0 914097 300007

91-40-97-30
(124.12)

+1 лист

**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**
**имени М.В.ЛОМОНОСОВА**

Вариант 11 класс вариант 1

Место проведения г. Москва
город

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Ломоносов"
наименование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Куропаченко Ульяны Игоревны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«29» марта 2026 года

Подпись участника

91-40-07-30 (124.17)

Ю (Девяносто) дней

Акуреев

Черновик

$36(1-4\sin^2 x) = 16\sin^2 x$

$\sin x \geq 0$

$\cos x \neq 0$

$3\cos^2 x - 3\sin^2 x - 8\sin^2 x\cos^2 x$

$3\left(\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x}\right) - \frac{8\sin^2 x \cos^2 x}{\cos^2 x} = 0.$

$\frac{3 - 6\sin^2 x - 8\sin^2 x + 8\sin^4 x}{\cos^2 x} = 0.$

$8t^2 - 14t + 3$

$(4t-1)(2t-3) \rightarrow$

$\frac{(4\sin^2 x - 1)(2\sin^2 x - 3)}{\cos^2 x} = 0.$

$\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)\left(\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0.$

$\sin$

$\cos$

одинаковый корень

$\frac{1}{2}$ [0;2]

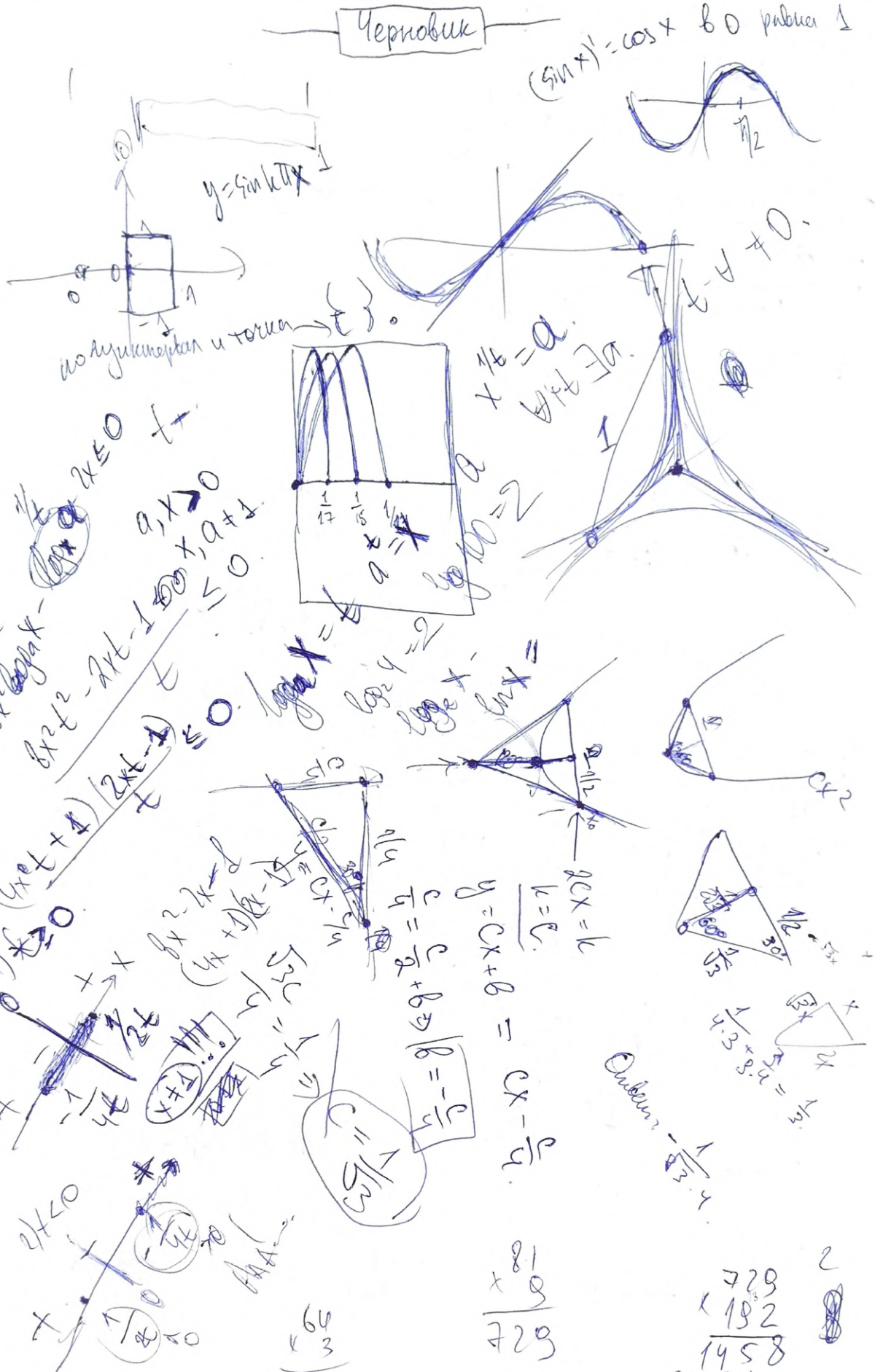
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$ [0;2]

