0 376231 350000

37-62-31-35
(124,43)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 1

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Ломоносов" ~~по математике~~
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Лочехина Николая Андреевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«29» марта 2026 года

Подпись участника

Чистовик

№1. $\sqrt{6(1-tg^2x)} = 4\cdot\sin x \Leftrightarrow$

$tg^2x + 1 = \frac{1}{\cos^2x}$

$1 - \frac{1}{\cos^2x} = -tg^2x$

$2 - \frac{1}{\cos^2x} = 1 - tg^2x$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 6(1-tg^2x) = 16\sin^2x \\ \sin x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 6 - 6tg^2x = 16\sin^2x \\ \sin x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 - 3tg^2x = 8\sin^2x \\ \sin x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 - \frac{3\sin^2x}{\cos^2x} = 8\sin^2x \\ \sin x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3\sin^2x + 8\cdot\sin^2x\cdot\cos^2x - 3\cos^2x}{\cos^2x} = 0 \\ \sin x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\cancel{\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3\sin^2x + 9\sin^2x\cdot\cos^2x - \sin^2x\cdot\cos^2x - 3\cos^2x}{\cos^2x} = 0 \\ \sin x \geq 0 \end{cases}} \Leftrightarrow$

$\cancel{\Leftrightarrow 3\sin^2x(1+3\cos^2x) -}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3(1-\cos^2x) + 8(1-\cos^2x)\cdot\cos^2x - 3\cdot\cos^2x}{\cos^2x} = 0 \\ \sin x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3 - 3\cos^2x + 8\cos^2x - 8\cos^4x - 3\cos^2x}{\cos^2x} = 0 \\ \sin x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-8\cos^4x + 2\cos^2x + 3}{\cos^2x} = 0 \\ \sin x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8\cos^4x - 2\cos^2x - 3 = 0 \\ \cos x \neq 0 \\ \sin x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

см. стр. №2.

стр №2 Чистовик

№1. ... →

$$\begin{cases} 8\cos^4 x - 2\cos^2 x - 3 = 0 \\ \cos x \neq 0 \\ \sin x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$8t^2 - 2t - 3 = 0$

$D_1 = 1 + 24 = 25$

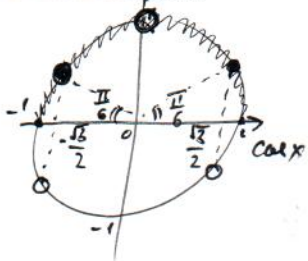
$t = \frac{1 \pm 5}{8}$

$t_1 = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

$t_2 = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8\left(\cos^2 x - \frac{3}{4}\right)\left(\cos^2 x + \frac{1}{2}\right) = 0 \\ \cos x \neq 0 \\ \sin x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos^2 x = \frac{3}{4} \\ \sin x \geq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right. \\ \sin x \geq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$



$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{5}{6}\pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

Ответ: $x \in \left\{\frac{\pi}{6} + 2\pi k;\ \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right\}$, $k, n \in \mathbb{Z}$

№2. Рассмотрим числа в мн-ве A:

Пусть $X \in A$; $S(x)$ – сумма цифр числа X

По условию: $\left(\frac{X}{S(x)}\right) \vdots 9$, то $\frac{X}{S(x)} \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$\Rightarrow X \vdots 9$

но если $X \vdots 9 \Rightarrow S(n) \vdots 9$ (признак делимости на 9)

см. стр. №3

37-62-31-35 (124.43)

~2. ... →   Чистовик   стр. ~3

$\left(\frac{x}{S(x)}\right) \vdots 9$

$\frac{x}{S(x)} \in \mathbb{Z}$

$S(x) \vdots 9$

$x \vdots 9$

$\Rightarrow x \vdots 81$

Значит в мн-во А входят все числа x, ~~кратные 81~~ для кот. выполняется условия:

$x \vdots 81$

$\left(\frac{x}{S(x)}\right) \vdots 9$, $\left(\frac{x}{S(x)}\right) \in \mathbb{Z}$

Найдём такие числа $x \in A$, x - трёхзначное:

