0 899650 610000

89-96-50-61
(124.15)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 7

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Ломоносов"
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Лукшина Алексея Сергеевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«29» марта 2026 года

Подпись участника

85 (Восемьдесят пять)

Агурьев (подпись)

89-96-53-61
(124.15)

Черновик

№1

$\sqrt{3(1-ctg^2x)} = 2\sqrt{2}\cos x$ ОДЗ: $(1-ctg\,x)(1+ctg\,x)\geq 0$

$\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}$ $\boxed{\cos x \geq 0}$

$3(1-ctg^2x) = 8\cos^2 x$

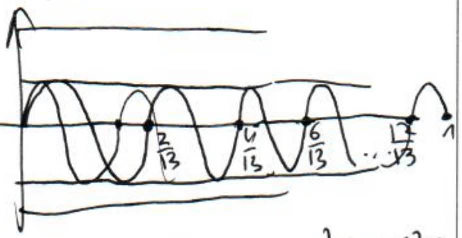
$3\sin^2x - 3\cos^2 x = \underbrace{8\cos^2x\sin^2x}_{2\sin 2x}$

$\underbrace{3(1-2\cos^2x)}_{-3\cos 2x}$

$+ \cos x \geq 0$

$T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T_1 = \frac{2}{13}$

$tg\,2x = -\frac{3}{2}$

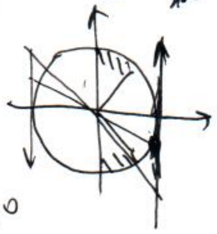


$tg\,2x = \frac{2tg\,x}{1-tg^2x}$

$-\frac{3}{2}(1-tg^2x) = 2tg\,x$

$-3+3tg^2x = 4tg\,x$

$3tg^2x - 4tg\,x - 3 = 0$



$1-ctg^2x = 1-\frac{\cos^2x}{\sin^2x} = \frac{\sin^2x-\cos^2x}{\sin^2x} = \frac{1-2\cos^2x}{\sin^2x} = \frac{-\cos 2x}{\sin^2x}$

$\frac{x}{13} > \frac{x+1}{15}$ $x > \frac{1}{2}$

$15x > 13x+1$

№2

$\overline{a_1a_2\ldots a_n}$ такие, что $\overline{a_1a_2\ldots a_n} = 9k(a_1+\ldots+a_n) \Rightarrow a_1+\ldots+a_n \vdots 9 \Rightarrow$

