0 926278 150004

92-62-78-15
(123.23)

1755

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 10 Класс

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Ловкиной Анастасии Дмитриевны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

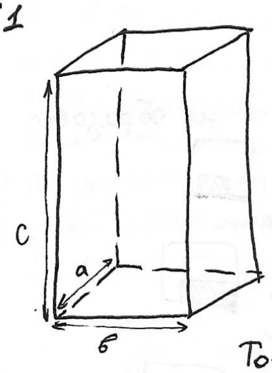
«29» марта 2026 года

Подпись участника

 70 (Семьдесят)

№1

ЧИСТОВИК.



Пусть a, в, c – [redacted] длины различных рёбер прямой прямоугольной призмы.

$a, в, c \in \mathbb{Z}$.

$2026 = abc + 2ab + 2bc + 2ac + 4a + 4b + 4c$

abc [redacted] $= 2026 - 2ab - 2bc - 2ac - 4a - 4b - 4c$.

Тогда $abc \downarrow \Leftrightarrow ab + bc + ac + 2a + 2b + 2c \uparrow$

можно

Тогда най[redacted] наибольшее значение выражения

[redacted]. $ab + bc + ac + a + b + c$, [redacted]

[redacted]

Объём минимальный, когда пирамида выглядит, как можно больше похожей на „башню", т.е. $a = b = 1$; c – ?

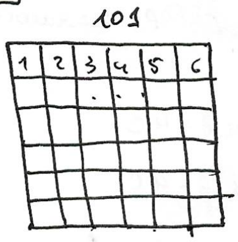
$\underset{\text{объём}}{c} + \underbrace{2+4c}_{S_{пов}} + \underbrace{8+4c}_{\text{длина рёбер}} = 10 + 9c = 2026$

$9c = 2016 \quad c = 229.$

Ответ: 225

ЧИСТОВИК

№2



① Квадрат не распался на 2 части и не образовал дырку, если:

1. Вырез вида A: прилегает ровно к 1 границе

2. Вырез вида B прилегает ровно к 2 границам

3. Вырез вида C прилегает ровно к 3 границам.

все эти виды вырезов не пересекаются! —

② Так как клетки квадрата пронумерованы, то вырезы одинаковых пр-ков от разных сторон считаются разными.

③ Кол-во вырезов вида A: задаётся 2 точками на стороне, а высотой и стороной

$A = \overset{4\text{ стороны}}{4} \cdot \underbrace{C^2_{100}}_{\text{кол-во способов взять одну сторону квадрата (99 кл}} \cdot \overbrace{100}^{\text{вариантов высоты прямоугольника}} = 4 \cdot \frac{100!}{98! \cdot 2!} \cdot 100 = 2 \cdot 99 \cdot 100 \cdot 101$

вида B: задаётся углом и точками на сторонах - длиной и высотой

$B = 4 \cdot \underbrace{100 \cdot 100}$ — всего 102 точки, крайние нельзя выбирать.

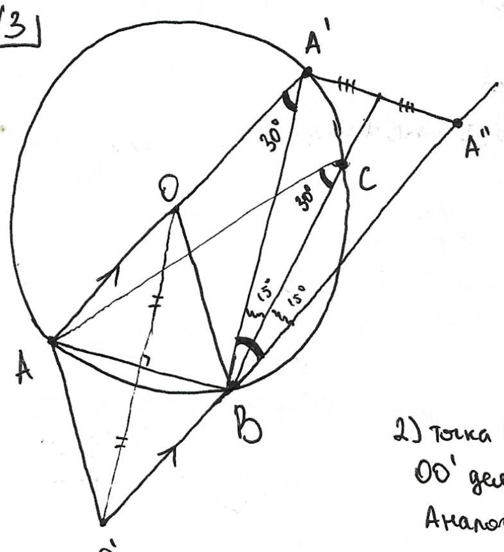
вида C: $C = 4 \cdot \underbrace{100}_{\text{не 101, т.к. нельзя вырезать весь квадрат}}$

задаётся стороной и высотой (т.к. ширина - фикс)

④ Кол-во вариантов $= A + B + C = 2 \cdot 99 \cdot 100 \cdot 101 + 4 \cdot 100 \cdot 100 + 4 \cdot 100 =$
$= 2 \cdot 100\,(99 \cdot 101 + 2 \cdot 100 + 2) = 200\,(9999 + 200 + 2) = 200 \cdot 10201 = 2040200$

Ответ: 2040200.

