0 298499 620001

29-84-99-62
(124.3)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 11 класс

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников "Ломоносов"
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Куприяновой Алёны Игоревны.
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Вышел: 13:20
Вернулся: 13:24

Дата

«29» марта 2026 года

Подпись участника

Купр

100(сто)

Черновик

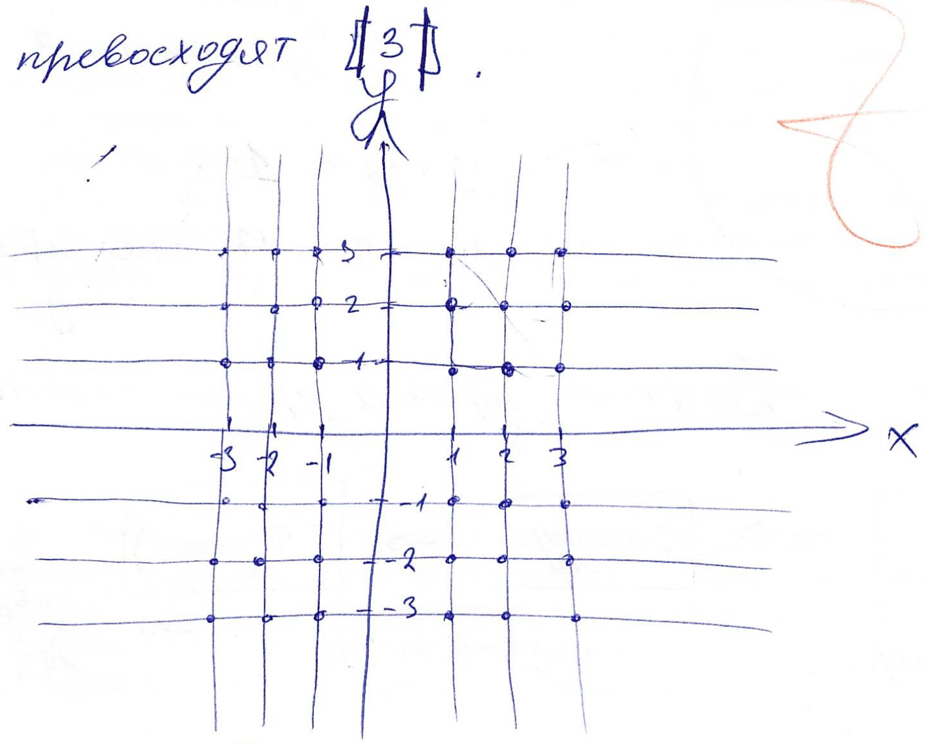
29-84-99-62
(124.3)

Задача 3.

Дано: F – множество точек в пространстве $\in Z$

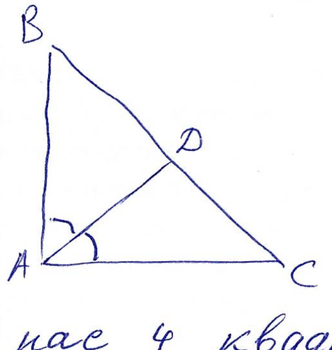
$-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \in Z$

не превосходят $|3|$.



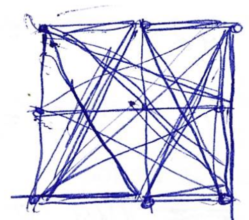
Теорема о биссектрисе:

Биссектриса треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам.



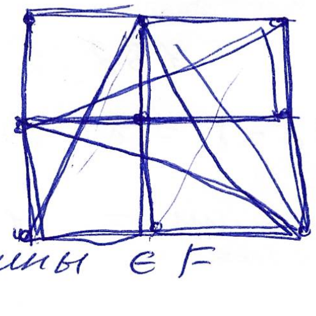
$$\frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AC}$$

при AD-биссектр.



$4 + 4 + 4 = 12$

Получается, у нас 4 квадрата, где может поместиться 12 прямоуг. Δ в каждом $\Rightarrow 12 \cdot 4 = 48$.



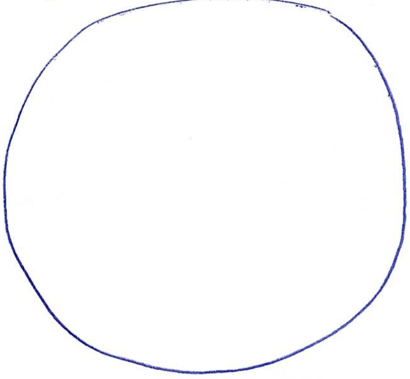
12 Тр.

Ответ: 48 Δ, у которых все вершины $\in F$

координаты $\in \mathbb{Z}$, а каждый из катетов $\parallel$ осям.

Задача 2.

множество A:



~~$81 : 9 = 9$~~
~~$18 : 9 = 2$~~

Все числа должны быть кратны 3.