$\frac{\pi}{6}$ $\frac{5\pi}{6}$ $\frac{4\pi}{3}$ $\frac{5\pi}{3}$

4 корня

$\frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} + \frac{4\pi}{3} + \frac{5\pi}{3} = \frac{\pi + 5\pi + 8\pi + 10\pi}{6} = \frac{24\pi}{6} = 4\pi$

Черновик


(sin x)' = cos x во равна 1
y = sin kπx
1
0
1
-1
π/2
729
× 9
6561
64
× 3
192
729
1458
6561
729
13996

91-40-97-30
(124.12)

Чистовик

№1

$\sqrt{6(1-tg^2x)} = 4\sin x$. Возведем в квадрат.

$$\begin{cases} 6(1-tg^2x) = 16\sin^2 x \quad (1) \\ 4\sin x \geq 0 \quad (2) \end{cases}$$

Решим (1):

$$3\left(\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right) - 8\sin^2 x = 0.$$

$$\frac{3\cos^2 x - 3\sin^2 x - 8\sin^2 x \cos^2 x}{\cos^2 x} = 0.$$

$$\frac{3(1-\sin^2 x) - 3\sin^2 x - 8\sin^2 x(1-\sin^2 x)}{\cos^2 x} = 0.$$

$$\frac{8\sin^4 x - 14\sin^2 x + 3}{\cos^2 x} = 0.$$

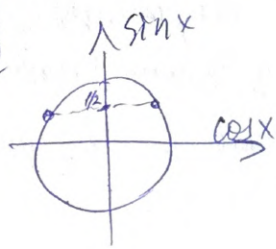
$$\frac{(4\sin^2 x - 1)(2\sin^2 x - 3)}{\cos^2 x} = 0.$$

Заметим, что $\sin^2 x \in [0;1]$, т.е. $2\sin^2 x - 3 \in [-3;-1] \Rightarrow$ $2\sin^2 x - 3 < 0$.

Тогда получаем $\begin{cases} 4\sin^2 x - 1 = 0 \\ \cos^2 x \neq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} (2\sin x + 1)(2\sin x - 1) = 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases}$

Из (2) $\sin x \geq 0 \Rightarrow 2\sin x + 1 > 0 \Rightarrow 2\sin x - 1 = 0 \Rightarrow \sin x = 1/2$.

Тогда (исчезающее решение $\sin x = 1/2$ ($\sin x \geq 0$ и $\cos x \neq 0$ выполн.)




Ответ: $\begin{cases} x = \pi/6 + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z} \\ x = 5\pi/6 + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

№2

## Чистовик

Пусть $f(a)$ – сумма цифр числа $a$.

$\forall a \in A \quad a : f(a) = z$, где $z \in \mathbb{N}$, $z : 9$.

$a = f(a) \cdot z$. $z : 9 \Rightarrow a : 9$. Но тогда и $f(a) : 9$ (если число : 9, сумма его цифр – тоже). Значит, $\begin{cases} f(a) : 9 \\ z : 9 \end{cases} \Rightarrow a : 81$.

Переберем трехзначные числа : 81.

| a | f(a) | |
|---|---|---|
| 162 | 9 | $a : 81 \Rightarrow a : f(a) = a : 9 = z$, $z : 9$. подходит. (*) |
| 243 | 9 | |
| 324 | 9 | |
| 405 | 9 | |
| 486 | 18 | 486 : 81; 486 : 2 $\Rightarrow$ 486 : 18 = z, z : 9 (**) |
| 567 | 18 | – не подх, т.к. 567 – нечет, и 567 ⋮ 18 |
| 648 | 18 | – подх. аналог. (**) |
| 729 | 18 | – не подх, т.к. 729 – нечет, 729 ⋮ 18 |
| 810 | 9 | – подх аналогично (*) |
| 891 | 18 | – не подх, т.к. нечет, 891 ⋮ 18. |
| 972 | 18 | – подх. аналогично (**) |

Тогда подходящие числа – ①162, ②243, ③324, ④405, ⑤486, ⑥648, ⑦810, ⑧972.

$243 + 486 + 810 = 1539$

Ответ: 1539.

№3 По оси X чисел, по модулю не прев. 4, $9$ : $\{-4; -3; \dots 4\}$. Тогда у каждой координаты 9 вариантов значений (координат 3) $\Rightarrow$ всего в F $9^3$ точек.

~~Будем считать~~ Прямоугольный треугольник определяется 3 точками – 1 вершина при прямом угле и еще две, ~~не совпадающей~~ с ~~первой вершиной~~ одной из координат. т.е. катет || одной из осей коорд.

Будем считать кол-во прямоуг. тр-ников с вершиной при прямом угле в конкретной точке.