№3



Дано: $\triangle ABC$, $\angle C = 30^\circ$; Окр($\triangle ABC$) $\equiv$ Окр.(O, R).
O' - симметрична O отн. AB
A'' - симметрична A' = Окр($\triangle ABC$) $\cap$ AO отн. BC
$B \in O'A''$
Найти: $\angle B$.

Решение: ~~1) т.к. $\angle C = 30^\circ$, то $\angle AOB = 60^\circ$ (как центр., опир. на ту же хорду), $AO = OB = R$ ... $\triangle AOB$ - равност. по пр-ку~~ => $AB = R$.

2) точка O' симметрична O отн. AB, значит, что $OO' \perp AB$, и OO' делится отрезком AB пополам.
Аналогично OO', $A'A'' \perp BC$ и делится прямой BC пополам, тогда в $\triangle BA'A''$ BC - высота и медиана, значит, $\triangle A'BA''$ - равнобедр по пр-ку, значит, BC ещё и бис-са по св-ву, т.е. $\angle A'BC = \angle CBA''$.

3) По свойству отрезка, проходящего через центр окружности и перпендикулярного хорде: OO' пересек. AB в середине, значит, $AOBO'$ диагонали точкой пересечения делятся пополам, значит, $AOBO'$ - пар-мм по пр-ку, значит, из опр. пар-мма: $AO \parallel O'B$, $O'B \equiv O'$-B-A'' => $BA'' \parallel OA$!

ЧИСТОВИК

4) По св-ву вписанных углов, опир. на одну хорду: $\angle AA'B = \angle ACB = 30°$.
т.к. $AA' \parallel BA''$, то $\angle AA'B = \angle A'BA''$, как накрест лежащие при $BA'' \parallel AA'$ и секущей $A'B$.
Тогда $\angle A'BA'' = 30°$.
Вспомним, что BC - бис-са $\angle A'BA''$, тогда $\angle A'BC = \frac{1}{2}\angle A'BA'' = \frac{30°}{2} = 15°$.

5) По замечательному св-ву окр-ти: $\angle ABA' = 90°$, т.к. AA' - диаметр.

6) $\angle ABC = \angle ABA' + \angle A'BC = 90° + 15° = 105°$.
Ответ: $105°$.

№4 $\quad \dfrac{a^{2x} - 3a^{x+1} + 2a^2}{\log_{a^2} a} \geq 0$ $\quad$ если $a = 1$, то вырат. не имеет смысл
$a > 0$, т.к. log-ение.

$(a^{2x} - 3a^{x+1} + 2a^2)\log_a 2 \geq 0$

$a>0$
$a \neq 1$. – условия сохраняются.

1. $0 < a < 1$ $\Rightarrow$ $\log_a 2 < 0$

$a^{2x} - 3a^{x+1} + 2a^2 \leq 0 \Rightarrow (a^x - 2a)(a^x - a) < 0$

$(a^{x-1} - 2)(a^x - 1) < 0$ $\quad$ т.к. $a \neq 0$, $a > 0$, то можно сокращать.

$1 \leq a^{x-1} \leq 2$

$a^{\log_a 1} \leq a^{x-1} \leq a^{\log_a 2}$ $\quad (*)$

2. $a > 1$ $\Rightarrow$ $\log_a 2 > 0$

$a^{2x} - 3a^{x+1} + 2a \geq 0 \Rightarrow (a^x - 2a)(a^x - a) \geq 0 \quad | \cdot \frac{1}{a}$ т.к. $a>0$, то так можно

$(a^{x-1} - 2)(a^{x-1} - 1) \geq 0$

$a^{x-1} < 1$
$a^{x-1} < a^0 = 1$
$x - 1 < 0$
$x < 1$ – не отрезок длиной 2026

или

$a^{x-1} > 2$
$a^{x-1} > a^{\log_a 2}$
$x - 1 > \log_a 2$
$x > 1 + \log_a 2$ – не отрезок длиной 2026.