$\Rightarrow$ $9 \times 12 = 108$

$108 : 9 = 12$ – не кратно 9

Значит, нужна другая тактика.

итог:

$\boxed{} \rightarrow \boxed{: \text{сумму цифр}} \rightarrow \boxed{: 9 \text{ (нацело)}}$

$35 \times 9 = 315$ ~~36~~ $36 \times 4 = 144$;

Например:

$102 \rightarrow 102 : 3 = 34 \rightarrow 34 : 9$ – некратно

$104 \rightarrow 104 : 5$ — $36 \times 5 = 180$ $36 \times 6 = 216$

$110 \rightarrow 110 : 2 = 55 \rightarrow 55 : 9$ X не подходит

~~116~~ $117 : 9 = 13 \rightarrow 13 : 9$ X

$126 : 9 = 14 \rightarrow 14 : 9$ X

$135 : 9 = 15 \rightarrow 15 : 9$ X

~~136~~ $144 : 9 = 16 \rightarrow 16 : 9$ X

$153 : 9 = 17 \rightarrow 17 : 9$ X

$162 : 9 = 18 \rightarrow 18 : 9$ ✓ подходит

$162 - 81 = 81$, получается разница между

числами $= 81$, Тогда 162, 245, см. след. черновик $\rightarrow$

7

Чистовик.

Задача 3.

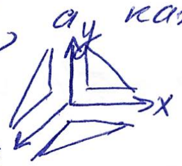
Дано:

F – множество точек в пространстве, координаты $\in Z$ и не превосходят $|3|$

Найти:

Кол-во треугольников прямоуг., все вершины которых $\in F$, а каждый из катетов $\parallel$ основаниям.

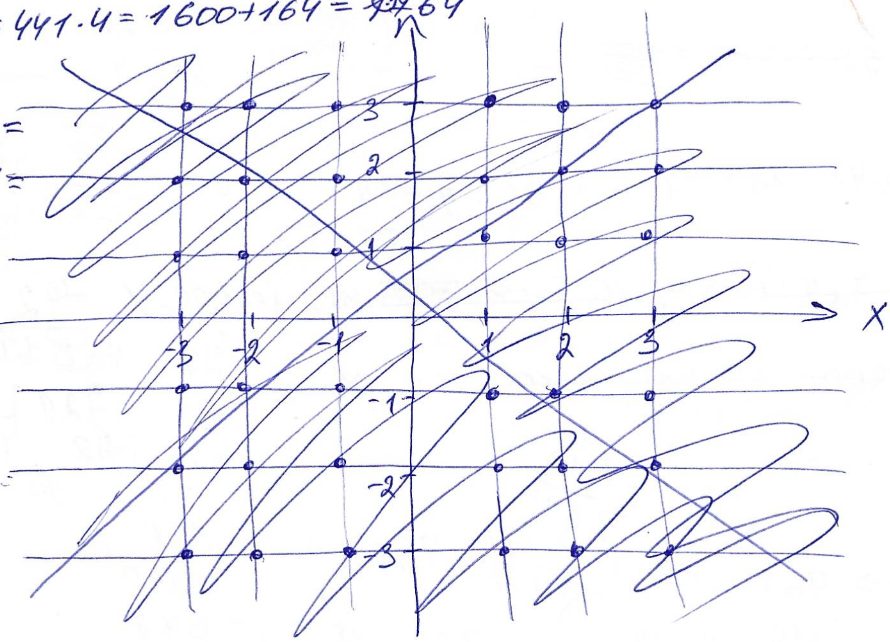
$|x_j| \leq 3 \in Z$ $|y_j| \leq 3 \in Z$

Решение:  Рассмотрим плоскость $\parallel z=0$

~~Рассмотрим координатную плоскость, найдем~~

$(C_7^2)^2 = \left(\frac{7!}{2!\,5!}\right)^2 = \frac{\cancel{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}\cdot\cancel{6}^{3}\cdot7}{\cancel{2}\cdot\cancel{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}} = 21^2 = 441$

В $z=0$: $441\cdot4 = 1600+164 = 1764$



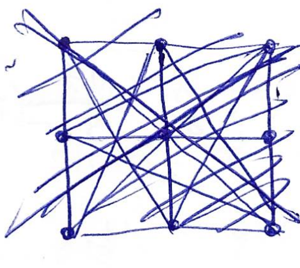
Далее:

$1764\cdot7\cdot3 =$

$= 1764\cdot21 =$

$= 37044$

$$\begin{array}{r} \times\, 1764 \\ 21 \\ \hline 1764 \\ 3528 \\ \hline 37044 \end{array}$$



~~В каждом квадрате 12 прямоуг. треугольников ... в угловых квадратах~~

Ответ: 37044

Черновик:

162, 243, 324, 405, 486, 567, 648, 729 (+81 между соседними числами)

800, 881, 962 (+81). Нам нужны только 3-х значн. числа.

