0 720517 480002

72-05-17-48
(124.15)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 11 класс

Место проведения г. Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Ломоносов"
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Матбороды Дарьи Романовны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«29» 03 2026 года

Подпись участника

85 (Восемьдесят пять) фамилия

72-05-17-48 (124,15)

Черновик.

$\sqrt{6(1-ctg^2x)} = 4\cos x \iff \begin{cases} 6(1-ctg^2x) = 4^2\cos^2 x \\ \cos x \geq 0 \end{cases}$

$(*) \Rightarrow 3\left(1-\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\right) = 8\cos^2 x$ $\quad t=\cos^2 x$, $t \neq 1$

$\sin^2 x = 1-\cos^2 x$

$3\left(1-\frac{t}{1-t}\right) = 8t \iff 3\left(\frac{1-t-t}{1-t}\right) = 8t \iff$

$\iff 3(1-2t) = 8t(1-t) \iff 3-6t = 8t-8t^2 \iff 8t^2-14t+3=0$

$\sqrt{\frac{D}{4}} = \sqrt{49-24} = 5$

$t = \frac{7\pm5}{8} = \left[\begin{array}{l} \frac{12}{8} > 1 \\ \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \end{array}\right.$

$\begin{cases} \cos x = \pm\frac{1}{2} \\ \cos x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$

$\overline{abc} : (a+b+c) = 9k \Rightarrow \overline{abc} : 9 \Rightarrow a+b+c : 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{abc} = 9m$, $9m$ $(a+b+c) = 9p \Rightarrow$

$= pm : pp = 9k \Rightarrow n ; 9 \Rightarrow \overline{abc} : 81$

81 162

81 + 81 = 162 ←
162 + 81 = 243 ←
243 + 81 = 324 ←
324 + 81 = 405 ←
405 + 81 = 486 ←
486 + 81 = 567 ←
567 + 81 = 648 ←
648 + 81 = 729 ←
729 + 81 = 810 ←
810 + 81 = 891 ←
891 + 81 = 972 ←

162 243 324

405 486 567

648 729 810

891 972

162 + 648 = 810

810 + 972 = 1782

972 + 81 = 1053

$9 \cdot 9 \cdot 2 =$ 162 : 9 = 18

243 : 9 = 9·3

324 : 9 = 9·4

405 : 9 =

81 × 13: 243 + 81 = 1053

Чистовик

№ 1

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\sqrt{6(1-ctg^2 x)} = 4\cos x \Leftrightarrow \begin{cases} 6(1-ctg^2 x) = 16\cos^2 x \\ \cos x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (*) \begin{cases} 3\left(1 - \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\right) = 8\cos^2 x \quad (1) \\ \cos x \geq 0 \end{cases}$

Решим (1): $3\left(1 - \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\right) = 8\cos^2 x \Leftrightarrow 3\left(1 - \frac{\cos^2 x}{1-\cos^2 x}\right) = 8\cos^2 x$

Пусть $t = \cos^2 x$, тогда ур-е примет вид:

$3\left(1 - \frac{t}{1-t}\right) = 8t \Leftrightarrow 3\left(\frac{1-t-t}{1-t}\right) = 8t \Leftrightarrow \begin{cases} 3(1-2t) = 8t(1-t) \\ t \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3-6t = 8t - 8t^2 \\ t \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8t^2 - 14t + 3 = 0 \\ t \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} t = \frac{3}{2} \\ t = \frac{1}{4} \end{array} \right. \\ t \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\sqrt{\frac{D}{4}} = \sqrt{49-24} = \sqrt{25} = 5$

$t = \frac{7 \pm 5}{8}$ $\left[\begin{array}{l} t = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} \\ t = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \end{array} \right.$

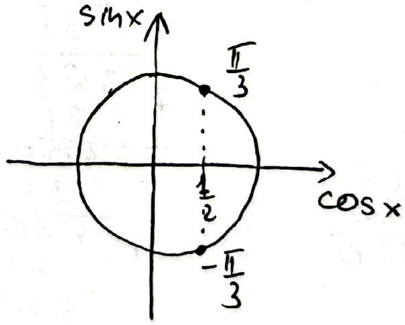
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{3}{2} \\ t = \frac{1}{4} \end{array} \right.$

Вернемся к x:

$\left[\begin{array}{l} \cos^2 x = \frac{3}{2} > 1 \text{ - нет реш.} \\ \cos^2 x = \frac{1}{4} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = \frac{1}{2} \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{array} \right.$

Вернемся к (*):

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \cos x = \frac{1}{2} \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{array} \right. \\ \cos x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$



$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$

Ответ: $x \in \left\{ \frac{\pi}{3} + 2\pi k; -\frac{\pi}{3} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Чистовик

№2.