$\overline{a_1\ldots a_n} \vdots 81 \Rightarrow$

все 3-значные: $81\cdot 2 = 162$

$81\cdot 3 = 243$

$= 324$

$81\cdot 11$ $81\cdot 12 = 891$

$81 \times 13 = 243 + 81 = 1053$

$81\cdot 5 = 405$

нет 999

заметим, что Σчисел $= 9, 18, \cancel{27}$

$81 \times 12 = 162 + 81 = 972$

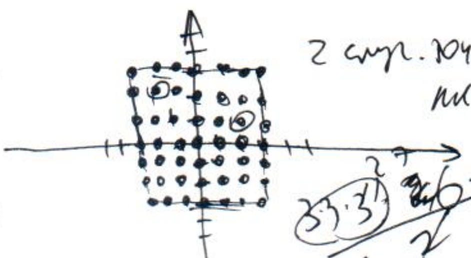
$121 \times 11 = 121 + 121 = 1331$

№3

$(a_1,b_1), (a_2,b_2), \ldots (a_n,b_n)$ $a_i, b_i \in [-5;5], \in \mathbb{Z}$

$243 + 486 = 729$

$729 + 810 = 1539$



2 смеж. точки (не $\in$ 1 прямой || осям) в ряд

на -ти, тогда найдётся

$3\cdot 3\cdot 3^2 \cdot 6\cdot 4^2 = 24$

$\sin 13\pi x$

$\sin 13\pi = \sin\pi = 0$

$\frac{13\pi}{2} = \frac{12\pi}{2}$

$\frac{15\pi}{2} = 7\pi + \frac{\pi}{2}$

$\frac{17\pi}{2} = 8\pi$

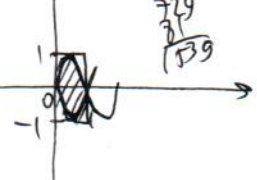
$27 \times 12 = 54 + 27 = 324$

$81 \times 19 = 729 + 81 = 1539$

Любая точка $\Rightarrow$

6.3 катетов

18.18

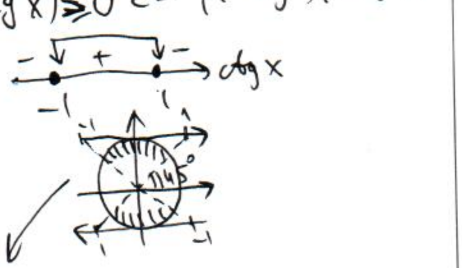


Чистовик

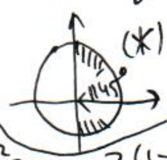
№1

$$\sqrt{3(1-ctg^2x)} = 2\sqrt{2}\cos x$$

ОДЗ: $\sin x \neq 0$, $(1-ctg^2x) \geqslant 0 \Leftrightarrow (1-ctg x)(1+ctg x) \geqslant 0$



заметим, что решения существуют только при $\cos x \geqslant 0$



(*)

$3(1-ctg^2x) = 8\cos^2 x$

$1-\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{-\cos 2x}{\sin^2 x} \Rightarrow$

$-3\cos 2x = 8\sin^2 x\cos^2 x = 2\sin^2 2x = 2(1-\cos^2 2x) \Rightarrow$

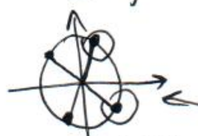
$2\cos^2 2x - 3\cos 2x - 2 = 0$

$D = 3^2 + 4\cdot 2\cdot 2 = 9+16 = 25$

$\cos 2x = \frac{3\pm 5}{4} = 2 \vee -\frac{1}{2}$

2 ⊖ (>1), $-\frac{1}{2}$ ⊕

$\cos 2x = -\frac{1}{2} \Rightarrow 2x = \left[\begin{array}{l}\frac{2\pi}{3}+2\pi n\\ \frac{4\pi}{3}+2\pi n\end{array}\right. \Rightarrow x = \left[\begin{array}{l}\frac{\pi}{3}+\pi n\\ \frac{2\pi}{3}+\pi n\end{array}\right.$



учитывая ограничение (*) подходит только обведённое кружком $\Rightarrow$

$x = \left[\begin{array}{l}\frac{\pi}{3}+2\pi n\\ -\frac{\pi}{3}+2\pi n\end{array}\right.$

Ответ: $x = \pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$

№2

во мн-ве A такие числа $\overline{a_1\ldots a_n}$, что $\overline{a_1\ldots a_n} = 9k(a_1+\ldots+a_n)$, где $k\in\mathbb{Z}$

заметим, что $\overline{a_1\ldots a_n} \vdots 9 \Rightarrow a_1+\ldots+a_n \vdots 9 \Rightarrow \overline{a_1\ldots a_n} \vdots 81$

выпишем все N трёхзначные числа $\vdots 81$:

$81\cdot 2 = 162$ ✓ $\Sigma_ц = 9$
$81\cdot 3 = 243$ ✓ $\Sigma_ц = 9$
$81\cdot 4 = 324$ ✓ $\Sigma_ц = 9$
$81\cdot 5 = 405$ ✓ $\Sigma_ц = 9$
$81\cdot 6 = 486$ ✓ $\Sigma_ц = 18$
$81\cdot 7 = 567$ ✗ $\Sigma_ц = 18$
$81\cdot 8 = 648$ ✓ $\Sigma_ц = 18$
$81\cdot 9 = 729$ ✗ $\Sigma_ц = 18$
$81\cdot 10 = 810$ ✓ $\Sigma_ц = 9$
$81\cdot 11 = 891$ ✗ $\Sigma_ц = 18$
$81\cdot 12 = 972$ ✓ $\Sigma_ц = 18$
$81\cdot 13 > 999$ — не трёхзначное

из них под условие подходят все, кроме 567, 729, 891 т.к. их сумма цифр 18, а они не $\vdots 18 \Rightarrow$

итоговая послед. в порядке возрастания:

162, 243, 324, 405, 486, 648, 810, 972

243 — 2-ое, 486 — 5-ое, 810 — предпосл.