Проверка:

1) 162 → 162 : 9 = 18 → 18 : 9 = 2 ✓

2) 243 → 243 : 9 = 27 → 27 : 9 = 3 ✓

3) 324 → 324 : 9 = 36 → 36 : 9 = 4 ✓

4) 405 → 405 : 9 = 45 → 45 : 9 = 5 ✓

5) 486 → 486 : 18 = 27 → 27 : 9 = 3 ✓

~~6) 567 → 567 : 18 = 36~~

6) 648 → 648 : 18 = 36 → 36 : 9 = 4 ✓

~~7) 729 → 729 : 18 = 40,5 → 40,5~~ не целое ✗

~~8) 800 → 800 : 8 = 100 → 100 : 9~~ ✗

~~7) 881~~

7) 962 → 962 : 17

810 : 9 = 90

$18 \times 9 = 162$, $18 \times 7 = 126$, $486 : 18$: $486 - 36 = 126$; $18 \times 36 = 108 + 54 = 648$; $567 : 18$: $567 - 54 = 27$; $18 \times 18 = 144 + 18 = 324$; $54 \times 9 = 486$; $63 \times 9 = 567$; 567 | 18; $18 \times 45 = 90 + 72 = 810$; $72 \times 9 = 648$; $729 : 18 = 4,5$: $729 - 72 = 90$; $45 \times 18 = 360 + 45 = 810$; 981 | 9, 1; $162 + 648 = 810$; $18 \times 40 = 720$; $981 : 18 = 5$: $981 - 90$, $- 81$; 17×45

$962 : 17 = 5$: $962 - 85 = 112$; 17; 906; 7) 972; $810 + 972 = 1782$; $881 : 17 = 5$: $881 - 85 = 31$

926

927

$17 \times 5 = 85$

972 | 18, 54

×1 ×2 ×3 ×4 ×5

17, 34, 51, 68, 85, 102,

1 2 3 4 5 ×1 ×2 ×3 ×4 ×5 ×6

18, 36, 54, 72, 90 17, 34, 41, 58, 75,

29-84-99-62
(24.3)

Чистовик.

Задача 2.

Дано: множество А, где все натуральные числа, ~~кратные~~ которые при делении дают целое число, кратное 9.

Найти: все трехзначные числа, входящие в множество А. и сумму 1, 6 и последнего числа.

Решение:

итоговое число

$\boxed{?} \longrightarrow \boxed{:\text{сумму цифр}} \longrightarrow \boxed{:9}$

1) 162 → 162 : 9 = 18 → 18 : 9 = 2

2) 243 → 243 : 9 = 27 → 27 : 9 = 3

3) 324 → 324 : 9 = 36 → 36 : 9 = 4

4) 405 → 405 : 9 = 45 → 45 : 9 = 5

5) 486 → 486 : 18 = 27 → 27 : 9 = 3

6) 648 → 648 : 18 = 36 → 36 : 9 = 4

7) ~~972 → 972 : 18 = 54 → 54 : 9~~
810 → 810 : 9 = 90 → 90 : 9 = 10

8) 972 → 972 : 18 = 54 → 54 : 9 = 6.

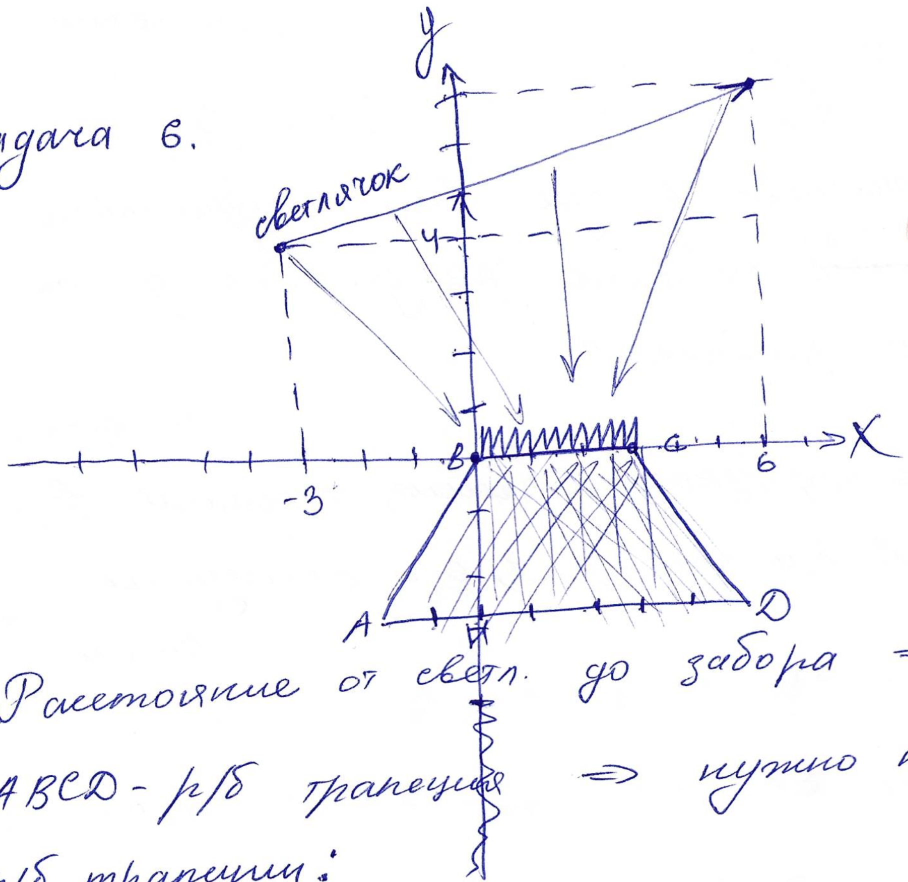
Сумма 1, 6 и 8 числа:

