0 913647 790008

91-36-47-79
(124.1)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 11 класс, 6

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Ломоносов"
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Литвинова Ивана Николаевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«29» 03 2026 года

Подпись участника

75 (семьдесят пять) пять

91-36-47-79 (24.1)

Чистовик

№ 1

$\sqrt{6(1-ctg^2x)} = 4\cos x$ ОДЗ: $\sin x \neq 0$

$\begin{cases} 6(1-ctg^2x) = 16\cos^2 x \\ 4\cos x \geq 0 \end{cases}$

$6\left(1-\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\right) = 16\cos^2 x$

$6\left(\frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x}\right) = 16\cos^2 x$

$\frac{6(1-2\cos^2 x)}{\sin^2 x} - 16\cos^2 x = 0$

$\frac{6(-\cos 2x) - 16\cos^2 x \sin^2 x}{\sin^2 x} = 0$

$\frac{-6\cos 2x - 4\cdot\sin^2 2x}{\sin^2 x} = 0 \Leftrightarrow \frac{4\sin^2 2x + 6\cos 2x}{\sin^2 x} = 0$

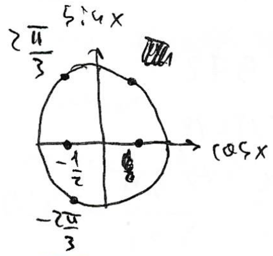
$\frac{4(1-\cos^2 2x) + 6\cos 2x}{\sin^2 x} = 0$

$\frac{-4\cos^2 2x + 6\cos 2x + 4}{\sin^2 x} = 0 \Leftrightarrow \frac{2\cos^2 2x - 3\cos 2x - 2}{\sin^2 x} = 0$

• $2\cos^2 2x - 3\cos 2x - 2 = 0$

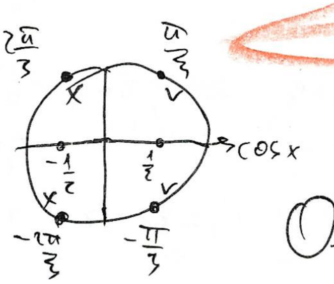
$D = 9 + 16 = 25$

1) $\cos 2x = \frac{3+5}{4} = 2$, невозможно 2) $\cos 2x = \frac{3-5}{4} = -\frac{1}{2}$



$2x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k\in\mathbb{Z}$

$\begin{cases} x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k, k\in\mathbb{Z} \\ \sin x \neq 0 \\ \cos x \geq 0 \end{cases}$



$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k\in\mathbb{Z}$

Ответ: $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k\in\mathbb{Z}$

Чистовик

№ 2

$S(x)$ – сумма цифр числа x

$\frac{x}{S(x)} = 9k,\ k \in \mathbb{N}$

$x = 9k \cdot S(x) \Rightarrow x \vdots 9 \Rightarrow S(x) \vdots 9 \Rightarrow x \vdots 81$

по критерию делимости на 9

Остаются варианты: $2\cdot81,\ 3\cdot81,\ 4\cdot81,\ 5\cdot81,\ 6\cdot81,\ 7\cdot81,\ 8\cdot81,\ 9\cdot81,\ 10\cdot81,\ 11\cdot81,\ 12\cdot81$.

$13\cdot81 > 1000$

1) $x=162$; $S(x)=9$; $\frac{x}{S(x)} = 18 \vdots 9$

2) $x=243$; $S(x)=9$; $\frac{x}{S(x)} = 9\cdot3 \vdots 9$

3) $x=324$; $S(x)=9$; $\frac{x}{S(x)} = 4\cdot9 \vdots 9$

4) $x=405$; $S(x)=9$; $\frac{x}{S(x)} = 5\cdot9 \vdots 9$

$$\begin{array}{r} 81 \\ \times\ 11 \\ \hline 81 \\ 81 \\ \hline 891 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 81 \\ \times\ 12 \\ \hline 162 \\ 81 \\ \hline 972 \end{array}$$