✓ $x_1 = 2 \times 81 = 162$; $S(x_1) = 9$; $\frac{x_1}{S(x_1)} = 18 \vdots 9$

✓ $x_2 = 3 \times 81 = 243$; $S(x_2) = 9$; $\frac{x_2}{S(x_2)} = 27 \vdots 9$

✓ $x_3 = 4 \cdot 81 = 324$; $S(x_3) = 9$; $\frac{x_3}{S(x_3)} = 36 \vdots 9$

✓ $x_4 = 5 \cdot 81 = 405$; $S(x_4) = 9$; $\frac{x_4}{S(x_4)} = 45 \vdots 9$

✓ $x_5 = 6 \cdot 81 = 486$; $S(x_5) = 18$; $\frac{x_5}{S(x_5)} = 27 \vdots 9$

× $x_6 = 7 \cdot 81 = 567$; $S(x_6) = 18$; $\frac{x_6}{S(x_6)} = \frac{7 \cdot 81}{18} \notin \mathbb{Z}$ (не подходит)

✓ $x_6 = 8 \cdot 81 = 648$; $S(x_6) = 18$; $\frac{x_6}{S(x_6)} = 36 \vdots 9$

× $x_7 = 9 \cdot 81 = 729$; $S(x_7) = 18$; $\frac{x_7}{S(x_7)} = \frac{9 \cdot 81}{18} \notin \mathbb{Z}$ (не подходит)

✓ $x_7 = 10 \cdot 81 = 810$; $S(x_7) = 9$; $\frac{x_7}{S(x_7)} = 90 \vdots 9$

× $x_8 = 11 \cdot 81 = 891$; $S(x_8) = 18$; $\frac{x_8}{S(x_8)} = \frac{891}{18} \notin \mathbb{Z}$ (не подходит)

✓ $x_8 = 12 \cdot 81 = 972$; $S(x_8) = 18$; $\frac{x_8}{S(x_8)} = 54 \vdots 9$

$x_9 = 13 \cdot 81 > 1000$ — не трёхзначное

далее x_i будут только больше ⇒ ⇒ мы нашли все трёхзначные эл-ты мн-ва А:

162, 243, 324, 405, 486, ~~567~~ 648, 810, 972.

$x_2 = 243$
$x_5 = 486$

$x_{предпоследний} = x_{8-1} = x_7 = 810$

$x_2 + x_5 + x_7 = 243 + 486 + 810 = 729 + 810 = 1539$

см. стр. ~4.

Черновик

стр. № 4.

№ 2. ... →

Ответ: трёхзначные эл-ты мн-ва A:

$x_1 = 162$
$x_2 = 243$
$x_3 = 324$
$x_4 = 405$
$x_5 = 486$
$x_6 = 648$
$x_7 = 810$
$x_8 = 972$

$x_2 + x_5 + x_7 = 1539$

№ 3.

1) Т.к. в прямоугольных треугольниках катеты образованы пересекающимися прямыми, соответственно параллельными какой-то паре из координатных осей => Каждый Δ-ник будет лежать целиком в плоскости параллельной одной из координатных плоскостей (xOy, xOz, yOz)

2) Из симметрии мн-ва F нам достаточно рассмотреть только треугольники, параллельные одной координатной плоскости (например xOy). Найдём их кол-во, а искомое число будет в 3 раза больше.

3) В ∃ всего $4+1+4 = 9$ плоскостей, параллельных (или совпадающих) с xOy, в которых могут лежать искомые треугольники (из условия на координаты точек мн-ва F)

Попарно различными считаем Δ-ки, у кот. хотя бы 1 координата хотя бы 1 вершины ~~различна~~ отличается

см. стр № 5

37-62-31-35
(124.43)

Чистовик

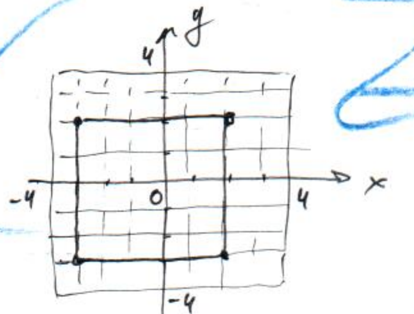
стр ~ 5.

~ 3. . . . →

Т.к. все такие пл-ти одинаковы → ⇒ нам достаточно рассмотреть только Δ-ки из пл-ти xOy.

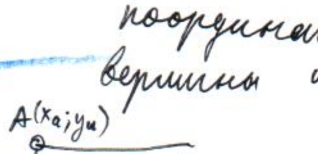
Искомое число треугольников будет в $3 \times 9 = 27$ раз больше.