$(*)$ ~~т.к. $0<a<1$, то~~

$\begin{cases} \dfrac{a^0}{a^{x-1}} \leq 1 \\ \dfrac{a^{x-1}}{a^{\log_a 2}} \leq 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a^{0-x+1} \leq a^0 \\ a^{x-1-\log_a 2} \leq a^0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 1 - x \geq 0 \\ x - 1 - \log_a 2 \geq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq \log_a 2 + 1 \end{cases} \Longleftrightarrow$

$\log_a 2 \leq x - 1 \leq 0$

отрезок длиной 2026, если $\log_a 2 = -2026$

$a^{-2026} = 2$

$\frac{1}{a^{2026}} = 2$

$a^{2026} = \frac{1}{2}$

$a = \sqrt[2026]{\frac{1}{2}}$. (т.к. $a > 0$ из ОДЗ).

Ответ: $\sqrt[2026]{\frac{1}{2}}$.

№5

ЧИСТОВИК

tgx, tgy, tgz. $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $0 < y < \frac{\pi}{2}$, $0 < z < \frac{\pi}{2}$

$\Downarrow$ $0 < tgx$, $0 < tgy$, $0 < tgz$.

По нер-ву Коши для 3: $\sqrt[3]{tgx \cdot tgy \cdot tgz} \leq \frac{tgx + tgy + tgz}{3}$,

причём р-во достигается $\Leftrightarrow tgx = tgy = tg \Leftrightarrow x = y = z$. (т.к. $0 < x, y, z, \frac{\pi}{2}$).

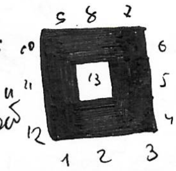
$tgx \cdot tgy \cdot tgz \leq \left(\frac{tgx + tgy + tgz}{3}\right)^3$. $\quad \Downarrow \quad x = y = z = \frac{\pi}{6}$.

Если $x = y = z = \frac{\pi}{6}$, то $tgx \cdot tgy \cdot tgz \leq \left(\frac{tgx + tgy + tgz}{3}\right)^3 = \left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}}{3}\right)^3 =$

$= \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 = \frac{3\sqrt{3}}{27} = \frac{\sqrt{3}}{9}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{9}$ (р-во достигается, когда $x = y = z = \frac{\pi}{6}$.

№8

Сейчас у робота закрашено:  ЭТО 8 клеток.

Из этих 8 клеток он „восьмёркой" мог закрасить от 1 до 7, а тогда останется закрасить от 1 до 7.

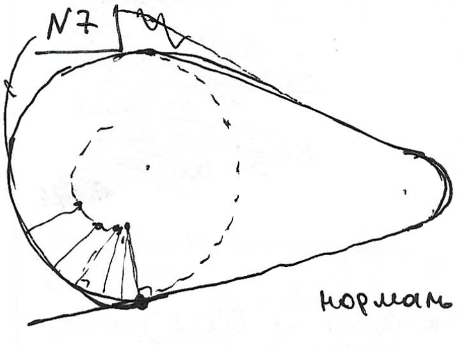
Условие можно понять, что сейчас 8 его „выстрел", а можно, что не понятно какой. Если восьмой, что $P(\text{сценар}) = \frac{\text{~~Р~~ нужных}}{\text{всего}} = \frac{1}{13}$. 1 место

Если не известно какой выстрел, то [illegible] 13 мест

закрасится какая-то соседняя клетка и фигура уже не будет чёрным квадратом.

Ответ: $\frac{1}{13}$.