Пусть число $\overline{abc}$ в А, тогда:

$\overline{abc} : (a+b+c) = 9k,\ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \overline{abc} = 9k(a+b+c) \vdots 9 \Rightarrow$

$\overline{abc} \vdots 9 \overset{\circledast}{\Rightarrow} a+b+c \vdots 9$ (Тогда $\overline{abc} = 9m,\ m \in \mathbb{Z}$

$\circledast$:

$\overline{abc} = 100a + 10b + c = 99a + 9b + (a+b+c) \vdots 9$ тогда,

По модулю 9:

$0 \underset{9}{\equiv} 99a + 9b + (a+b+c) \underset{9}{\equiv} a+b+c \Rightarrow a+b+c \vdots 9$

$\begin{cases} 99a \vdots 9 \\ 9b \vdots 9 \end{cases}$

(Если число делится на 9 => сумма его цифр делится на 9) =>

~~Пусть~~ Если $\overline{abc} = 9m,\ m \in \mathbb{Z}$, то $a+b+c = 9p,\ p \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{abc} : (a+b+c) = 9m : 9p = m : p = 9k \Rightarrow$ ($m, p, k \in \mathbb{Z}$)

$\Rightarrow m = 9p \cdot k \Rightarrow m \vdots 9 \Rightarrow m = 9l,\ l \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{abc} = 9m = 9 \cdot 9l = 81l \Rightarrow \overline{abc} \vdots 81 \Rightarrow$ любое число из А $\vdots 81$

Найдем все трехзначные числа, которые делятся на 81:

$81 \cdot 1 = 81 < 100$ ← не подходит

$81 \cdot 2 = \underline{162}$; $81 \cdot 3 = \underline{243}$; $81 \cdot 4 = \underline{324}$; $81 \cdot 5 = \underline{405}$; $81 \cdot 6 = \underline{486}$;

$81 \cdot 7 = 567$; $81 \cdot 8 = \underline{648}$; $81 \cdot 9 = 729$; $81 \cdot 10 = \underline{810}$; $81 \cdot 11 = 891$;

$81 \cdot 12 = \underline{972}$, $81 \cdot 13 = 1053 > 999$ ← не подходит; ← в А могут быть только эти трёхзначные числа

Проверим эти числа (посчитаем для них частное самого числа и его суммы цифр):

$162 : (1+6+2) = 81 \cdot 2 : 9 = 9 \cdot 2 \vdots 9$; $243 : (2+4+3) = 81 \cdot 3 : 9 = 9 \cdot 3 \vdots 9$;

$324 : (3+2+4) = 81 \cdot 4 : 9 = 9 \cdot 4 \vdots 9$; $405 : (4+5) = 81 \cdot 5 : 9 = 9 \cdot 5 \vdots 9$;

$486 : (4+8+6) = 81 \cdot 6 : 18 = 9 \cdot 3 \vdots 9$; $567 : (5+6+7) = 81 \cdot 7 : 18 \notin \mathbb{Z} \Rightarrow 567$ не в А.

$648 : (6+4+8) = 81 \cdot 8 : 18 = 9 \cdot 4 \vdots 9$; $729 : (7+2+9) = 81 \cdot 9 : 18 \notin \mathbb{Z} \Rightarrow 729$ не в А.

$810 : (8+1) = 81 \cdot 10 : 9 = 9 \cdot 10 \vdots 9$; $891 : (8+9+1) = 81 \cdot 11 : 18 \notin \mathbb{Z} \Rightarrow 891$ не в А.