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

91-40-97-30
(12.12)

Чистовик

№3 (продолжение)

Для этой вершины хотим выбрать 2 другие, ~~которые~~ ~~будут~~ ~~образовывать~~ ~~с ней~~ ~~прямой~~ ~~угол~~. Чтобы катеты были параллельны осям.

На прямой, проходящей через A ∥ оси x (вершину △) отмечен (3 варианта координаты x, коорд. y, z - аналогично), одна из них – A ⇒ 3 варианта выбрать точку. Так, для каждой из осей 3 варианта. При этом эти 2 точки должны быть выбраны на разных прямых, проходящих через A (иначе треуг. выродится в отрезок).

Вариантов $C_3^2 \cdot 3 \cdot 3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 192$ (треуг. с вершиной при прямом угле в данной точке)

$C_3^2$ – вариантов выбрать 2 направ. из 3 ($\parallel x, \parallel y, \parallel z$)

3 – вариантов выбрать 1 из оставшихся

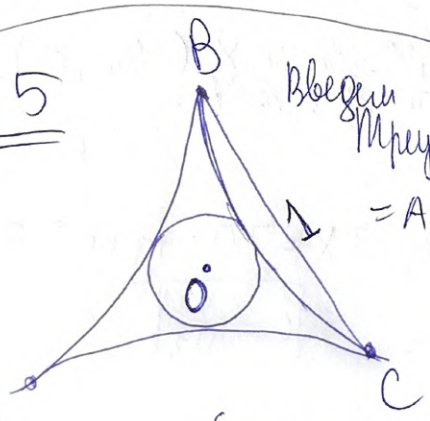
3 – вариантов выбрать вторую

Тогда всего прямоуг. треуг. $192 \cdot 9^3 = 139968$

9 – кол-во вершин (при прямом угле)

Ответ: 139968.

№5



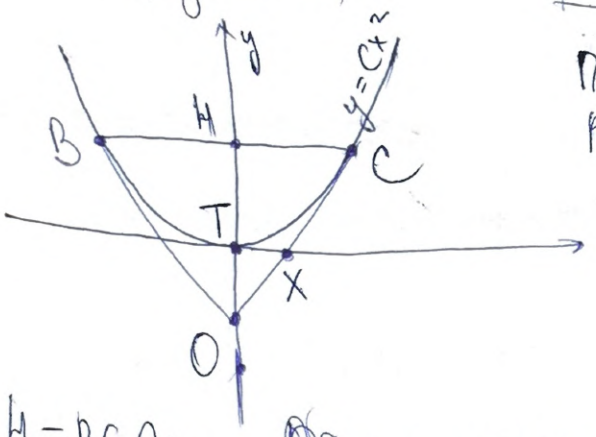

Введем обозначения согласно рисунку. Треугольники симметричны ⇒ $\angle BOC = \angle BOA = \angle AOC = \frac{360°}{3} = 120°$.

~~Парабола, проходящая через A и B~~ ~~касается~~ ~~параб.~~ ~~проходящей через~~ Угол между парабола-ми O (прох. через A, B и B, C) т.е. угол между касательными в B к 2 параболам – 0° ⇒ у них общая касательная в B ⇒ в силу симметрии BO – касательная. Тогда CO, AO – тоже общие касатель-ные к двум другим парам парабол (аналогично).

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

№5 (продолжение)

Условие




Проведем оси координат согласно рисунку, отметим O (она лежит на оси y в силу симметрии, BO = CO).

Зная: $\begin{cases} BC = 1 \\ \angle BOC = 120^\circ \end{cases}$

$H = BC \cap y$. В симметр. С относ. y $\Rightarrow$ $HC = HB$,

т.е. $HC = \frac{BC}{2} = \frac{1}{2}$.

Касательная в $C$ ($x = 1/2$) к $y = Cx^2$ : $y = kx + b$.

$(Cx^2)' = 2Cx$. При $x = 1/2$ $2Cx = C = k$ (углов. коэф. касат. равен пр-ву в т. касания)

$y = Cx + b$. При $x = 1/2$; $y = Cx^2 = C\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{C}{4}$:

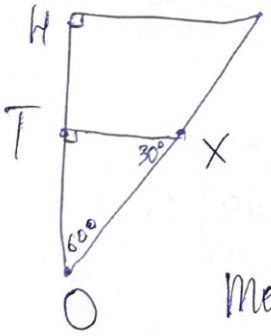
$\frac{C}{4} = \frac{C}{2} + b$, т.е. $b = \frac{C}{4} - \frac{C}{2} = -\frac{C}{4}$.

Итак, ур-е касательной: $\boxed{y = Cx - \frac{C}{4}}$ (*)

$O \in$ касательной. При $x = 0$ (*): $y = -\frac{C}{4} \Rightarrow$ координаты $O\left(0; -\frac{C}{4}\right)$.

В силу симметрии $\angle HOC = \frac{1}{2}\angle BOC = 60^\circ$.