162 + 648 + 972 =
= 1782.

Ответ: 1782.

Черновик:

Задача 6.



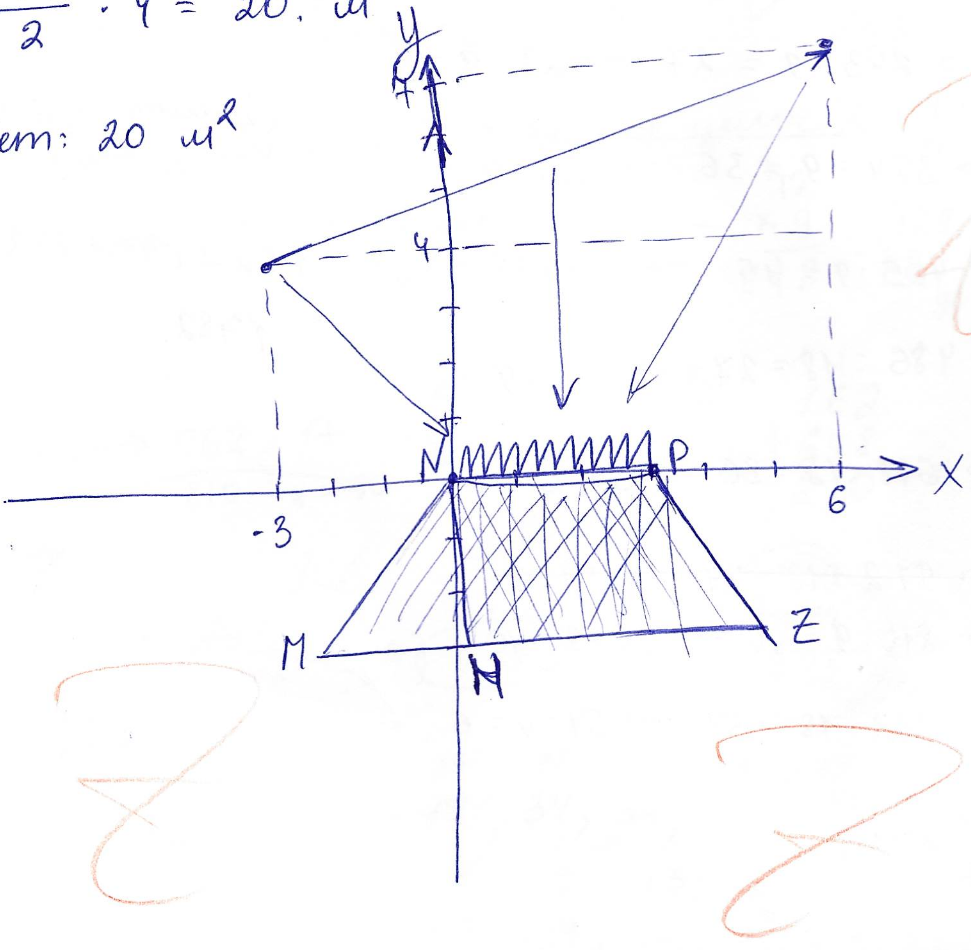
Расстояние от светл. до забора = 4

ABCD - р/б трапеция $\Rightarrow$ нужно найти S р/б трапеции:

$BC = 3$, $AD = 7$, $BH = 4$ $\Rightarrow S_{\triangle} = \frac{BC + AD}{2} \cdot BH =$