4) Найдём все прямоугольные Δ-ки в плоскости xOy (с учётом ограничений на координаты)



Впишем по линиям сетки прямоугольник, вершины которого принадлежат F.
Тогда в каждом таком прямоугольнике будет ровно 4 прямоугольных треугольника:

Найдём кол-во возможных прямоугольников. Будем задавать прямоугольник координатами его левой верхней вершины и правой нижней (A, B)



Выбрать точку A можно
$9 \times 9 - 9 - 9 + 1 = 81 - 18 + 1 = 63 + 1 = 64$
(все узлы сетки, кроме точек $(4; \dots)$, $(\dots, -4)$)

$x_b \leq x_a$
$y_b < y_a$

Способы выбрать точку B:

$$\sum_{x_a=-4}^{3} \sum_{y_a=4}^{-3} \left((4 - x_a)(4 + y_a) \right)$$

см. стр ~ 6

Чистовик

стр №6.

$$\sum_{x_a=-4}^{3}\sum_{y_a=4}^{-3}\left((4-x_a)(4+y_a)\right) =$$

$$= \sum_{x_a=-4}^{3}\left((4-x_a)\cdot\sum_{y_a=4}^{-3}(4+y_a)\right) =$$

$$= \sum_{x_a=-4}^{3}\left((4-x_a)\cdot\left(\frac{(4+4)+(4-3)}{2}\cdot 8\right)\right) =$$

$$= \sum_{x_a=-4}^{3}\left((4-x_a)\left(\frac{(8+1)}{2}\cdot 8\right)\right) =$$

$$= \sum_{x_a=-4}^{3}\left(36(4-x_a)\right) =$$

$$= 36\sum_{x_a=-4}^{3}(4-x_a) =$$

$$= 36\cdot\left(\frac{(4-(-4))+(4-3)}{2}\cdot 8\right) =$$

$$= 36\cdot\frac{(8+1)}{2}\cdot 8 = 36\cdot 36 =$$

$$= 1296$$

$$\begin{array}{r} \times\,36 \\ 36 \\ \hline 216 \\ 108 \\ \hline 1296 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\,1296 \\ 4 \\ \hline 5184 \end{array}$$

Итак, прямоугольников: 1296

Δ-ков в пл-ти xOy: $4\times 1296 = 5184$

Искомое число Δ-ков: $27\times 5184 = 139968$

$$\begin{array}{r} \times\,5184 \\ 27 \\ \hline 36288 \\ 10368 \\ \hline 139968 \end{array}$$

Ответ: 139968

Стр. №7

Чистовик

№4. Рассмотрим функцию $y=\sin(\pi x)$, $x\in[0;1]$, $y\in[-1;1]$

График:

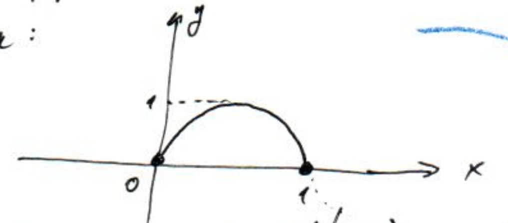
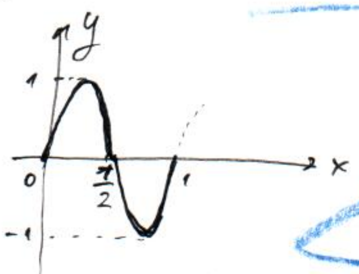


График функции $y=\sin(k\pi x)$ будет "сжат" вдоль оси Ox в k раз

например $y=\sin(2\pi x)$:



Соответственно, для $k\in\{13;15;17\}$ графики будут сжаты в 13, 15, 17 раз.

Пересечения: $\sin(13\pi x)=\sin(15\pi x) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &13\pi x = 15\pi x + 2\pi k,\ k\in\mathbb{Z} \\ &13\pi x = \pi - 15\pi x + 2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}\end{aligned}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &2\pi x = 2\pi k,\ k\in\mathbb{Z} \\ &28\pi x = \pi + 2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}\end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &x = k,\ k\in\mathbb{Z} \\ &x = \frac{1}{28}+\frac{n}{14},\ n\in\mathbb{Z}\end{aligned}\right.$$

$$\sin(13\pi x) = \sin(17\pi x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &13\pi x = 17\pi x + 2\pi k,\ k\in\mathbb{Z} \\ &13\pi x = \pi - 17\pi x + 2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}\end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &4\pi x = 2\pi k,\ k\in\mathbb{Z} \\ &30\pi x = \pi + 2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}\end{aligned}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &x = \frac{1}{2}k,\ k\in\mathbb{Z} \\ &x = \frac{1}{30}+\frac{n}{15},\ n\in\mathbb{Z}\end{aligned}\right.$$

$$\sin(15\pi x) = \sin(17\pi x) \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &15\pi x = 17\pi x + 2\pi k,\ k\in\mathbb{Z} \\ &15\pi x = \pi - 17\pi x + 2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}\end{aligned}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{aligned} &x = k,\ k\in\mathbb{Z} \\ &x = \frac{1}{32}+\frac{n}{16},\ n\in\mathbb{Z}\end{aligned}\right.$$

см. стр. №8.