$X = CO \cap x$. При $y = 0$ (*): $Cx = \frac{C}{4} \Rightarrow x = \frac{1}{4} \Rightarrow$ коорд. $X\left(\frac{1}{4}; 0\right)$.




$T = x \cap y$

$\begin{cases} TX = 1/4 \\ OT = \frac{C}{4} \\ \angle TOX = 60^\circ \end{cases}$

Тогда $TX = TO \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = TO\sqrt{3}$

$\frac{1}{4} = \frac{C}{4} \cdot \sqrt{3} \Rightarrow \boxed{C = \frac{1}{\sqrt{3}}}$

Тогда $OT = \frac{C}{4} = \frac{1}{4\sqrt{3}}$.

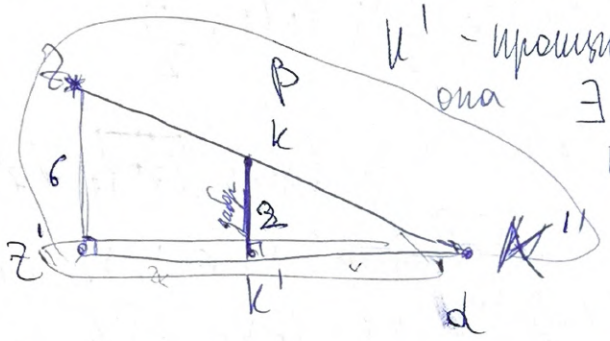
В силу симметрии T является т. касания окружности с центром BO и параболой. Тогда TO – радиус этой окружности. Ответ: $\frac{1}{4\sqrt{3}}$.

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

Чистовик

№6 Посмотрим, что остается в тени, если светлячок находится в точке Z на высоте 6м над землей. Обозначим X, Y края забора на высоте 2м. Обозначим землю пл-ть $\alpha$. Пусть $Z', X', Y'$ – проекции Z, X, Y соотв. на $\alpha$.

$\forall$ точки K на XY: Рассмотрим пл-ть $(ZZ'K) = \beta$, где $K'$ – проекция K на $\alpha$. $ZZ' \parallel KK' \Rightarrow$ она $\exists$. Тогда $ZK \cap Z'K' = K'' \in \alpha$, т.к. $K'' \in Z'K' \subset \alpha$.




Тогда на прямой $Z'K'$ в тени будет отрезок $K'K''$.

При этом $ZZ' = 6$; $KK' = 2$. Тогда $\triangle K''KK' \sim \triangle K''ZZ'$, т.к. $\angle K''$ – общий, и $\angle KK'K'' = \angle ZZ'K'' = 90°$

Значит, $\frac{K''K'}{K''Z'} = \frac{KK'}{ZZ'} = \frac{1}{3}$ – т.е. $Z'K' = K'K'' = 2$, и $K''$ получается из $K'$ гомотетией в т. $Z'$ с коэффициентом $\frac{3}{2}$. Тогда, чтобы получить точки, находящиеся в тени, когда светлячок в $Z'$, сделаем гомотетию с коэф. $\frac{3}{2}$, $X'Y' \to X''Y''$. Тогда трапеция $X'Y'Y''X''$ – в тени.

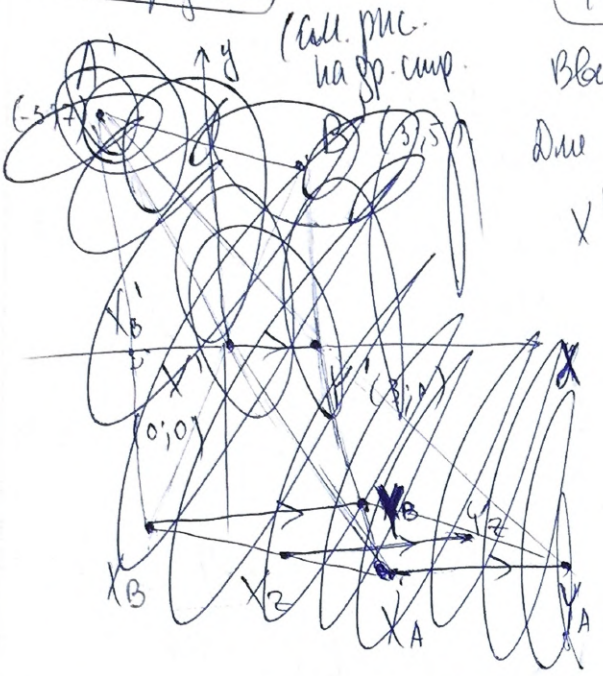
Теперь посмотрим, что выйдет объединение всех таких трапеций $Z \in AB (т.е. Z' \in A'B')$

$A', B'$ – проекции A, B на $\alpha$.

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

№6 (продолж.)

Чистовик




Введем оси координат.