$= \frac{3+7}{2} \cdot 4 = 20.\ м^2$

Ответ: 20 $м^2$



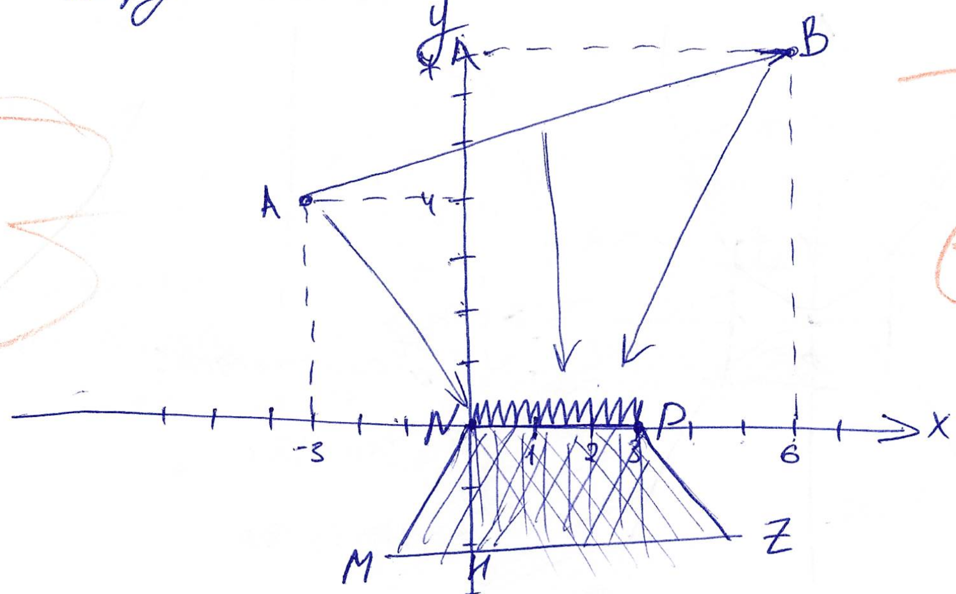
Чистовик.

Задача 6.

Дано: пустырь, забор 2 м высотой, светлячок, который летит из точки A в B.

Найти: площадь затененного пустыря.

Решение: Можно отобразить все ситуацию на координатной плоскости.



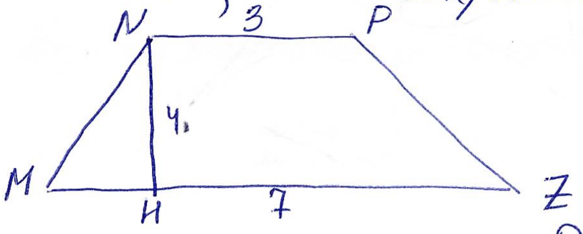
Расстояние от светлячка до забора = 4 $\Rightarrow NH = 4$

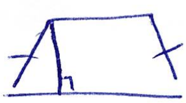
MNPZ – равнобедренная трапеция

нужно найти S: $S = \frac{MZ + NP}{2} \cdot NH$

$NP = 3,\ MZ = 7,\ NH = 4 \Rightarrow S = \frac{3+7}{2} \cdot 4 = 20\ м^2$

Светлячок летит выше $\Rightarrow$ тень падает меньше, но сохраняется вид р/б трапеции.

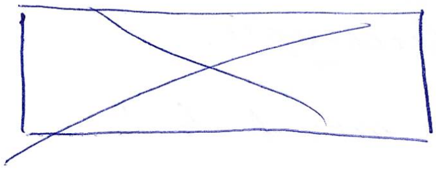




Ответ: 20 $м^2$.

Черновик:

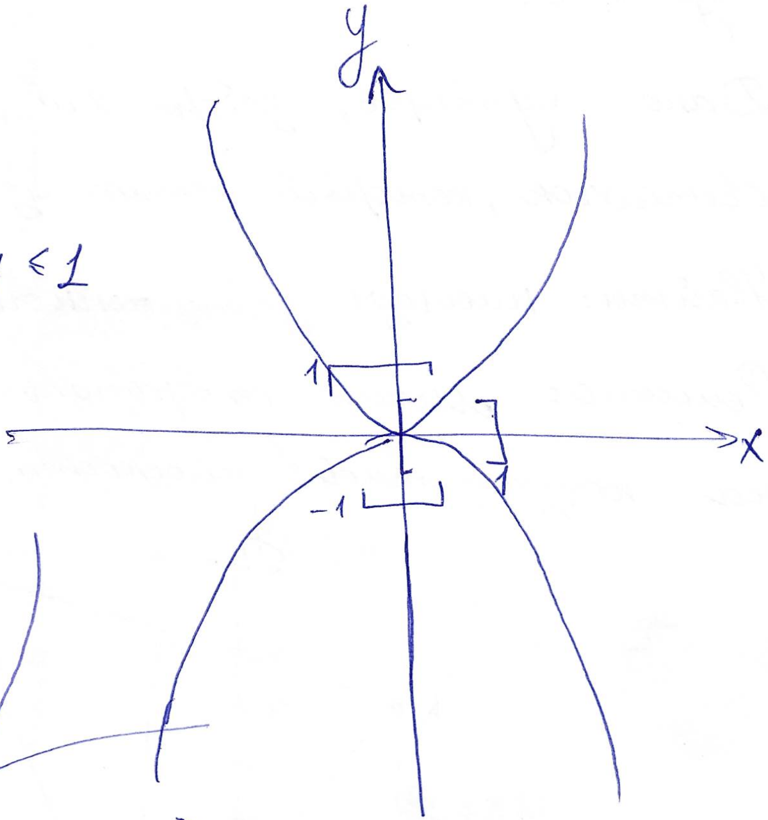
Задача № 4.