5) 486; $S(x)=18$; $\frac{x}{S(x)} = \frac{\cancel{6}^{3}\cdot\cancel{81}^{9}}{\cancel{18}\cdot\cancel{81}} = 27 \vdots 9$

6) 567; $S(x)=18$; $\frac{x}{S(x)} = \frac{7\cdot9\cdot9}{2\cdot9} \notin \mathbb{N}$ не подходит

7) 648; $S(x)=18$; $\frac{x}{S(x)} = \frac{\cancel{8}^{4}\cdot9\cdot9}{\cancel{9}\cdot2} = 36 \vdots 9$

8) 729; $S(x)=18$; $\frac{x}{S(x)} = \frac{9\cdot9\cdot9}{9\cdot2} \notin \mathbb{N}$ не подходит

9) 810; $S(x)=9$; $\frac{x}{S(x)} = \frac{9\cdot9\cdot10}{9} = 90 \vdots 9$

10) 891; $S(x)=18$; $\frac{x}{S(x)} = \frac{11\cdot9\cdot9}{9\cdot2} \notin \mathbb{N}$ не подходит

11) 972; $S(x)=18$; $\frac{x}{S(x)} = \frac{\cancel{12}^{6}\cdot9\cdot9}{\cancel{9}\cdot2} = 54 \vdots 9$

$$\begin{array}{r} 162 \\ +\ 648 \\ \hline 810 \\ +\ 972 \\ \hline 1782 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 81 \\ \times\ 22 \\ \hline 162 \\ 162 \\ \hline 1782 \end{array}$$

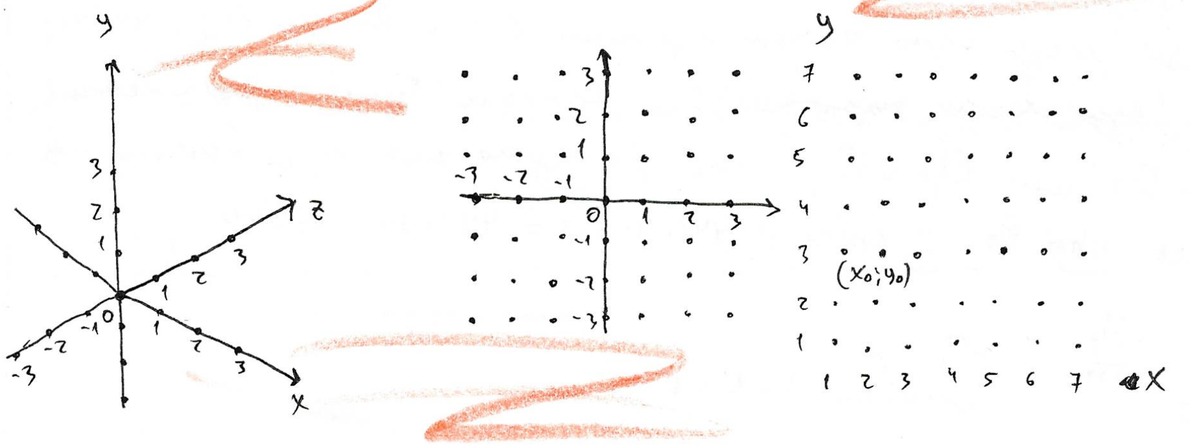
$A = \{\underbrace{162}_{1};\ 243;\ 324;\ 405;\ 486;\ \underbrace{648}_{6};\ 810;\ \underbrace{972}_{8}\}$

$162+648+972 = 81(2+8+12) = 81\cdot22 = 1782$

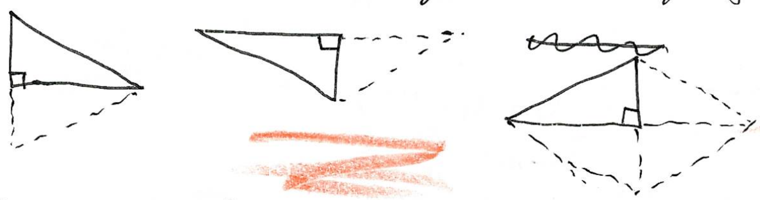
Ответ: 1782

Чистовик

№3



Пусть один катет параллелен оси Ox, а второй оси Oy. Пусть без ограничения общности треугольник выглядит вот так: . Тогда можно будет сделать симметрию относительно катетов и получить остальные ~~...~~ варианты треугольников: Таким образом