Для т. A у нас в нем трапеция $X'Y'X_AY_A$, где $\frac{3}{2}\overrightarrow{A'X'} = \overrightarrow{X'X_A}$, т.е. $X_A\left(\frac{3}{2}; -\frac{7}{2}\right)$; $\frac{3}{2}\overrightarrow{A'Y'} = \overrightarrow{Y'Y_A}$, т.е. $Y_A\left(6; -\frac{7}{2}\right)$.

Для т. B в нем трапеция $X'Y'X_BY_B$, где аналогично $X_A$ и $Y_A$ получаем $X_B\left(-\frac{3}{2}; -\frac{5}{2}\right)$; $Y_A\left(3; -\frac{5}{2}\right)$

При этом $\overrightarrow{X_BY_B} = \frac{3}{2}\overrightarrow{X'Y'} = \overrightarrow{X_AY_A}$ Тогда вектор $\overrightarrow{X_ZY_Z}$ $\forall Z' \in A'B'$ равен вектору $\overrightarrow{X_AY_A}$, и $X_Z \in X_AX_B$, т.к. $Z \in AB$ ($\forall Z \in A'B'$ $X'Z = \frac{3}{2}X'X_Z$, т.е. $\overrightarrow{X_BY_A} \to \overrightarrow{B'A'}$ гомот. с коэф. $-\frac{3}{2}$) Тогда векторы $\overrightarrow{Y_ZY_Z}$ заметают площадь $X_BX_AY_AY_B$, и тогда трапеция $X'Y'Y_ZX_Z$ — площадь $X'Y'Y_AX_AX_B$.

Имеем: $S_{X'Y'X_AY_AX_B} = S_{X'Y'Y_AX_A} + S_{X'X_BX_A}$.

1) $S_{X'Y'X_AY_A}$ — площадь трапеции $= \frac{X'Y' + X_AY_A}{2} \cdot \rho(X'Y'; X_AY_A) = \frac{3+6}{2} \cdot 7 = \frac{63}{2}$.

2) $S_{X'X_BX_A} = S_{X_B'Y'X_AX_B} - S_{X_B'X'X_B} - S_{X'Y'X_A}$ ($X_B'$ — проекция $X_B$ на ось $X$) $= \frac{X_BX_B' + Y'X_A}{2} \cdot \rho(X_BX_B'; Y'X_A) - \frac{X'X_B' \cdot X_BX_B'}{2} - \frac{X'Y' \cdot Y'X_A}{2} = \frac{7+5}{2} \cdot 6 - \frac{3 \cdot 5}{2} - \frac{3 \cdot 7}{2} = 36 - \frac{15+21}{2} = 18$.

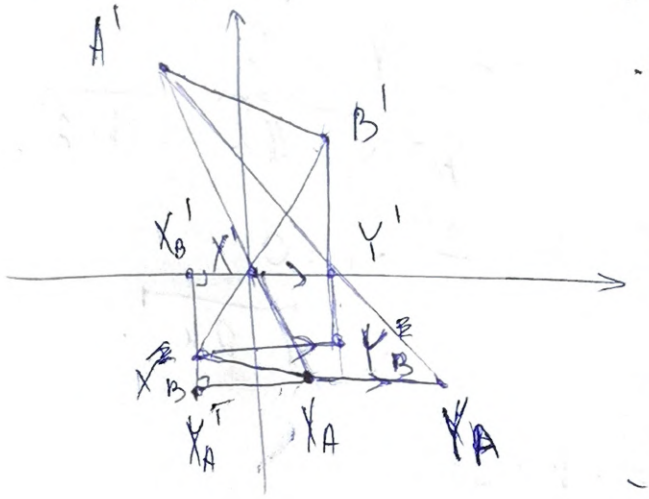
Тогда $S_{X'Y'X_AY_AX_B} = \frac{63}{2} + 18 = 31{,}5 + 18 = 49{,}5$

Ответ: 49,5

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

Чистовик

**№6** (рисунок)

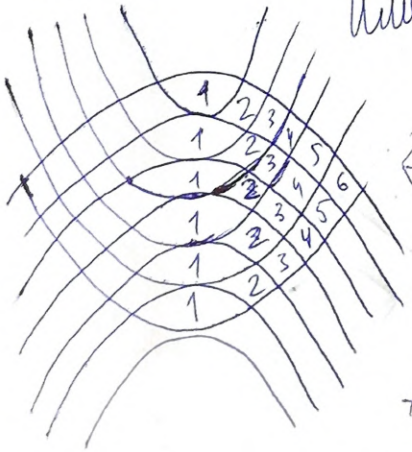


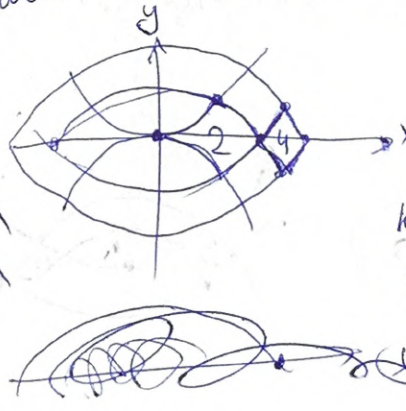

1) $S_{X'Y'Y_AX_A} = \frac{X'Y' + X_AY_A}{2} \cdot p(X'Y'; X_AY_A) = \frac{(3+4{,}5)}{2} \cdot \frac{7}{2} = \frac{15 \cdot 7}{8}$.