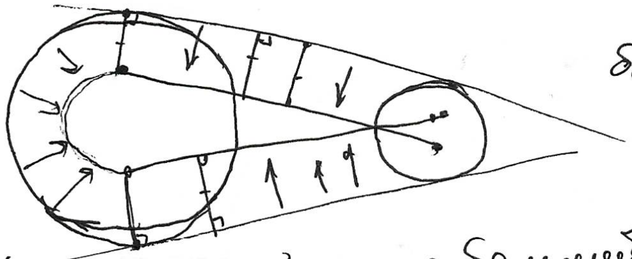
№7



(1) т.к. газонокосилка шла по касательной к обоим окружностям, то в моменте перехода от окр. к прямой нет излома, ~~[illegible]~~ а это значит, что ~~[illegible]~~ в точке касания нормали для прямой и окружности одинаковые, а,

ЧИСТОВИК

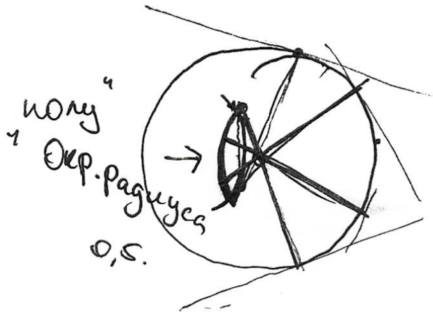
Значит, и трава упала в одну точку. А тогда получается, что трава тоже падала бу цилиндров.

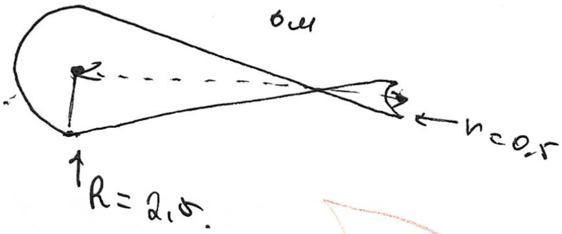


биективность переход касательных

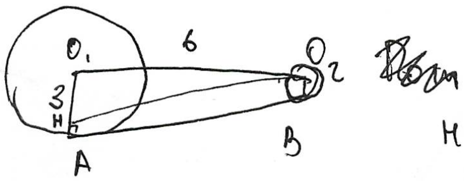
и биективность переход большей окружности. Но что делать с меньшей окружностью?

Получается, как выглядит маршрут травы





Найдём наклон касательной:

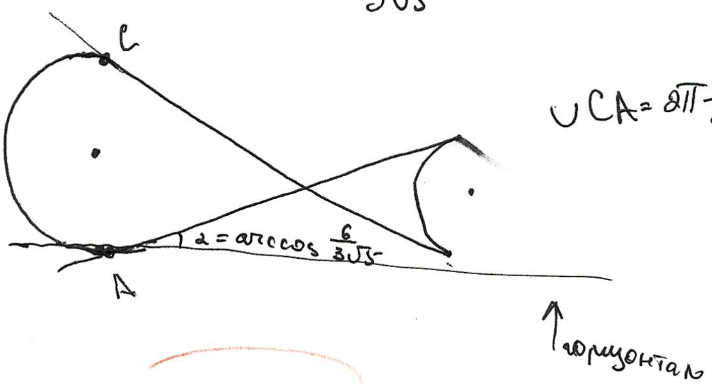


$H \in [O_1A]$, $HO_2 \parallel AB \Rightarrow$

$\Rightarrow HO_2BA$ - пар-мм $\Rightarrow HO_2 = AB$.

$HO_2 = \sqrt{3^2+6^2} = 3\sqrt{1+2^2} = 3\sqrt{5}$ (т. Пиф.) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle O_2HO_1 = \arccos\frac{6}{3\sqrt5}$.