$972 : (9+7+2) = 81 \cdot 12 : 18 = 9 \cdot 6 \vdots 9$; $\Rightarrow$

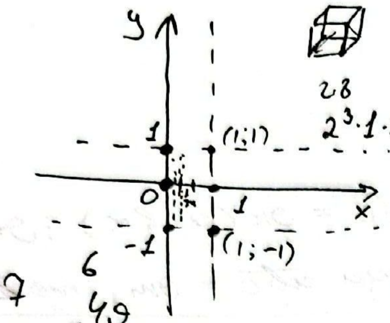
$\{162;\ 243;\ 324;\ 405;\ 486;\ 648;\ 810;\ 972\}$ — все трехзначные числа в А.

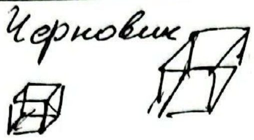
$162 + 648 + 972 = 1782$

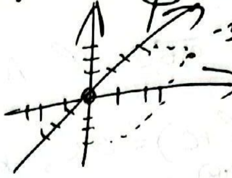
$$\begin{array}{r} 162 \\ +\ 648 \\ \hline 810 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 810 \\ +\ 972 \\ \hline 1782 \end{array}$$

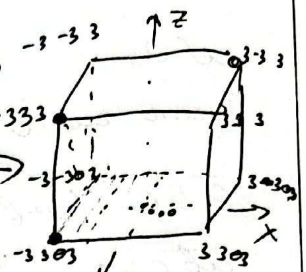
Ответ: 1782.

Черновик









28

$2^3 \cdot 1 \cdot 1$

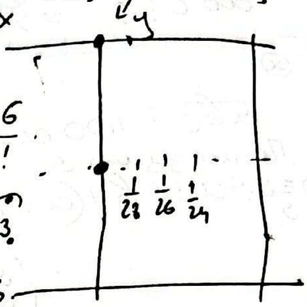
$y = \sin k\pi x$

$\sin 0$

$6174 \times 6 = 37044$

$\sin 11\pi x = \sin 13\pi x$

~~$11\pi x = 13\pi x$~~



7, 6

$49 \times 7 = 343$

$\frac{6}{3+x} = \frac{2}{x}$

$\frac{3}{3+x} = \frac{1}{x}$

$3x = 3 + x$

$3 = 2x$

$x = \frac{3}{2}$

$13x\pi = 1 - 15x$

$x = \frac{1}{28}$

343×343, 27744, 343

~~$11\pi x = \pi - 13$~~

$13\pi x = \pi - 11\pi x$

$13x = 1 - 11x$

$24x = 1$

$\frac{7 \cdot 6}{2!}$

49

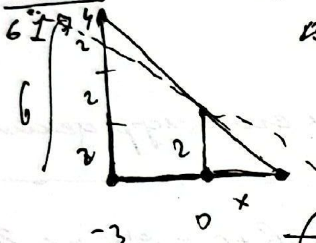
7^3

1) x, z: $6 \cdot 6$

$3 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 7^3$

$x_0 y_0 z_0$

$x_0 y_1 z_1$



$11x = 1 - 15x$

$x = \frac{1}{26}$

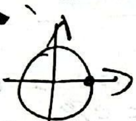
12348×3

$12348 \times 3 = 37044$

37044

$y = \sin \pi x$

$y = \sin k\pi x = \sin 11\pi x$



$343 \times 36 = 2058$, 12348

$3 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 7^3 = 1$

$49 \times 7 = 343$

$11\pi x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$

$11x = \frac{1}{2} + 2k$

$x = \frac{1}{22} + \frac{2}{11}k$

$3x^2 \log_a x - \cancel{\ldots} \log_x a - 2x \le 0$

$\frac{28}{11} < \frac{3}{2}$

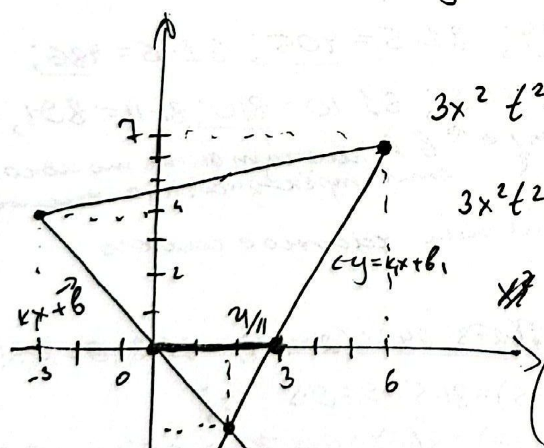
$3x^2 \log_a x - \frac{1}{\log_a x} - 2x < 0$