общее кол-во треугольников будет в 4 раза больше, чем треугольников вида . Пусть $z=0$, тогда получаем 49 точек, которые могут быть вершинами. Переобозначим ~~...~~ координаты этих точек с 1 до 7. (Как на правой картинке). Заметим, что ~~...~~ вершина с прямым углом в треугольнике будет иметь координаты от $1\le x\le 6$ и $2\le y\le 7$, так как длина катетов хотя бы 1. Пусть координаты вершины $(x_0;y_0)$. Тогда есть ~~...~~ y_0-1 вариантов для 1 катета и $7-x_0$ для 2 катета. Тогда всего будет $(y_0-1)\cdot(7-x_0)$ вариантов треугольников. Просуммируем это для $1\le x_0\le 6$ и $2\le y_0\le 7$:

для $x_0=1$: $6\cdot(1+2+3+4+5+6)=6\cdot 21$

для $x_0=2$: $5(1+2+3+4+5+6)=5\cdot 21$

для $x_0=3$: $4(1+2+3+4+5+6)=4\cdot 21$

для $x_0=4$: $3(1+2+\ldots+6)=3\cdot 21$

для $x_0=5$: $2(1+\ldots+6)=2\cdot 21$

для $x_0=6$ $(1+\ldots+6)=21$

$21(1+2+\ldots+6)=21\cdot 21=$

$=441$

черновик

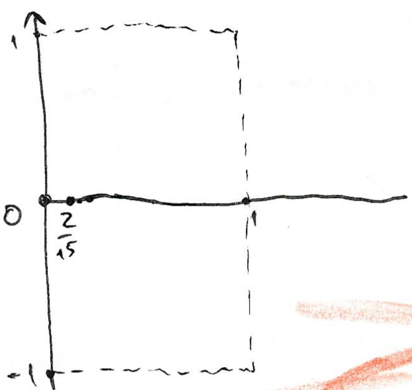
Тогда для всех вариантов △ будет 441·4 способов при $z=0$
При $z = 1;7;3;-1;-7;-3$ кол-во способов такое же ⇒ всего
способов когда один катет паралелен Ox, а второй Oy: $441\cdot4\cdot7$.
~~Если один катет паралел~~ Если катеты будут параллельны
Ox и Oz или Oz и Oy, то рассуждения аналогичны ⇒
Общее кол-во △ равно: $441\cdot4\cdot7\cdot3 = 441\cdot84 = 37044$

$$\begin{array}{r} \times\, 441 \\ 84 \\ \hline 1764 \\ 3528 \\ \hline 37044 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\, 176 \\ 2 \\ \hline 352 \end{array}$$

Ответ: 37044

$$\begin{array}{r} \times\, 1764 \\ 21 \\ \hline 1764 \\ 3528 \\ \hline 37044 \end{array}$$