$\cup CA = 2\pi - 2\arccos\frac{6}{3\sqrt5} \Rightarrow$

$\Rightarrow CA =$

$8+1+1+a+4a+4a=9a+2=2026$

$2016 \mid 9$

$-18 \quad 224$

21

-18

36

$a^2+b^2+c^2 \geqslant$

$ab+bc+ac \geqslant +2a+2b+2c$

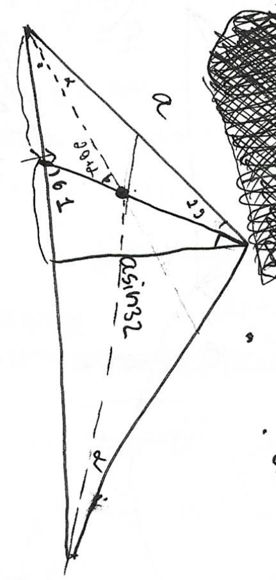
$a+b+ab \geqslant$

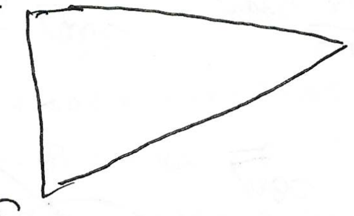
$\cancel{8a^2+b^3+c^2} \geqslant$

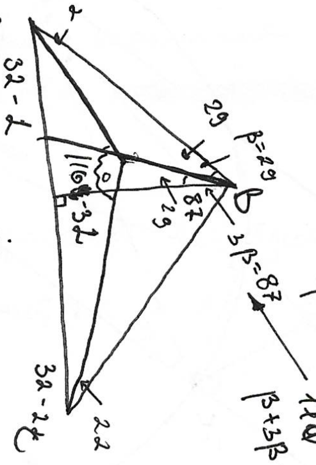
$a \; b \; c \; 2 \; 2 \; ?$

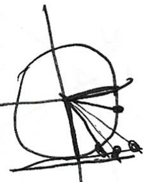
$b \; c \; a \; a \; bc$

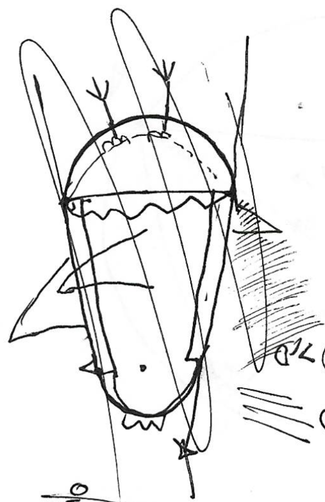
$a^3+6a^2+12a = a(a^2+6a+12) = 2026$











$\log_3 9 = 2$

$1 < a^x < 2$

$\left(a^x - 2a\right)\left(a^x - a\right) \le 0$

$a^{2x} - 3a^{x+1} + 2a^2 \le 0$

$0 < a < 1$

$\sqrt[3]{tgx \cdot tgy \cdot tgz} \le \frac{tgx + tgy + tgz}{3}$

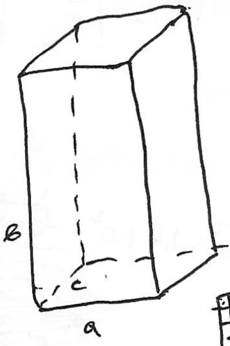
$\begin{array}{r} 10201 \\ \times\ 200 \\ \hline 2040200 \end{array}$

Черновик

Черновик

(1) прямая, прямоугольная

abc - min, когда вс → 0



$abc + 2ab + 2bc + 2ac + 4a + 4b + 4c = 2026$

$abc + 2ab + 2bc + 2ac + 4a + 4b + 4c - 2026 = 0$

$\boxed{a = c = 1}$

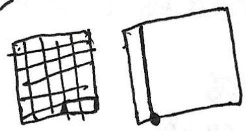
$2a(b + c + 2) + 2b(c+2) + 2c(a+2)$

2 части 1 шт.