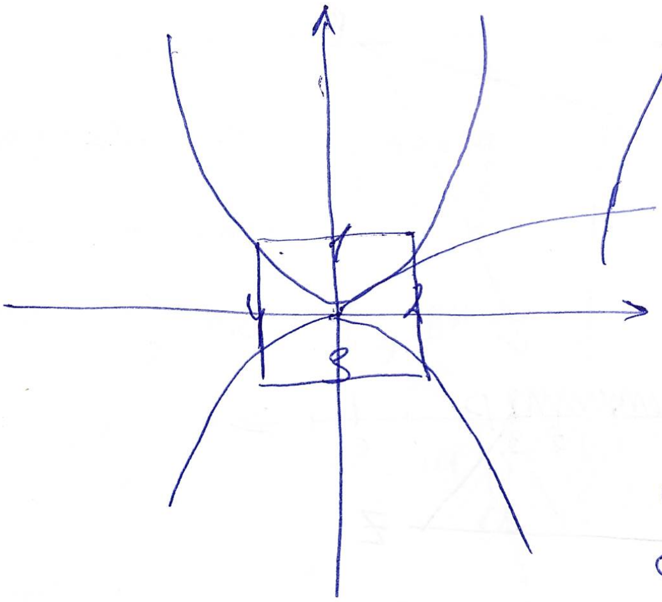


$0 \leq x \leq 1, \quad -1 \leq y \leq 1$

$y = \sin k\pi x$

$k \in \{11, 13, 15\}$.





Получается:

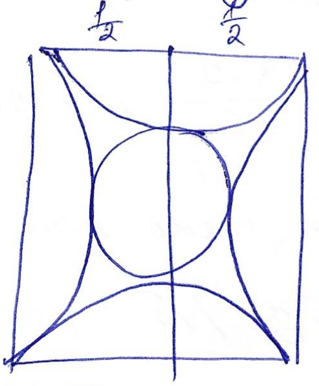
$y = \sin 11\pi x$

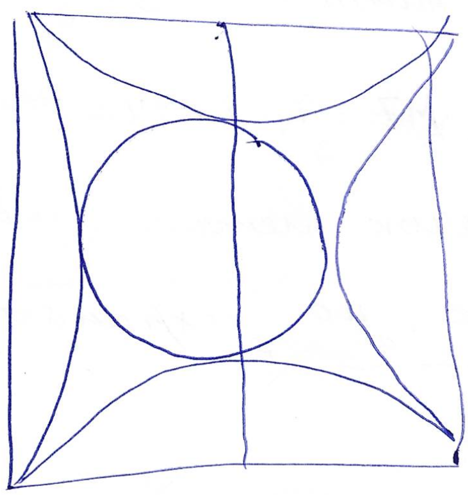
$y = \sin 13\pi x$

$y = \sin 15\pi x$

Получается, полоска будет разделена на 4 части при $y = \sin 11\pi x$, $\sin 13\pi x$, $\sin 15\pi x$.

№5





Чистовик:

Задача 4.

~~$0 \leq x \leq 1$~~ ~~-1~~

Дано: прямоугольная полоска $0 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$, где построим график функции: $y = \sin k\pi x$ для всех $k \in \{11, 13, 15\}$.

Найти: кол-во областей, на которые разделена эта полоска.

Решение:

1) $\sin 11\pi x = \sin 13\pi x$

2) $\sin 13\pi x = \sin 15\pi x$

3) $\sin 11\pi x = \sin 15\pi x$

1) $2\cos(12\pi x)\sin(-\pi x) = 0$

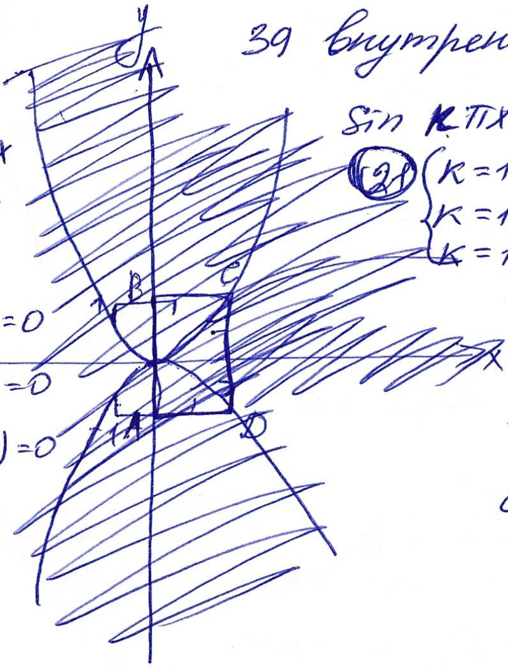
2) $2\cos(14\pi x)\sin(-\pi x) = 0$

3) $2\cos(13\pi x)\sin(-2\pi x) = 0$

Тогда $n_{11,13} = 12$

$n_{11,15} = 13$

$n_{13,15} = 14$



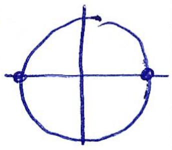
39 внутренних пересечений

$\sin k\pi x = 1$ $\quad x = \dfrac{4m+1}{2k}$

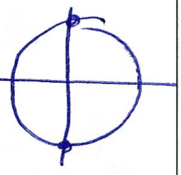
21 $\begin{cases} k = 11 \Rightarrow 6 \\ k = 13 \Rightarrow 7 \\ k = 15 \Rightarrow 8 \end{cases}$