2) $S_{X'X_BX_A} = S_{X'X_B'X_A'X_A} - S_{X'X_B'X_B} - S_{X_BX_A'X_A}$ ($X_B'$ – проекция $X_B$ на ось $X$; $X_A'$ – проекция $X_A$ на $X_BX_B'$) $= \frac{(X'B_B' + X_B'X_B)}{2} \cdot p(X'X_B'; X_A'X_A) - \frac{X'X_B' \cdot X_B'X_B}{2} - \frac{X_BX_A' \cdot X_A'X_A}{2} = \frac{(\frac{3}{2}+3)}{2} \cdot \frac{7}{2} - \frac{\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2}}{2} - \frac{3 \cdot (\frac{7}{2} - \frac{5}{2})}{2} = \frac{9}{4} \cdot \frac{7}{2} - \frac{15}{8} - \frac{3}{2} = \frac{63}{8} - \frac{15}{8} - \frac{12}{8} = \frac{26}{8} = 3\frac{1}{4}$.

Ответ: $\frac{26}{8}$.

**№7** Предположим, бумага бесконечная. Тогда картинка будет выглядеть так: Семейства с одной цифрой получаются друг из друга параллельным переносом. Имеем такие типы клеток: 1, 2, 3, ...

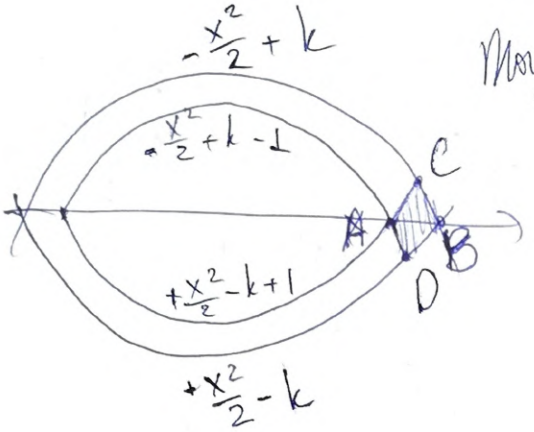



Введем оси согласно рисунку. Тогда посчитаем $S$ кусочка с номером $2k$:

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

№ 6 (продолж.) — Числовик




Тогда координаты A, B:

$A: -\frac{x^2}{2}+k-1=0$

$x_A = \sqrt{2k-2}$.

$B: \frac{x^2}{2}-k=0$

$x_B = \sqrt{2k}$.

$C: -\frac{x^2}{2}+k = \frac{x^2}{2}-k+1$

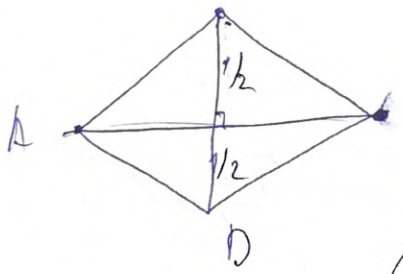
$x^2 = 2k-1$

$x_C = \sqrt{2k-1} \Rightarrow y_C = \frac{2k-1}{2}-k+1 = \frac{1}{2}$

$D: -\frac{x^2}{2}+k-1 = -\frac{x^2}{2}-k$

$x^2 = 2k-1$

$x_D = \sqrt{2k-1}$; $y_D = \frac{x^2}{2}-k = -1/2$.

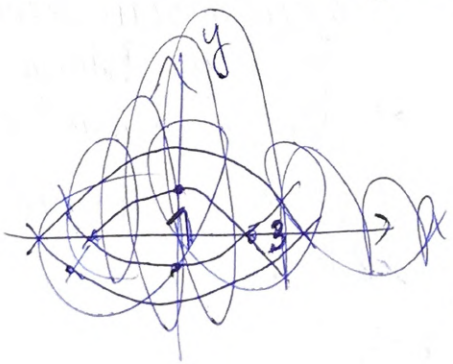


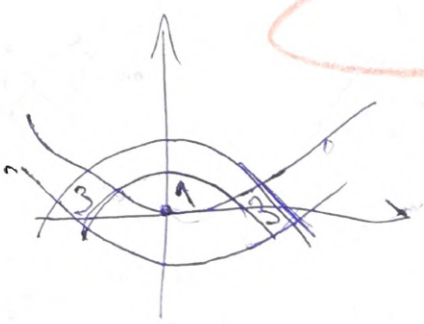

$S_{ABCD} = y_C \cdot (x_B - x_A) =$

$= 1/2 \cdot (\sqrt{2k} - \sqrt{2k-2}) =$

$= \frac{(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})}{\sqrt{2}}$

Теперь посчитаем S области вида $2k+1$.