сумма 2, 5, предп. $S = 243+486+810 = 1539$

Ответ: 162, 243, 324, 405, 486, 648, 810, 972

$S = 1539$

89-96-50-61
(124.15)

Чистовик

№3

возьмём случайную точку из мн-ва F и посчитаем кол-во всех возможных катетов из этой вершины, параллельных осям: по каждой оси получается 10 ($= \underbrace{5+5+1}_{\text{кол-во точек на прямой паралл. оси}} - \underbrace{1}_{\text{нулевого катета не м.б.}}$)

⇓

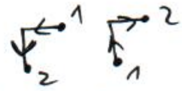
всего
$10 \cdot 3 = 30$,
т.к. кол-во осей в пространстве 3

=) можно провести катет из данной вершины 30 способами и также, следовательно, можно провести ещё катет 20 способами к вершине, к которой провели катет =) (по всем направлениям кроме того, что был первый катет)

Всего получается прямоуг. треуг. с катетами ∥ осям:

$$\frac{\underbrace{11 \cdot 11 \cdot 11}_{\text{кол-во точек}} \cdot \underbrace{30}_{1^{ый}\text{ катет}} \cdot \underbrace{20}_{2^{ой}\text{ катет}}}{2} = 1331 \cdot 30 \cdot 10 = 399300$$

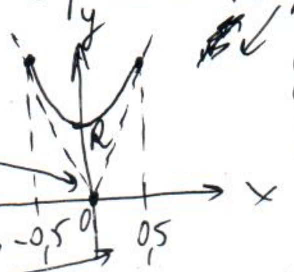
каждый треугольник посчитан 2 раза:



Ответ: 399300

№5

по условию у шестиугольника нулевые углы =) в точке касания парабол их производные совпадают и т.к. шестиугольник равносторонний и симметричный, то все эти касательные к точкам касания пересекаются в центре шестиугольника, т.е. в центре впис. окр-ти =) найдём R, проанализировав график одной из парабол:



центр окр-ти в центре осей

т.к. растояние между соседними вершинами = 1

$y(x) = Cx^2 + R$, $y'(x) = 2Cx$

уравнения касат. в т. x_0:

$y(x) = 2Cx_0(x - x_0) + Cx_0^2 + R =$
$= 2Cx_0 \cdot x - Cx_0^2 + R$

заметим, что касат. в т. 0,5 и −0,5 должны проходить через 0 (т.е. свобод. коэф. = 0) =) $\begin{cases} R - C \cdot 0{,}5^2 = 0 \\ R - C \cdot (-0{,}5)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{R = \frac{C}{4}}$

Ответ: $R = \frac{C}{4}$

Черновик

$8\ x^2\log_a x - \log_x a - 2x \le 0$

ОДЗ: $a, x > 0$
$a, x \ne 1$

$\log_x a = \frac{1}{\log_a x}$

$8(x\log_a x)^2 - 1 - 2(x\log_a x) \le 0$

$x\log_a x = t \Rightarrow$

$8t^2 - 2t - 1 \le 0$

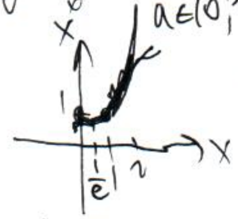
$(t - \frac{1}{2})(8t + 2) \le 0$

$(t - \frac{1}{2})(t + \frac{1}{4}) \le 0$

$\log_a x > 0 \Rightarrow a^0 > x$

$x\log_a x = t$
$\log_a x^x = t$
$x^x = a^t$

$a \in (0;1)$ если $a > 1$



$(x^x)'_x =$
$= e^{\log_e x^x}$
$= (e^{x \cdot \ln x})'_x$

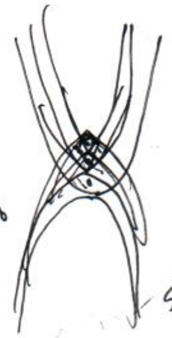
$x \cdot \ln x =$
$= \ln x + 1$

$= e^{x\cdot\ln x} \cdot (\ln x + 1) = 0$
x^x $\ln x = -1$

$x = \frac{1}{e}$

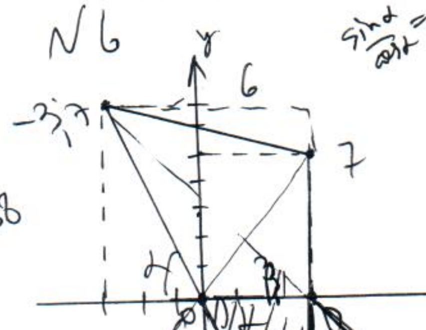
$(\frac{1}{e})^{\frac{1}{e}} = \sqrt[e]{\frac{1}{e}}$