$\boxed{\sin k\pi x = -1 \text{ аналогично вычисляем: } 17}$

$\sin \alpha = 0$

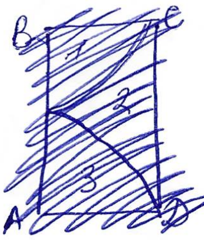


$\cos \beta = 0$



~~ABCD - полоска, $y = \sin 11\pi x$, $y = \sin 13\pi x$, $y = \sin 15\pi x$~~

~~Поделится в области, на которые разделена полоска.~~



Ответ: 81.

Черновик.

Задача №1.

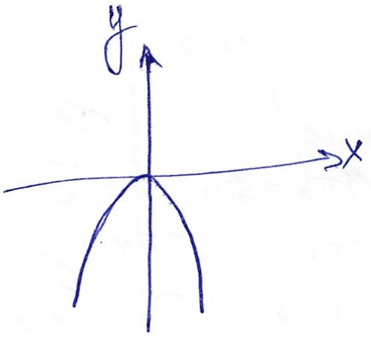
$\sqrt{6(1-ctg^2x)} = 4\cos x \,\Big|\,^2$

$6 - 6\,ctg^2x = 16\cos^2x$

$\cancel{6 - 6\frac{\cos^2x}{\sin^2x} = 16\cos^2x}$

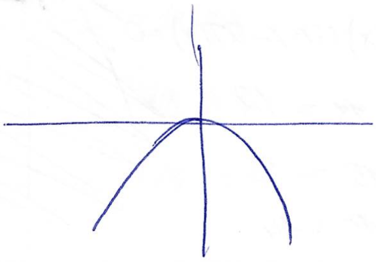
$6 - 6\frac{\sin^2x}{\cos^2x} = 16\cos^2x \,\Big|\cos^2x$

$6 - 6\frac{\sin^2x - 16\cos^4x}{\cos^2x} = 0$



Пусть $\cos^2x = t$

$6 - \frac{6(1-t) - 16t^2}{t} = 0$



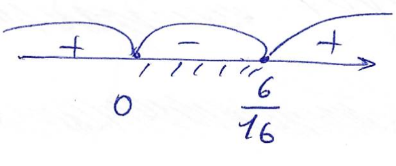
$6 - \frac{6-6t-16t^2}{t} = 0$

$6^{|t} - \frac{-16t^2-6t+6}{t} = 0$

$\cancel{6 - \frac{(t-3)(t+1,5)}{t} = 0}$

$\frac{\cancel{6t} - 16t^2 - \cancel{6t} + 6}{t} = 0$

$\frac{-16t^2+6}{t} = 0$

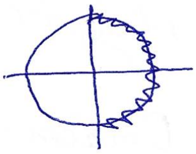


Ответ: $(0; \frac{6}{16}]$

Задача №1. $\cos x \geq 0$ Чистовик.

$\sqrt{6(1-ctg^2 x)} = 4\cos x \,|\,\hat{}\,2$

$6(1-ctg^2 x) = 16\cos^2 x$



$6 - 6ctg^2 x = 16\cos^2 x$

$6 - 6ctg^2 x - 16\cos^2 x = 0$

$6 - 6\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} - 16\cos^2 x = 0$

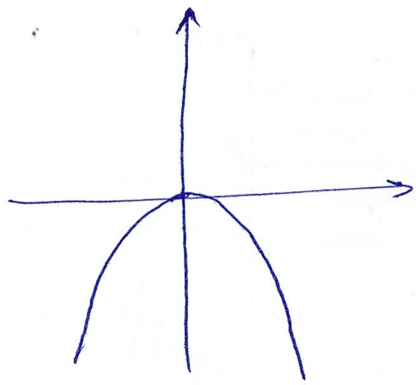
$6 - 6\frac{\frac{\cancel{\cos}}{\cancel{\sin^2 x}}}{\frac{\cancel{\cos^2 x}}{\sin}} - 16\cos^2 x \,|\cdot \cos^2 x = 0$