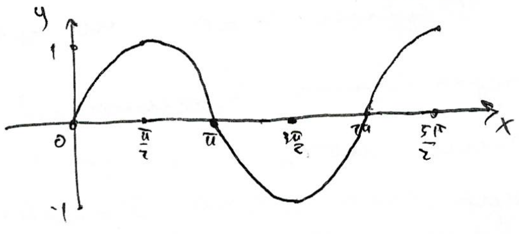
№4



1) $y = \sin 11\pi x$
$T_{\sin 11\pi x} = \frac{2\pi}{11\pi} = \frac{2}{11}$

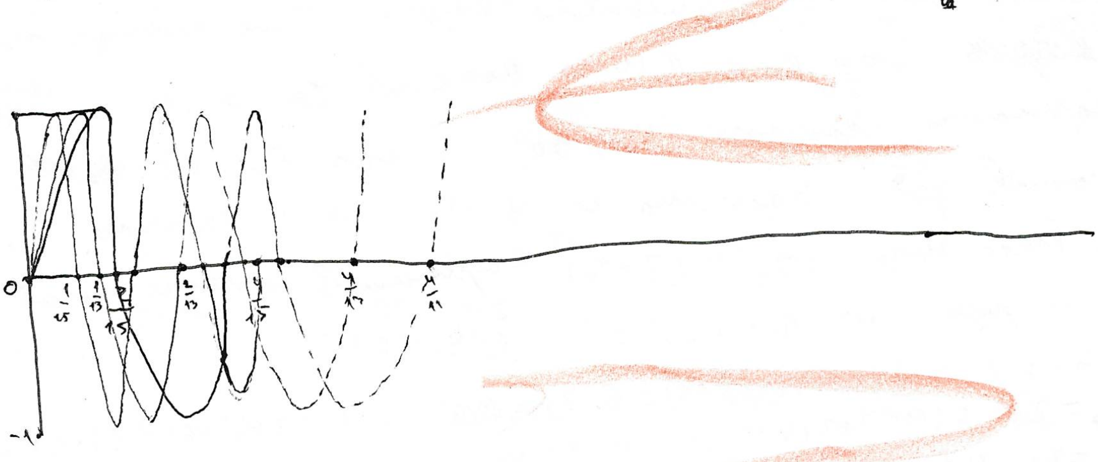
2) $y = \sin 13\pi x$
$T_{\sin 13\pi x} = \frac{2\pi}{13\pi} = \frac{2}{13}$

3) $y = \sin 15\pi x$
$T_{\sin 15\pi x} = \frac{2\pi}{15\pi} = \frac{2}{15}$



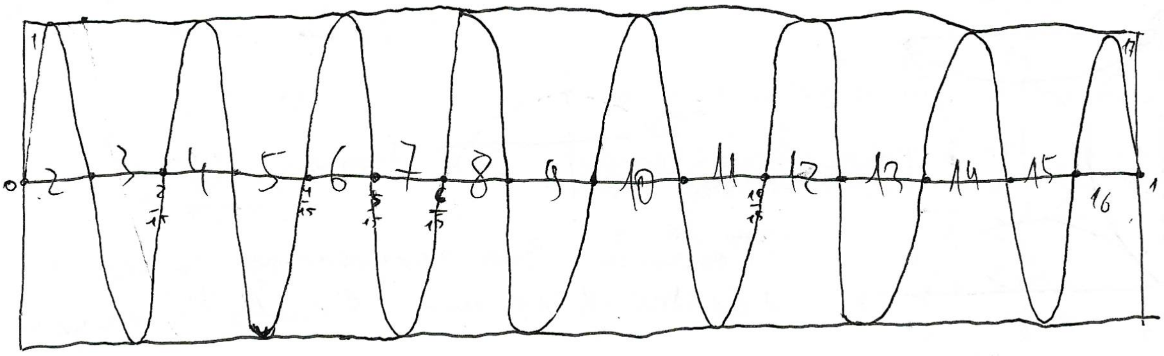
$T_{\sin x} = 2\pi$

$\frac{3}{13} \vee \frac{4}{15}$



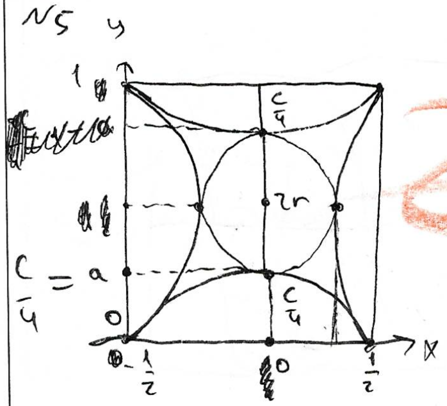
91-36-47-79
(124.1)