$49 + 9 = 58$



$\sin\alpha = \frac{7}{\sqrt{85}}$
$\cos\alpha = \frac{6}{\sqrt{85}}$

№6



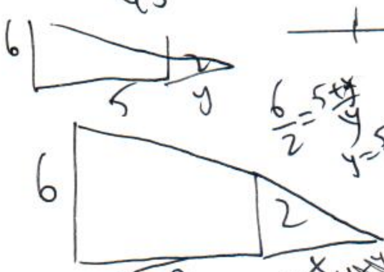
$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{7}{3}$
$\sin\alpha = \frac{7}{\sqrt{58}}$
$\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{58}}$

$\frac{6}{3} = \frac{7+x}{x} \Rightarrow$
$6x = 21 + 3x$
$x = 7$

A(-3; 7; 6)
B(3; 5; 6)
C(0; 0; 2)
D(3; 0; 2)

$\overrightarrow{CA} = \{-3; 7; 4\}$
$\overrightarrow{DB} = \{0; 5; 4\}$

$49 + 9 = 58$



$\frac{6}{2} = \frac{5+y}{y}$
$y = \frac{5}{2}$

$\frac{\sqrt{58}}{2}$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{7}{3}$

$S = \frac{3 \cdot 7}{2} = \frac{21}{2}$
$\operatorname{tg}\beta = \frac{7}{6}$

$H =$

$9 + 25 = 34$ Уравнение прямой

Надо найти точку где $z = 0$

$\frac{6}{2} = \frac{\sqrt{58}+x}{x}$

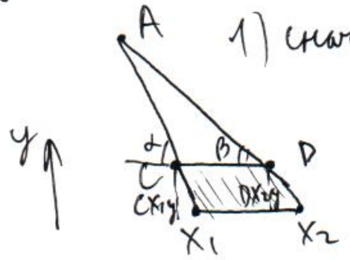
$\boxed{x = \frac{\sqrt{58}}{2}}$

$36 + 49 =$
$= 70 + 15 =$
$= 85$

89-96-50-61 (124.15)

Чистовик

№6



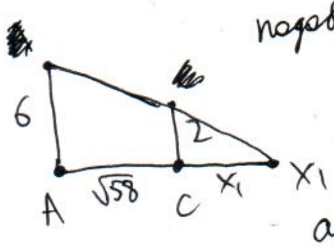
1) сначала рассмотрим тень от т. A

$|AC| = \sqrt{3^2+7^2} = \sqrt{58}$

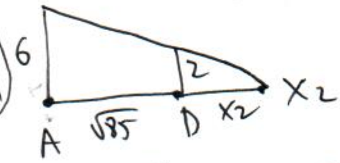
$|AD| = \sqrt{(3+3)^2+7^2} = \sqrt{85}$

подобие треугольников:

$\frac{6}{2} = \frac{\sqrt{58}+x_1}{x_1} \Rightarrow x_1 = \frac{\sqrt{58}}{2}$



аналогично $x_2 = \frac{\sqrt{85}}{2}$



$tg\,\alpha = \frac{7}{3} \Rightarrow$

$\sin\alpha = \frac{7}{\sqrt{58}} \Rightarrow$

$CX_1y = \frac{7}{2}$

$tg\,\beta = \frac{7}{6} \Rightarrow \sin\beta = \frac{7}{\sqrt{85}} \Rightarrow$