стр - 8. Чистовик.

Имеем пересечения $\sin(13\pi x)$ и $\sin(15\pi x)$:

$$\left[\begin{array}{l} x = k,\ k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{1}{28} + \frac{n}{14},\ n \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

$\sin(13\pi x)$ и $\sin(17\pi x)$:

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{k}{2},\ k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{1}{30} + \frac{n}{15},\ n \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

$\sin(15\pi x)$ и $\sin(17\pi x)$:

$x = k,\ k \in \mathbb{Z}$

$x = \frac{1}{32} + \frac{n}{16},\ n \in \mathbb{Z}$

№8. $8x^2 \log_a x - \log_x a - 2x \le 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8x^2 \log_a x - \frac{1}{\log_a x} - 2x \le 0 \\ x \ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

неполный кв-ной трёхчлен, >0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{8x^2 \log_a^2 x - 2\cancel{x} \log_a x - 1}{\log_a x} \le 0 \\ x \ne 1 \\ a \ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{\log_a x} \le 0 \\ x \ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cancel{\log_x a} \le 0 \\ \frac{1}{(a-1)(x-1)} \le 0 \\ a > 0 \\ a \ne 1 \\ x > 0 \\ x \ne 1 \end{cases} =$$

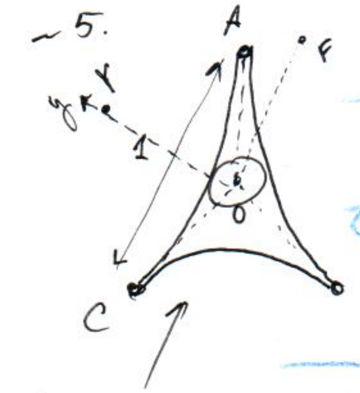
1) $0 < a < 1$:

$x > 1$

Чистовик

стр. № 9.

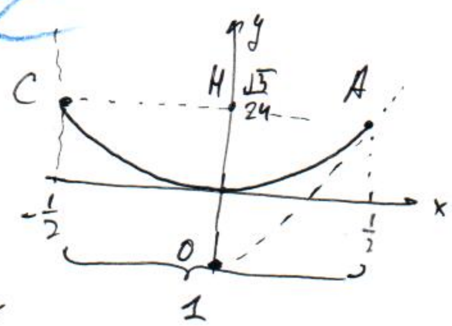
№ 5.



Рассмотрим параболы $y = Cx^2$

из симметрии треугольника, графики функций $y = Cx^2$ повёрнуты друг относительно друга на $\frac{360}{3} = 120^\circ$

График $y = Cx^2$:



Y лежит на оси параболы (левой верхней)

O - центр окружности

$OY \perp OF$, $OF \parallel Ox$

из симметрии

$\angle COA = 120^\circ$

OY - ось симметрии ⇒

⇒ $\angle COY = \angle YOA = 60^\circ$ ⇒

⇒ $\angle FOA = 30^\circ$ ⇒ ~~прямая~~ касательная в т. A OA составляет угол 30° с Ox

~~но OA - касательная к параболе в т. A~~

~~урав~~ ур. касательная: $y = 2C + b$

~~$y' = 2Cx + b$~~

~~в т. A: $y'(\frac{1}{2}) = C = tg(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{3}$~~

~~$C = \frac{\sqrt{3}}{3}$~~

~~$y = \frac{2\sqrt{3}}{3}x$ — ур-е касательной~~

в т. A:

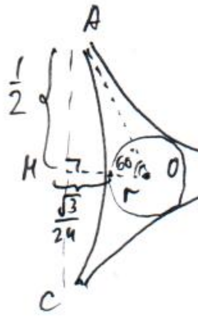
$2C = tg\, 30^\circ$

$2C = \frac{\sqrt{3}}{3}$; $C = \frac{\sqrt{3}}{6}$

~~A=~~ ⇓

$A(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot (\frac{1}{2})^2) = A(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{24})$

(A∈ параболе)



→ выделим прямоугольный Δ-ник AHO

$tg \angle AOH = \frac{AH}{HO} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{24} + r} = tg\, 60^\circ = \sqrt{3}$

см. стр. № 10.