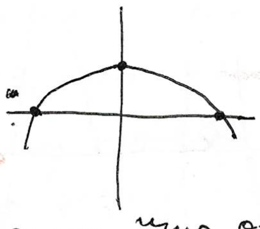
Чистовик



№5

Чистовик





Понятно, что окружность касается парабол в вершине, в силу симметрии

Рассмотрим нижнюю параболу, она получается из параболы $y = -Cx^2$ сдвигом на a вверх, т.е $y = -Cx^2 + a$

$y\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow -C \cdot \frac{1}{4} + a = 0 \Rightarrow -C + 4a = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{C}{4} = a \Rightarrow y = -Cx^2 + \frac{C}{4}$

(Если считать, что нижняя сторона квадрата ось Ox)

~~Рассмотрим верхнюю параболу, ее уравнение аналогично $y = Cx^2 + \frac{C}{4}$, т.к. оно получается из $y = Cx^2$ сдвигом на $\frac{1}{4}C$ вверх~~

Так как окружность касается парабол в вершине в силу симметрии, то вершины парабол нижней и верхней лежат на одной прямой.

Рассмотрим верхнюю параболу, она получается сдвигом $y = Cx^2$ вниз на $\frac{C}{4}$, если считать, что верхняя сторона квадрата ось Ox.

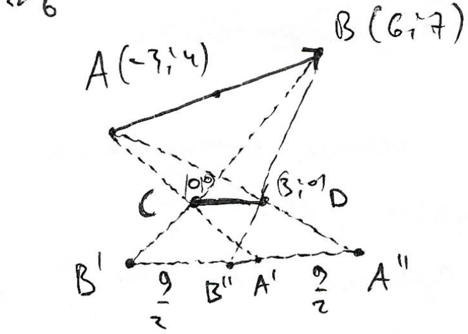
Тогда $\frac{C}{4} + 2r + \frac{C}{4} = 1 \Rightarrow 2r + \frac{C}{2} = 1 \Rightarrow 2r = 1 - \frac{C}{2} = \frac{2-C}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow r = \frac{2-C}{4}$

Ответ: $\frac{2-C}{4}$

Чистовик

№6



Любая точка $X \in [AB]$ попадет ~~на~~ в B'CDB'' или A'CDA'' т.к A и B - крайние точки

$\triangle ACD \sim \triangle AA'A''$ по 2 углам, т.к $CD \parallel A'A''$

$\frac{CD}{A'A''} = \frac{AC}{AA'}$, $\frac{AC}{AA'} = \frac{h_{св} - h_з}{h_{св}}$, т.к при проектировании отношения сохраняются, $h_{св} = 6$ м - высота светильника, $h_з = 2$ - высота забора

$\frac{CD}{A'A''} = \frac{AC}{AA'} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \Rightarrow A'A'' = \frac{3}{2} CD = \frac{9}{2}$

$\triangle CBD \sim \triangle B'BB''$ по 2 углам, т.к $CD \parallel B'B''$

$\frac{CD}{B'B''} = \frac{BD}{BB''} = \frac{h_{св} - h_з}{h_{св}} = \frac{2}{3}$ аналогично

$B'B'' = \frac{3}{2} CD = \frac{9}{2}$

~~Проекция BA на~~ Найдем координаты точек B'' и A' из подобия: $\frac{BD}{BB''} = \frac{2}{3} \Rightarrow$ длины проекций на Ox относятся также $\Rightarrow$ длина проекции на Ox BB'' равна $\frac{3}{2}$ и умножим на длину проекции BD, равную 3 $\Rightarrow$ она равна $\frac{9}{2} \Rightarrow$ абсцисса точки B'' равна $6 - \frac{9}{2} = \frac{3}{2}$.