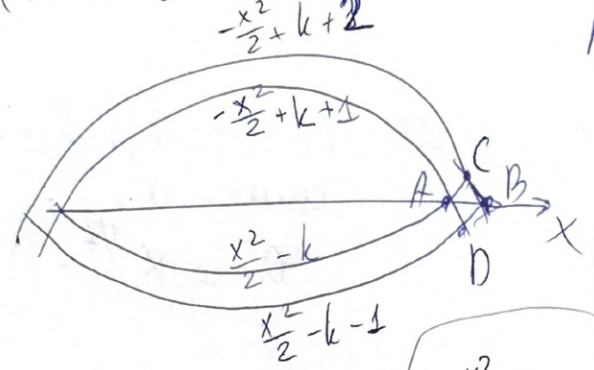

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

91-40-27-30
(124-13)

№6 (продолжение)

Числовик

Для $2k+3$ области:




$A: \frac{x^2}{2}-k = -\frac{x^2}{2}+k+1 \Rightarrow x^2 = 2k+1$

$x = \sqrt{2k+1}$.

$B: \frac{x^2}{2}-k-1 = -\frac{x^2}{2}+k+2 \Rightarrow x^2 = 2k+3$

$x_B = \sqrt{2k+3}$.

$C: -\frac{x^2}{2}+k+2 = \frac{x^2}{2}-k$

$x^2 = 2k+2$

$x_C = \sqrt{2k+2}$

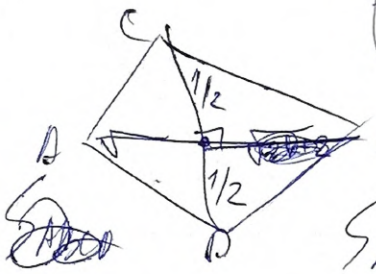
$y_C = \frac{2k+2}{2}-k = 1$

$D: -\frac{x^2}{2}+k+1 = \frac{x^2}{2}-k-1$

$x^2 = 2k+2$

$x_D = \sqrt{2k+2}$

$y_D = \frac{2k+2}{2}-k-1 = 0$




$S_{ABCD} = \frac{y_C}{2}\cdot(x_B - x_A) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2k+3}-\sqrt{2k+1}\right) =$

$= \frac{\sqrt{2k+3}-\sqrt{2k+1}}{\sqrt{2}}$ — для $2k+3$ области

Для 1ой площадь считаем отдельно

---

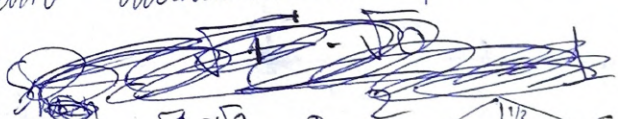
Теперь отметим, что при $x \geq 0$ $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ - убывающая, т.к.

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} < 0$, т.к.

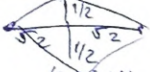
$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}\sqrt{x+1}} < 0$, т.к. $\sqrt{x} < \sqrt{x+1}$.

Значит $S_k = \sqrt{2k+3} - \sqrt{2k+1}$ – убывающая аналитически.

Значит $S$ сегмента минимальна при минимальном этого сегмента номере, т.е. либо $S_1$, либо $S_2$.



$S_1 = \sqrt{2}$; $S_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Для 1:




$S = 1/2 \cdot 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$.

Когда мы помостим решетку на плит. область, с некоторых сегментов только уменьш., при этом в центре так и останется сегмент №1.

Ответ: $\sqrt{2}$.

Подписывать лист-вкладыш запрещено! Писать на полях листа-вкладыша запрещено!

(8) $8x^2 \log_a x - \log_x a - 2x \le 0$. — Чистовик

$a, x > 0$; $a, x \neq 1$.

$\log_a x = t$; $t$ – любое, $t \neq 0$. По $t$ однозн. восстан. $a$.

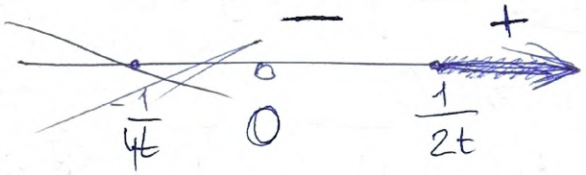
$a = x^{1/t}$.