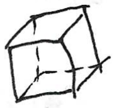
одна сторона - 101

другая от 1 до 10

-2026



$C_{99}^{2} = \frac{99!}{2!\cdot 97!} = \frac{98\cdot 99}{2} =$

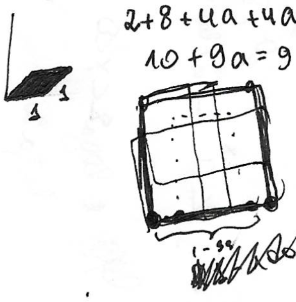


$27 + 6\cdot 9 + 12\cdot 3 =$ 27 + 90 = 117

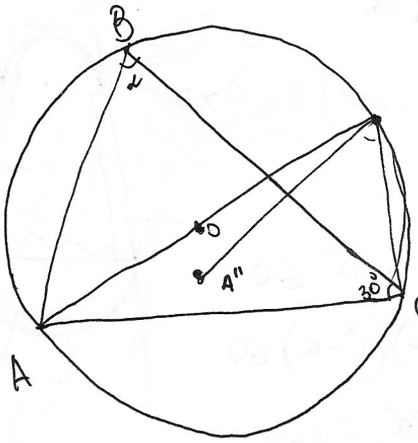
$= 117$ 54 36

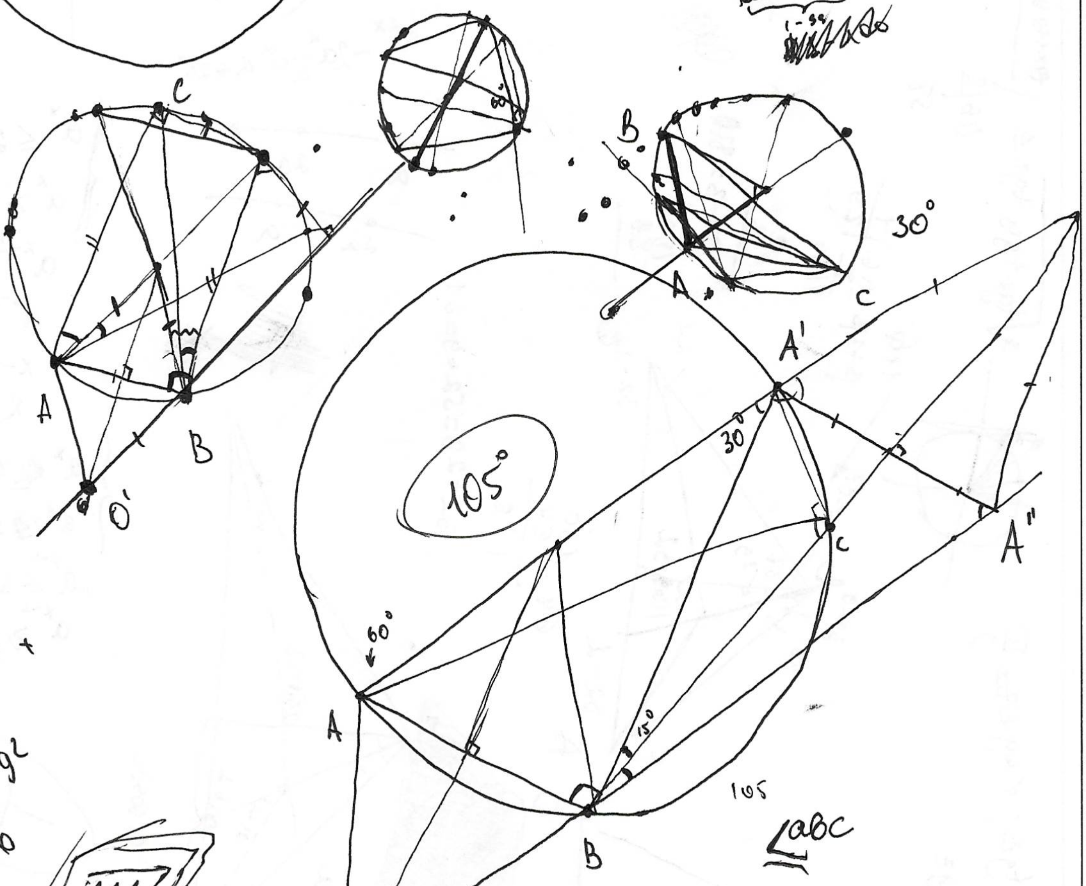
$2 + 8 + 4a + 4a + a =$

$10 + 9a = 97$ $\frac{97}{9}$



1 - 99





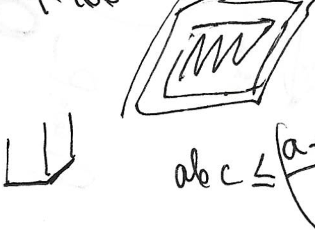
$4\cdot C_{99}^{2}\cdot 100 +$

$+ 4\cdot 99^2$

$+ 4\cdot 100$

105

$\leq abc$



$abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$

$\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \leq abc$

$a+b+c$

$\frac{3abc}{3ab+}$