Аналогично $\frac{AC}{AA'} = \frac{2}{3} \Rightarrow$ длина проекции AA' на Ox равна $\frac{9}{2}$, т.к длина проекции AC равна 3 $\Rightarrow$ абсцисса точки A' равна $-3 + \frac{9}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow B'' \equiv A'$

чистовик

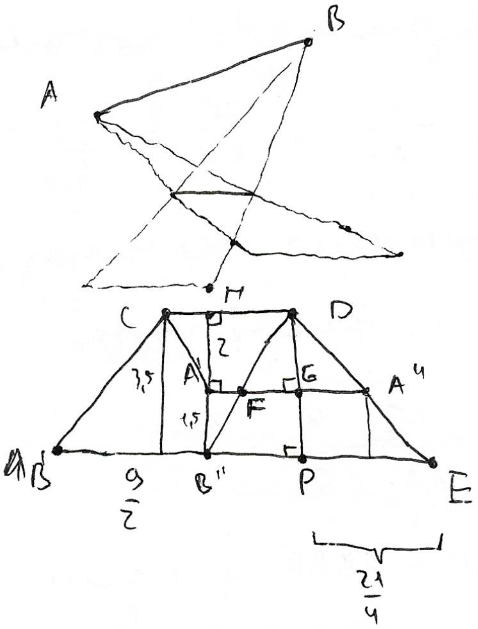
~~Тогда заметим, что площадь A B'CDA'' — трапеция. Найдем её высоту из подобия.~~

~~проекция~~ Спроецируем AC и AA' на Oy, тогда отношение проекций ~~сохранится~~ сохранится и будет равно $\frac{2}{3}$.

длина проекции AC равна 4 $\Rightarrow$ длина проекции AA' равна $\frac{4\cdot 3}{2}=6 \Rightarrow$

$\rho(A', CD)=6-4=2$

Аналогично $\rho(B', CD)=3{,}5$



Тогда искомая площадь будет равна разности площадей трапеций B'CDE и B''FA''E

$B''(1{,}5; -3{,}5)$

$B''H \perp CD$

$H(1{,}5; 0) \Rightarrow HD = 1{,}5$

$\triangle B''A'F \sim \triangle B''HD$

$$\frac{A'F}{HD}=\frac{A'B''}{B''H}=\frac{1{,}5}{3{,}5}=\frac{3}{7} \Rightarrow A'F=\frac{3}{7}\cdot\frac{3}{2}=\frac{9}{14} \Rightarrow FA''=\frac{9}{2}-\frac{9}{14}=$$

$$=\frac{63-9}{14}=\frac{54}{14}=\frac{27}{7}$$

$DP \perp B'E$, $A'A'' \cap DP = G$, $G(3; -2)$, $P(3; -3{,}5)$

$A''(6; -2) \Rightarrow GA'' = 3$

$\triangle DPE \sim \triangle DGA''$

$$\frac{GA''}{PE}=\frac{DG}{DP}=\frac{2}{3{,}5}=\frac{4}{7} \Rightarrow \cancel{PE=\frac{4}{7}\cdot 3} \quad PE=\frac{7}{4}\cdot 3=\frac{21}{4}$$

$$B''P=1{,}5 \Rightarrow B'E=\frac{9}{2}+\frac{3}{2}+\frac{21}{4}=\frac{12}{2}+\frac{21}{4}=\frac{24}{4}+\frac{21}{4}=\frac{45}{4}$$

$$B''E=\frac{45}{4}-\frac{18}{4}=\frac{27}{4}$$

$$S_{искомое}=S_{B'CDE}-S_{B''FA''E}=\frac{3{,}5}{2}\cdot\left(3+\frac{45}{4}\right)-\frac{1{,}5}{2}\cdot\left(\frac{27}{7}+\frac{27}{4}\right)=$$

$= \frac{7}{4} \cdot \left(\frac{57}{4}\right) - \frac{3}{4}\left(\frac{27 \cdot 11}{28}\right) =$ Чистовик $\frac{7 \cdot 57 \cdot 7 - 3 \cdot 27 \cdot 11}{28 \cdot 4} = \frac{1902}{28 \cdot 4} =$