$DX_2y = \frac{7}{2}$

равны

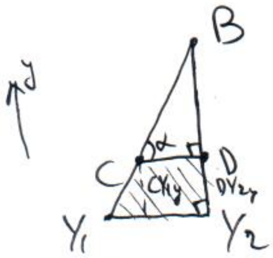
заметим, что $X_1X_2 \parallel CD$ $\Rightarrow S_{CDX_2X_1} = S_{AX_1X_2} - S_{ACD} = \frac{5}{4} S_{ACD}$

$\Rightarrow \triangle ACD \sim \triangle AX_1X_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{S_{ACD}}{S_{AX_1X_2}} = \left(\frac{AC}{AX_1}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{58}}{\sqrt{58}+\frac{\sqrt{58}}{2}}\right)^2 = \frac{4}{9}$

$S_{ACD} = \frac{1}{2} h \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 3 = \frac{21}{2} \Rightarrow S_{CDX_2X_1} = \frac{5}{4} \cdot \frac{21}{2} = \frac{105}{8}$

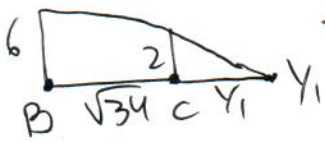
2) аналогично сделаем для т. B:



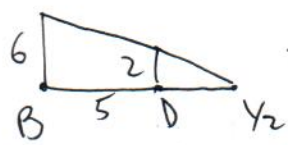
$|BC| = \sqrt{3^2+5^2} = \sqrt{34}$

$|BD| = 5$

$\Rightarrow Y_1 = \frac{\sqrt{34}}{2}$



$\Rightarrow Y_2 = \frac{5}{2}$



$tg\,\alpha = \frac{5}{3} \Rightarrow$

$\sin\alpha = \frac{5}{\sqrt{34}} \Rightarrow$

$CY_1y = \frac{5}{2}$, $DY_2y = DY_2 = \frac{5}{2}$

т.к. $Y_1Y_2 \parallel CD \Rightarrow \triangle BCD \sim \triangle BY_1Y_2 \Rightarrow \frac{S_{BCD}}{S_{Y_1Y_2B}} = \left(\frac{BD}{BY_2}\right)^2 = \left(\frac{5}{5+\frac{5}{2}}\right)^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow$

$S_{CDY_2Y_1} = S_{BY_1Y_2} - S_{BCD} = \frac{5}{4} S_{BCD}$, $S_{BCD} = \frac{1}{2} CD \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5 = \frac{15}{2} \Rightarrow$

$S_{CDY_2Y_1} = \frac{5}{4} \cdot \frac{15}{2} = \frac{75}{8}$

т.к. все точки $\in [AB]$ не могут создать области доп. тени, которые не учитываются в A и B, т.к. A и B крайние точки $\Rightarrow$

$S_{тени} = S_{CDX_2X_1} + S_{CDY_2Y_1} = \frac{105}{8} + \frac{75}{8} = \frac{\cancel{180}^{\,45}}{\cancel{8}_{\,2}} = \frac{45}{2}$

Ответ: $\frac{45}{2}$

~~черновик~~ черновик

№8

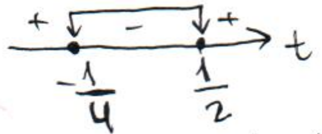
$8x^2\log_a x - \log_x a - 2x \le 0$ ОДЗ: $a, x > 0$; $a, x \ne 1$

$\log_x a = \frac{1}{\log_a x} \Rightarrow$

$8x^2\log_a x - \frac{1}{\log_a x} - 2x \le 0 \overset{\log_a x>0}{\Rightarrow} 8(x\log_a x)^2 - 2(x\log_a x) - 1 \le 0$

замена: $x\log_a x = t \Rightarrow$ $8t^2 - 2t - 1 \le 0$

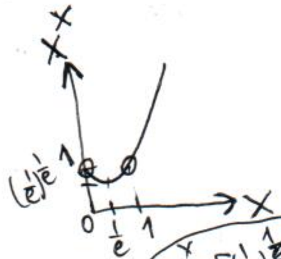
$(2t-1)(4t+1) \le 0$



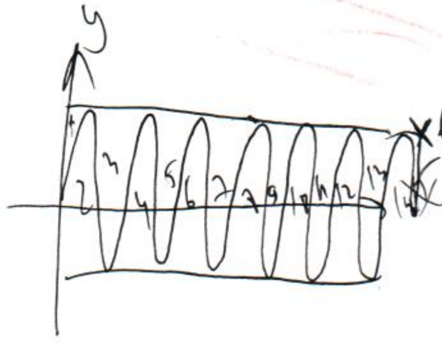
точка минимума:

$(x^x)' = (e^{\ln x \cdot x})' = x^x \cdot (\ln x + 1) = 0$

$x = \frac{1}{e}$



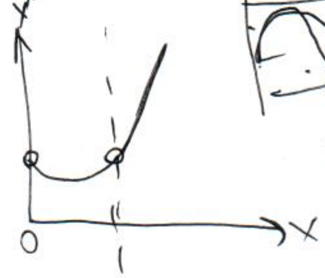
$x\log_a x = t \Rightarrow$ $a^t = x^x$



$x^x \in [(\frac{1}{e})^{\frac{1}{e}}; +\infty)$ причём при $a^t \in ((\frac{1}{e})^{\frac{1}{e}}; 1)$ имеет по 2 решения!

$x\log_a x \in (0; \frac{1}{2}]$, $\log_a x > 0$

$x\log_a x \in (-\infty; -\frac{1}{4}]$, $\log_a x < 0$



$\sin 3\pi x$

$T = \frac{2\pi}{3}$

$2 \cdot 3 - 1$

$2 \cdot 2$

$a > 1$: $\log_a x > 0 \Leftrightarrow x > 1$

$15 + 17 + 19 = 20 \cdot 3 - 5 - 3 - 1$

$= 60 - 9$

$a^{t \in (0; \frac{1}{2}]} \in (1; +\infty)$

$a^{t \in (-\infty; -\frac{1}{4}]} \in (0; (\frac{1}{e})^{\frac{1}{e}})$

$a^{-\frac{1}{4}} = (\frac{1}{e})^{\frac{1}{e}}$

$\boxed{a = (\frac{1}{e})^{-\frac{4}{e}} = e^{\frac{4}{e}}}$

$\sin 13\pi x = \sin 15\pi x$

$\sin 15\pi x - \sin 13\pi x = 0$

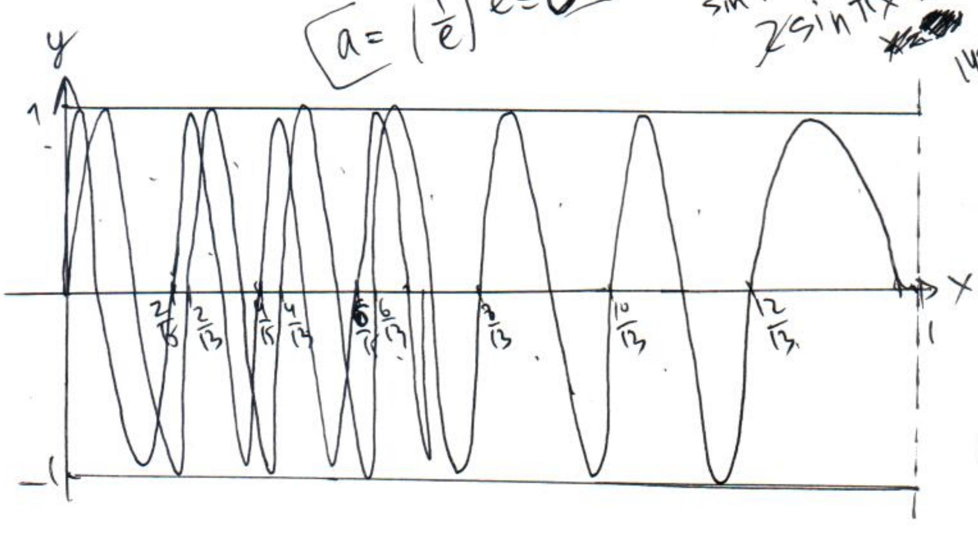
$2\sin \pi x \cdot \cos 14\pi x = 0$

$x \in \mathbb{Z}$

$14\pi x = \frac{\pi}{2} + \pi n$

$14x = \frac{1}{2} + n$

$x = \frac{1}{28} + \frac{n}{14}$



Листовик

№8 $8x^2\log_a x-\log_x a-2x\le 0$ ОДЗ: $a,x>0;\ a,x\ne 1$

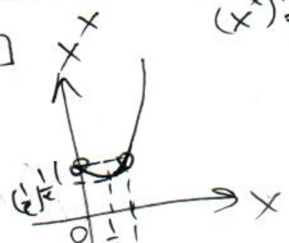
$\log_x a=\dfrac{1}{\log_a x}\Rightarrow$