Чистовик стр №1

стр № 10.

$$\frac{\frac{1}{2}}{r+\frac{\sqrt{3}}{24}}=\sqrt{3}$$

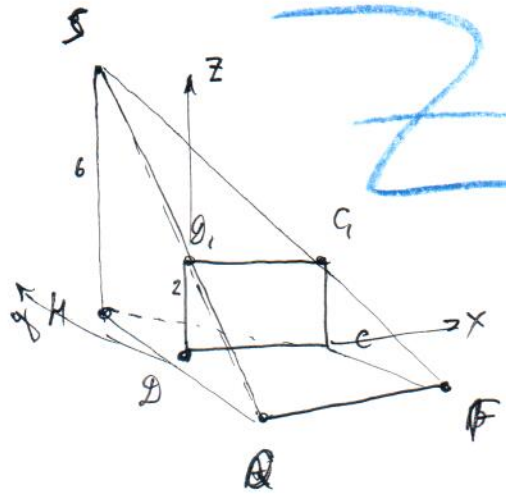
$$\frac{1}{2}=\sqrt{3}r+\frac{3}{24}=\sqrt{3}r+\frac{1}{8}$$

$$\sqrt{3}r=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$$

$$\boxed{r=\frac{\sqrt{3}}{8}}$$

Ответ: $r=\frac{\sqrt{3}}{8}$

№6.



1) Рассмотрим движение светлячка:

пусть в некоторый момент времени светлячок освещает пространство вокруг себя, в частности лучи от него будут попадать в трехгранный угол $SHQF$, который вместе с землёй образует пирамиду $SHQF$. В эту ~~часть~~ этой пирамиды касается забор DD_1C_1C, поэтому область пространства $DQFCC_1D_1$ – затенена.

Все точки на земле, принадлежащие затенённой области, попадают в четырёхугольник $DQFCD$.

см. стр. 11

Чистовик

стр № 11.

2) светлячок движется на высоте 6 вдоль вектора $\vec{AB}$ $A(-3;7;6)$

$B(3;5;6)$

$\vec{AB}\{6;-2;0\} \parallel \vec{e}\{3;-1;0\}$

светлячок $S(x;y)$

$S \in AB$:

$$\frac{x-3}{-3-3} = \frac{y-5}{7-5}$$

$$\frac{x-3}{-6} = \frac{y-5}{2}$$

$$2x-6 = -6y+30$$

$$6y = -2x+36$$

$$y = -\frac{1}{3}x+6$$

$\Downarrow$

$S\left(x; -\frac{1}{3}x+6; 6\right)$

$H\left(x; -\frac{1}{3}x+6; 0\right)$

$D(0;0;0)$ $D_1(0;0;2)$

$C(3;0;0)$ $C_1(3;0;2)$

3) $Q \in SD_1$

~~$S(x_s; -\frac{1}{3}x_s+6; 6)$~~

~~$D_1(0;0;2)$~~

~~$\frac{x-0}{x_s-0} = \frac{y-0}{-\frac{1}{3}x_s+6-0}$~~ ~~$y = \left(\frac{-\frac{1}{3}x_s+6}{x_s}\right)x$~~

Из подобия: $\triangle QDD_1 \sim \triangle QHS$

$k=\frac{1}{3}$; $DQ = \frac{1}{2}HD \Rightarrow$

$\Rightarrow Q \in HD$, $D=(0;0;0)$

$\Downarrow$

$Q = \left(-\frac{1}{2}x_H; -\frac{1}{2}y_H; 0\right) =$

$= \left(-\frac{1}{2}x; \frac{1}{6}x-3; 0\right)$

4) аналогично $F \in SC_1$:

$F \in HC$, $C=(3;0;0)$; $CF = \frac{1}{2}CH$

~~$F = \left(x_c + \frac{1}{2}(x_c - x_H); \frac{-1}{2}y_H\right) = = \left(3+\frac{1}{2}(3-x); \frac{1}{6}x-3\right) = = \left(\frac{9}{2}-\frac{1}{2}x; \frac{1}{6}x-3\right)$~~