$27\left(\frac{1}{7} + \frac{1}{4}\right) = $

$= 27 \cdot \frac{11}{28}$

$= \frac{951}{28 \cdot 2} = \frac{951}{56}$

$\times \begin{array}{r} 57 \\ 49 \\ \hline 513 \\ 228 \\ \hline 2793 \end{array}$

Ответ: $\frac{951}{56}$

№ 8

$\times \begin{array}{r} 27 \\ 33 \\ \hline 81 \\ 81 \\ \hline 891 \end{array}$

$3x^2 \log_a x - \log_x a - 2x \le 0$

ОДЗ: $\begin{cases} x > 0 \\ a > 0 \\ a \ne 1 \\ x \ne 1 \end{cases}$

$3x^2 \log_a x - \frac{1}{\log_a x} - 2x \le 0$

$- \begin{array}{r} 2793 \\ 891 \\ \hline 1902 \end{array}$

$\frac{3x^2(\log_a x)^2 - 1 - 2x \cdot \log_a x}{\log_a x} \le 0$

7

91

98 7

700

751

$\frac{3(x\log_a x)^2 - 2(x \log_a x) - 1}{\log_a x} \le 0$

$\frac{(x\log_a x - 1)(3x\log_a x + 1)}{\log_a x} \le 0$

$x\log_a x = 1$

$0 < x < 1$

1) $0 < a < 1$

если $0 < x < 1 \Rightarrow \log_a x > 0 \Rightarrow 3x\log_a x + 1 > 0$

$x \log_a x \le 1$

$x^x \ge a$

$\log_a x \le 1$

$x \in [a; 1)$

если $x > 1 \Rightarrow \log_a x < 0 \Rightarrow x\log_a x - 1 < 0$

$3x\log_a x + 1 \le 0$

$x\log_a x \le -\frac{1}{3}$ | $x > 1$

$\log_a x \le -\frac{1}{3} \Rightarrow x \ge a^{-\frac{1}{3}}$

1) $0 < a < 1$

черновик

$a^{-1} > 1 \Rightarrow a^{-\frac{1}{3}} > 1$

$x \in [a^{-\frac{1}{3}}; +\infty)$ – не подходит

г) $a > 1$

если $x > 1 \Rightarrow \log_a x > 0 \Rightarrow 3x\log_a x + 1 > 0$