$8x^2\log_a x-\dfrac{1}{\log_a x}-2x\le 0 \Leftrightarrow \dfrac{8(x\log_a x)^2-2(x\log_a x)-1}{\log_a x}\le 0$

замена: $x\log_a x=t\Rightarrow \dfrac{8t^2-2t-1}{\log_a x}\le 0 \Leftrightarrow \dfrac{(2t-1)(4t+1)}{\log_a x}\le 0$

$\left[\begin{array}{l} x\log_a x\in[-\frac{1}{4};\frac{1}{2}],\ \log_a x>0 \\ \quad x,\log_a x>0 \Rightarrow (0;\frac{1}{2}] \\ x\log_a x\in(-\infty;-\frac{1}{4}]\cup[\frac{1}{2};+\infty),\ \log_a x<0 \\ \quad \underset{\log_a x<0}{x>0}\Rightarrow(-\infty;-\frac{1}{4}] \end{array}\right.$

найдём min x^x:
$(x^x)'=(e^{\ln x\cdot x})'=x^x(\ln x+1)=0$
$x=\frac{1}{e}$



$x\log_a x=t \Leftrightarrow x^x=a^t$

a^t монотонна

1) $a>1$: $\Rightarrow \log_a x>0 \Leftrightarrow x>1$

чтобы был полуинтервал и точка т.к. a^t монотонна нужно, чтобы при $x>1$ был полуинтервал (или точка), а в $x<1$ была точка (или полуинтервал)

в $x>1$ не может получиться 1 точка $\Rightarrow$ она д.б. в $x<1$ — единств. подходящей такой точкой является $x=\frac{1}{e}$, т.к. в остальных будет уже интервал $\Rightarrow$

т.к. $a>1$, то max $\underset{\substack{\text{в } x<1 \\ t\in(-\infty;-\frac{1}{4}]}}{a^t}=a^{-\frac{1}{4}}=\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}\Rightarrow a=\left(\frac{1}{e}\right)^{-\frac{4}{e}}=e^{\frac{4}{e}}$, а

соотв. в $x>1$ $a^t\in(1;e^{\frac{2}{e}}]$ — ~~[illegible]~~ для x будет полуинтервал (отрезок без $x=1$)

$\Rightarrow \boxed{a=e^{\frac{4}{e}}}$ — подходит

2) $a<1$: $\Rightarrow \log_a x>0 \Leftrightarrow x<1$

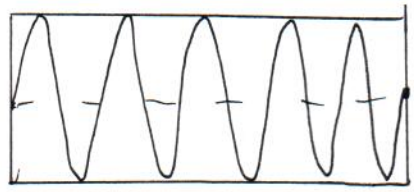
аналогично первому случаю точка может быть только в $x=\frac{1}{e}\Rightarrow$

т.к. $a<1$, то max $\underset{\substack{\text{в } x<1 \\ t\in(0;\frac{1}{2}]}}{a^t}\to a^0=1>\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}\Rightarrow$ в таком случае a не найдется при $\forall a$

Ответ: $a=e^{\frac{4}{e}}$

Чистовик

№4



заметим, что $y=\sin 13\pi x$ делит полоску на 15 частей

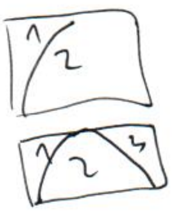
$13+2=15$ частей

аналогично $y=\sin 15\pi x$ делит на 17 частей,

$y=\sin 17\pi x$ делит на 19 частей

~~каждая пересекающая добавляет~~ заметим, что по отдельности в сумме выходит $15+17+19=51$ часть

но и вместе будет тоже 51 часть, т.к. кривой нет разницы в делении пространства:



← первая делила на 3 части, вторая на 2, в общем делят на 5

Ответ: на 51 область