2x \log_a x \le -\frac{1}{2} \\ \begin{cases} 2x \log_a x > 0 \\ 2x \log_a x \le 1 \end{cases} \end{array}\right.$$

1) $a > 1$, тогда $2x \log_a x$ − возраст. функция (произв. двух возраст. функций), определ. на $(0; +\infty)$.

Тогда решением совокупности является 2 полуинтервала $(0; x_1] \cup (1; x_2]$ (ноль функции в единице).

При пересечении данного решения с ОДЗ не может получиться ~~од~~ отдельной точки.

2) $a \in (0; 1)$

$(2x \log_a x)' = 2 \log_a x + \frac{2\cancel{x}}{\cancel{x} \ln a} = 2(\log_a x + \log_a e) =$

$= 2 \log(ex)$, значит $2x \log_a x$ убывает при $x \in (0; \frac{1}{e}]$

и возрастает на $[\frac{1}{e}; +\infty)$

Заметим, что точка в ответе может быть, только если отдельная точка будет решением данной совокупности. Это так, ~~если точка экстремума~~ если значение функции в точке экстремума $(x = \frac{1}{e})$ равно $-\frac{1}{2}$ или 1.

1) $\frac{2}{e} \log_a \frac{1}{e} = -\frac{1}{2}$ 2) $\frac{2}{e} \log_a \frac{1}{e} = 1$

Чистовик

№8. $\log_a \frac{1}{e} = -\frac{e}{4}$

$\log_a e = \frac{e}{4}$

$\cancel{a^{\frac{e}{4}} = e}$

$\frac{1}{\log_e a} = \frac{e}{4}$

$\log_e a = \frac{4}{e}$

$a = e^{\frac{4}{e}}$

$\log_a e = -\frac{e}{2}$

$\cancel{a^{-\frac{e}{2}} = e}$

$\log_e a = -\frac{2}{e}$

$a = e^{-\frac{2}{e}}$

$a = \frac{1}{e^{\frac{2}{e}}}$

1) $\left[\begin{array}{l} 2x \cdot \frac{e}{4} \ln x \le -\frac{1}{2} \\ \begin{cases} 2x \cdot \frac{e}{4} \ln x > 0 \\ 2x \frac{e}{4} \ln x \le 1 \end{cases} \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{e} \\ \begin{cases} e x \ln x > 0 \\ e x \ln x \le 2 \end{cases} \end{array}\right.$

~~$e x \ln x \le -1$~~

$\left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{e} \\ \begin{cases} x > 1 \\ x \ln x \le \frac{2}{e} \end{cases} \end{array}\right.$, что даёт точку и полуинтервал при пересечении с ~~областью~~ ОДЗ

2) $\left[\begin{array}{l} 2x \cdot \left(-\frac{2e}{e^2}\right) \ln x \le -\frac{1}{2} \\ \begin{cases} 2x \cdot \left(-\frac{2}{e}\right) \ln x > 0 \\ 2x \cdot \left(-\frac{2}{e}\right) \ln x \le 1 \end{cases} \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x \ln x \ge \frac{1}{2e} \\ \begin{cases} x \ln x < 0 \\ x = \frac{1}{e} \end{cases} \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x \ln x \ge \frac{1}{2e} \\ \begin{cases} x < 1 \\ x = \frac{1}{e} \end{cases} \end{array}\right.$ — точка входит в $(0;1)$, значит не явл. отдельной

Ответ. $-\frac{1}{2}$.

Чистовик

№4. Функции $y = \sin 13\pi x$, $y = \sin 15\pi x$, $y = \sin 17\pi x$ имеют нули в точках вида $\frac{k_1}{13}$, $\frac{k_2}{15}$, $\frac{k_3}{17}$, $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{N}\cup\{0\}$...

Эти точки не совпадают на данной полоске, ~~кроме~~ т.к. $13 \perp 15$, $13 \perp 17$, $15 \perp 17$ (кроме точек $(0;0)$ и $(1;0)$).

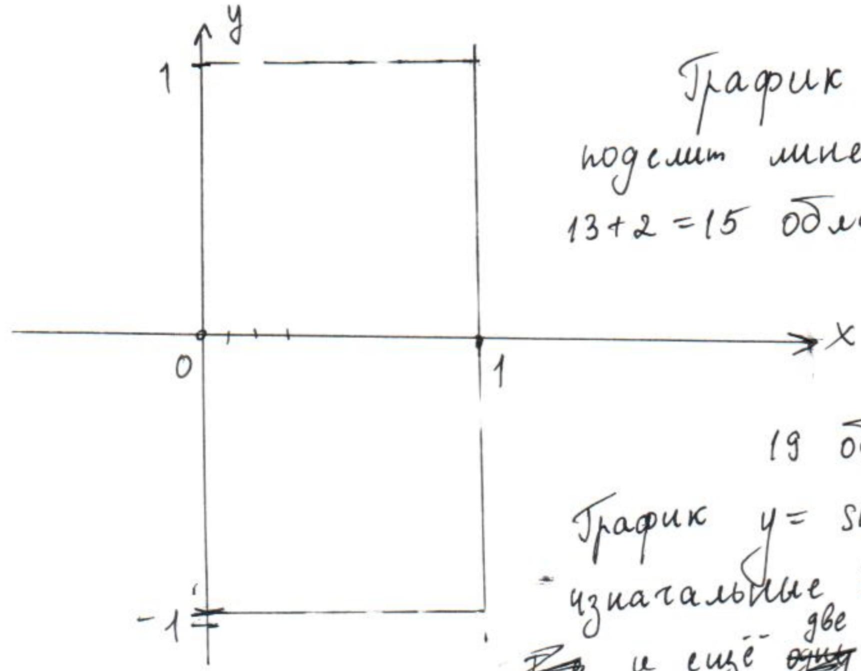


График $y = \sin 13\pi x$ поделит линейку на ~~13~~ $13+2=15$ областей, $y = \sin 15\pi x$ на 17 областей, $y = \sin 17\pi x$ – на 19 областей

График $y = \sin 15x$ делит все изначальные области на 2, ~~т.е.~~ и ещё ~~одну~~ две области на 3 части, т.е. получим 32 часть.

График $y = 17\pi x$ делит области пополам, и ещё 6 – на 3 части. Т.е. всего областей $32 \cdot 2 + 6 = 70$

Ответ. 70.