$x \log_a x \le 1 \quad |: x > 1$

$\log_a x \le 1 \Rightarrow x \le a$

$x \in (1; a]$

если $0 < x < 1 \Rightarrow \log_a x < 0 \Rightarrow x \log_a x - 1 < 0$

$x \log_a x \le -\frac{1}{3} \quad |: x > 0$

$\log_a x \le -\frac{1}{3} \qquad x \le a^{-\frac{1}{3}}$

$a > 1$

$a^{\frac{1}{3}} > 1$

$0 < a^{-\frac{1}{3}} < 1$

$x \in (0; a^{-\frac{1}{3}}]$

при $0 < a < 1$: $x \in [a; 1) \cup [a^{-\frac{1}{3}}; +\infty)$

$\log_a x \le \frac{1}{x}$ –

$x \in (0; 1)$

если $x > 1$, то $\log_a x < 0$

$\log_a x \le -\frac{1}{3x}$ – полуинтервал

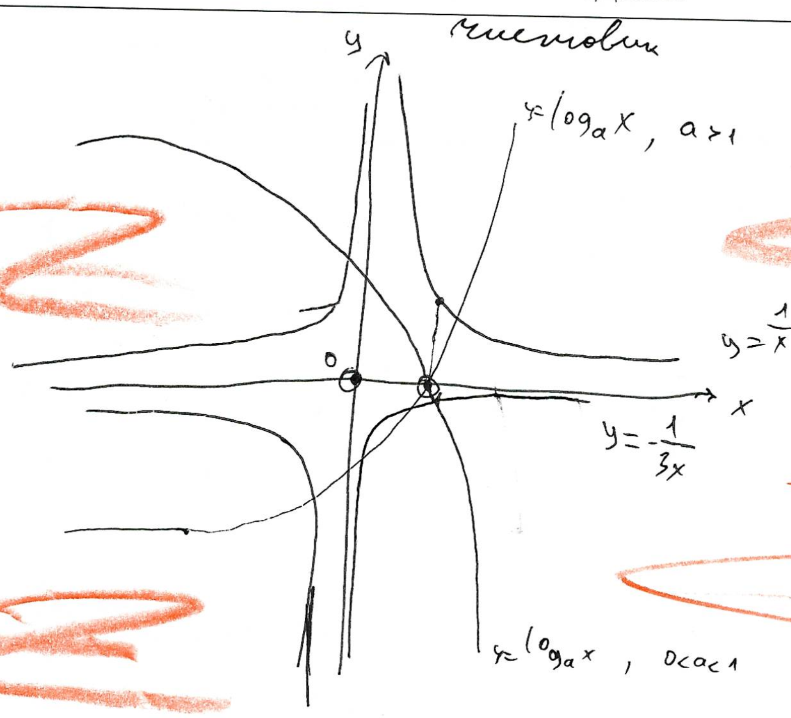
г) $a > 1$

если $0 < x < 1 \Rightarrow \log_a x < 0 \Rightarrow x \log_a x - 1 < 0$

$x \log_a x \le -\frac{1}{3}$

$\log_a x \le -\frac{1}{3x}$

черновик



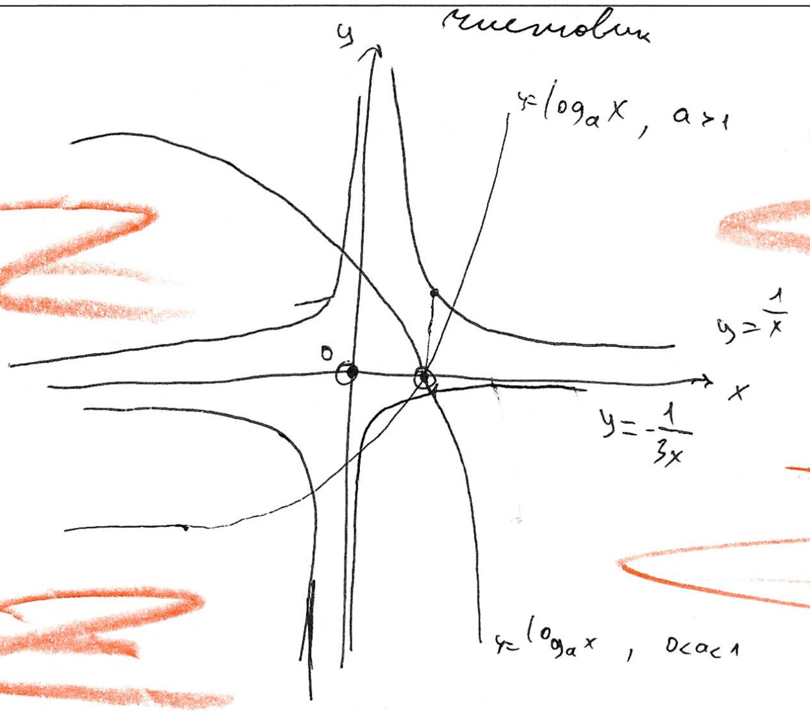
если $x > 1$, $\Rightarrow \log_a x > 0 \Rightarrow 3x \log_a x \leq 1 > 0$

$x \log_a x \leq 1$

$\log_a x \leq \frac{1}{x}$ - полуинтервал $\Rightarrow$

множество решений $\log_a x \leq -\frac{1}{3x}$ должна быть точка $\Rightarrow$ графики ~~Отк~~ касаются

чистовик



если $x > 1$, $\Rightarrow \log_a x > 0 \Rightarrow 3x\log_a x + 1 > 0$

$x \log_a x \leq 1$

$\log_a x \in \frac{1}{x}$ - полуинтервал $\Rightarrow$

множество решений $\log_a x \leq -\frac{1}{3x}$ должна быть точка $\Rightarrow$
графики ~~одна~~ касаются