$8x^2 t - \frac{1}{t} - 2x \le 0$

$\frac{8x^2 t^2 - 2xt - 1}{t} \le 0$

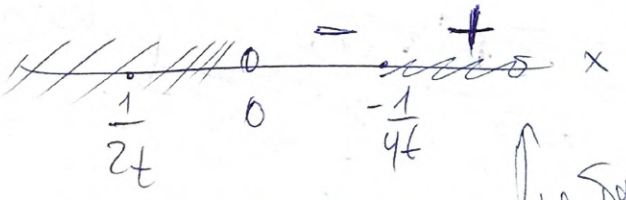
$\frac{(4xt + 1)(2xt - 1)}{t} \le 0$

1) $t > 0$ $(4xt + 1)(2xt - 1) \le 0$




Получаем $x \in (0; \frac{1}{2t}]$, но $x \neq 1 \Rightarrow$ получаем

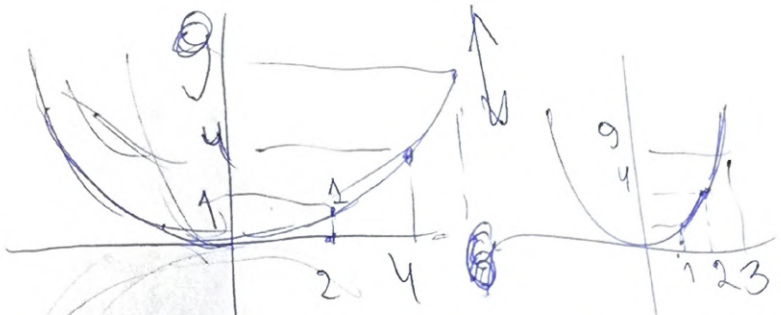
2) $t < 0$ $(4xt + 1)(2xt - 1) \ge 0$

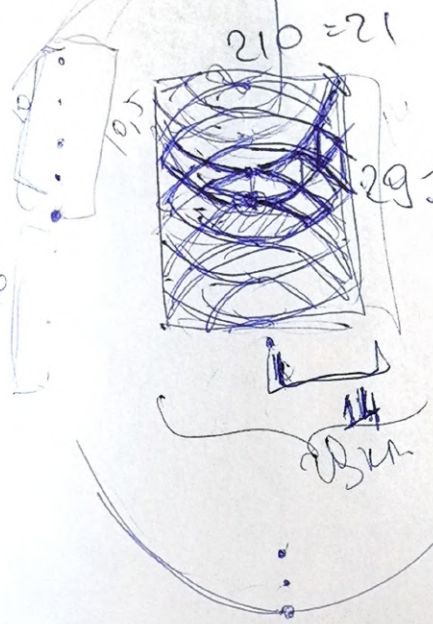



не будем явл. полуинтервалом.

Подписывать лист-вкладыш запрещено! Писать на полях листа-вкладыша запрещено!

Черновик




$x \leq 10{,}5$

$\frac{x^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C$

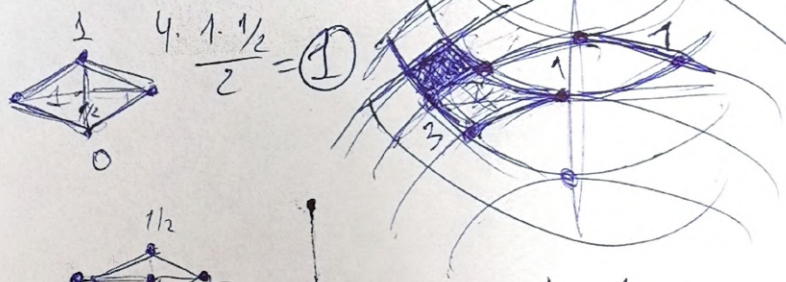
$\frac{x^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + 1$

$x^2 = 1$

$y = 1$

$100 \cdot x^2 = C$

3 варианта.

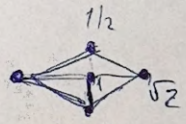



$\frac{x^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + 2 =$

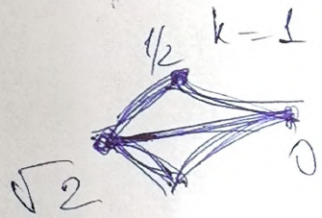
$\Rightarrow x^2 = \sqrt{2}$

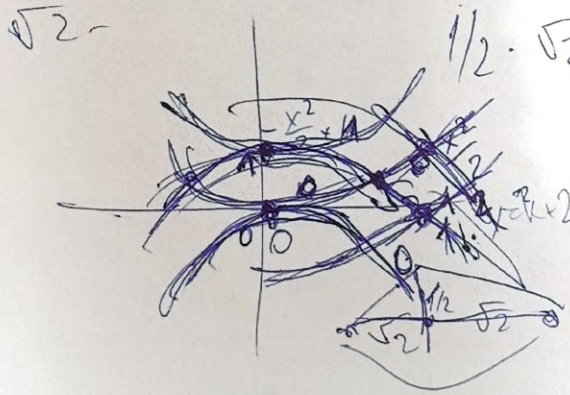
1: 


$\frac{4 \cdot 1 \cdot 1/2}{2} = 1$

2: 


$\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1.$






$1/2 \cdot \sqrt{2} \cdot 0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$-\frac{x^2}{2} + 1 = \frac{x^2}{2}$

$1/2 \cdot 2\sqrt{2} = \sqrt{2}.$

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!