парабола ветви вниз, т.к. $a<0$

$\sin^2 x = 1-\cos^2 x$

$6 - \frac{6\sin^2 x - 16\cos^4 x}{\cos^2 x} = 0$

$6 - \frac{6(1-\cos^2 x) + 16\cos^4 x - 16\cos^2 x}{1-\cos^2 x} = 0$



Пусть $\cos^2 x = t$

$6 - \frac{6t + 16t^2 - 16t}{1-t} = 0$

~~...~~ $= 0$ $\quad 6(1-t) - 6t - 16t(1-t) = 0$

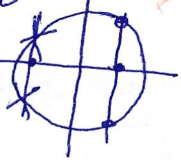
$6 - 6t - 6t - 16t + 16t^2 = 0 \quad 8t^2 - 14t + 3 = 0$

~~$-16t^2 - 6$~~ $= 0$

$8t = \left[\begin{array}{l}12\\2\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}t = \frac{3}{2}\ \varnothing\\ t = \frac{1}{4}\end{array}\right.$ $\quad 0 \quad \frac{6}{16}$

$\cos^2 x = \frac{1}{4}$

$\cos x = \pm\frac{1}{2}$

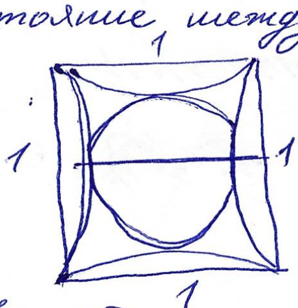


Ответ: ~~...~~

$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z.$

Задача №5.

Дано: $y = Cx^2$, графики парабол состыковали и получилась окружность. расстояние между вершинами парабол $= 1$.

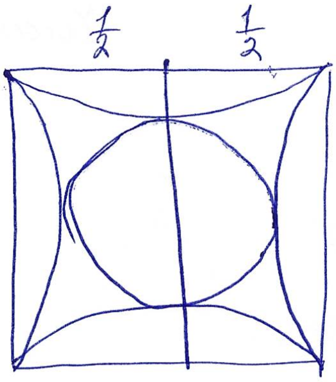


~~Если сое~~ Решение:

Если мы соединим вершины

$\Rightarrow$ будет квадрат со стороной 1. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$



$\frac{1}{3}$ – радиус окружности, т. к. радиус ~~квадрата~~ окр. в квадрате $= \frac{1}{2}$

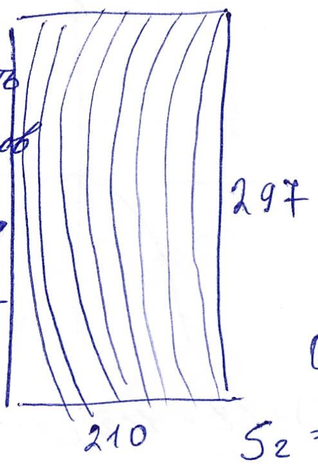
Ответ: $\frac{1}{3}$.

Задача №7.

Дано: $y = \pm \frac{3x^2}{4} + c$, где $c \in Z$, размер страницы равен 210×297 мм

Найти: наибольшую площадь четырехугольника.

Решение:
Если увеличивать c, то площади четырехугольников ~~страница~~ будут уменьшаться, поэтому максимальная площадь равна $\sqrt{\frac{2}{3}}$



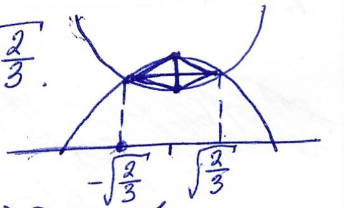
$y = 1 - \frac{3}{4}x^2$

$\frac{3}{4}x^2 = 1 - \frac{3}{4}x^2$

$\frac{3}{2}x^2 = 1$

$x^2 = \frac{2}{3} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$

Ответ: $\sqrt{\frac{2}{3}}$.

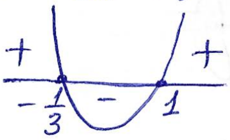


$S_\square = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$

Задача №8. $3x^2 \log_a x - \log_x a - 2x \le 0$ $\quad x > 0 \quad x \ne 1 \quad a > 0 \quad a \ne 1$

Пусть $\log_x a = \frac{1}{t} \to 3a^{2t} \cdot t - \frac{1}{t} - 2a^t \le 0$ При $t > 0$ $3a^{2t}t^2 - 2a^t t - 1 \le 0$

При $t < 0$ $3a^{2t} \cdot t^2 - 2a^t \cdot t - 1 \ge 0 \to a^t \cdot t = p \to 3p^2 - 2p - 1 = 0$



$p = \frac{2 \pm 4}{6}$ $\to 1$, $\to -\frac{1}{3}$

$a^t \cdot t = 1$

$a^t \cdot t = -\frac{1}{3}$

$a^t \cdot t \uparrow (0; +\infty)$

~~Нужна параболических часть.~~

$(-\infty; 0)$ min в $-\frac{1}{\ln a}$ равен $-\frac{1}{e \ln a}$ $\quad e\ln a = 3$ $\quad \exists!$ корень

$\Downarrow$

подходит $e^{3/e}$

Ответ: $e^{3/e}$