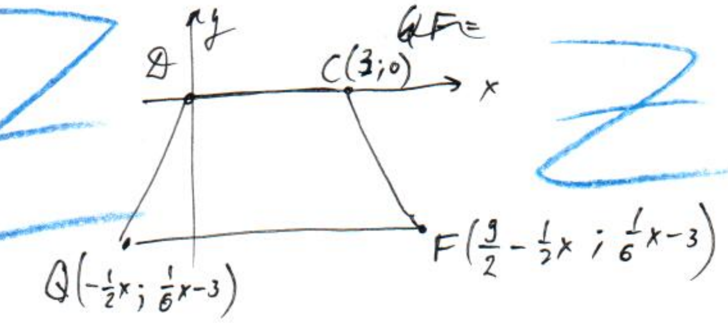
$F = \left(x_c - \frac{1}{2}x_H; y_c - \frac{1}{2}y_H; 0\right) =$

$= \left(3-\frac{1}{2}x_H; \frac{1}{6}x-3; 0\right)$

см. стр. 12.

Стр. №17. Чистовик:

Итак: ~~DC~~ $QFCD$ — трапеция



QF — отрезок длиной $\frac{9}{2}$, подвижен

DC — отрезок длиной 3, неподвижен.

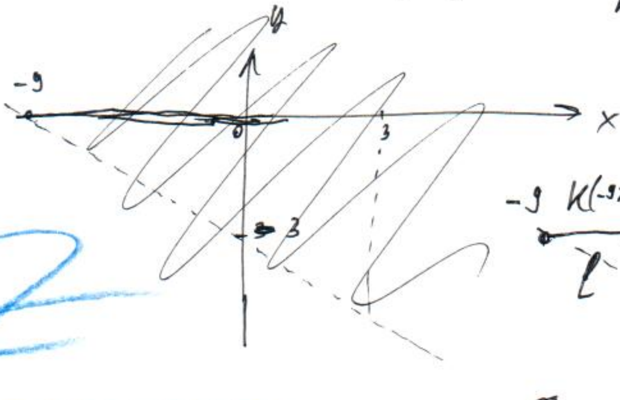
$x \in [-3; 3]$ — светлячок

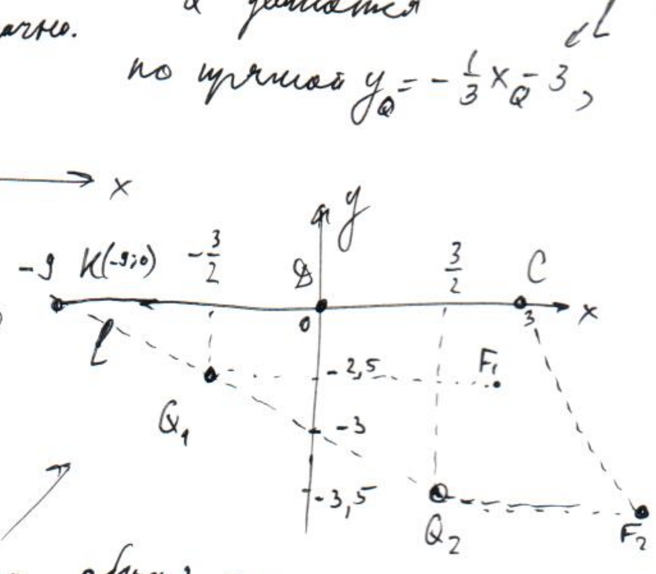
Используем замену переменной: $Q\left(x_Q; -\frac{1}{3}x_Q - 3\right)$

$x_Q = -\frac{1}{2}x$; $x_Q \in \left[-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right]$

F относительно Q восстанавливается однозначно.

Q "двигается" по прямой $y_Q = -\frac{1}{3}x_Q - 3$,





Из рисунка общая затемнённая область имеет форму ~~трапеции~~ 5-ти угольника: $DQ_1Q_2F_2C$

Общая площадь: $S_x = S(KQ_2F_2C) - S(KQ_1D) =$

$$= \frac{(9+3)+\frac{9}{2}}{2} \cdot \frac{7}{2} - \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot \frac{5}{2} =$$

$$= \frac{33}{4} \cdot \frac{7}{2} - \frac{45}{4} = \frac{141}{8}$$

$33 \times 7 = 231$; $231 - 90 = 141$

Ответ: $\frac{141}{8}$.