$-\frac{4}{3}x = \frac{7}{3}x - 7$

$-4x = 7x - 21$

$21 = 11x$

$x = \frac{21}{11}$



$3x^2 t^2 - 1 - 2xt$

$3x^2 t^2 - 2xt - 1 \le 0$

$x^2 - \frac{2x}{3t} - \frac{1}{3t^2} \le 0$

$\left(x - \frac{1}{3t}\right)^2 - \frac{1}{3t^2} - \frac{1}{9t^2} \le 0$

$-\frac{4}{9t^2}$

$0 < \left(x - \frac{1}{3t}\right)^2 \le \frac{4}{9t^2}$

$-\frac{4}{3} \cdot \frac{21}{11} = -\frac{4 \cdot 7}{11} = -\frac{28}{11}$

$\begin{cases} 4 = -3k + b \\ 0 = b \end{cases} \Rightarrow 4 = -3k \Rightarrow y = -\frac{4}{3}x$

$\left|x - \frac{1}{3t}\right| \le \left|\frac{2}{3t}\right|$

$\begin{cases} 7 = 6k_1 + b_1 \\ 0 = 3k_1 + b_1 \end{cases}$

$7 = 3k_1$

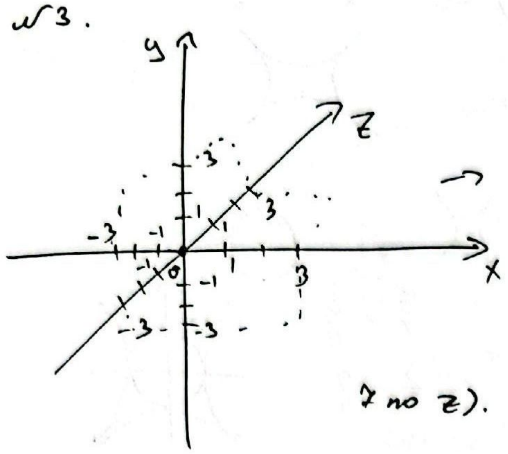
$k_1 = \frac{7}{3}$

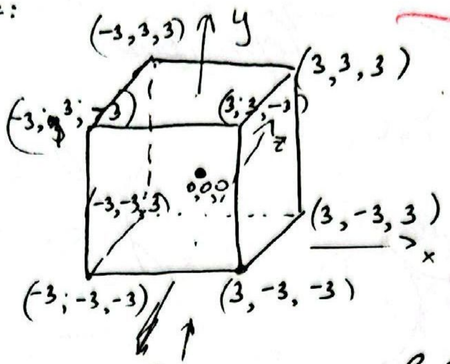
$0 = 7 + b_1$, $b_1 = -7$

$y_1 = \frac{7}{3}x + 7$

Чистовик:

№3.





Всего точек в F: $7\cdot7\cdot7=7^3$

(7 вар. по x коорд.: $(-3,-2,-1,0,1,2,3)$, 7 по y и 7 по z).

Посчитаем способы выбрать треуг.:

7^3 вар. выбрать вершину. По условию катеты паралл. осям коорд. => ровно одна коорд. отл. от верш. (~~при~~ треуг. не вырожден=>) => у одного катета отл. коорд. по одной оси, у второго по другой):

Разберем три случая, какие коорд. ~~на~~ меняются у двух катетов (одна у одного, вторая у другого):

1) x, y => коорд. верш мы знаем, у одного катета отличается только коорд. по x => выбрать эту верш 6 вар. (коорд. по y, z мы знаем, ~~вар~~ всего вар по x: 7, один занят вершиной (две верш. треуг не совп.) => 6 вар., аналогично по y ~~z~~ для второго катета => вар. выбрать треуг $\underset{\text{верш}}{7^3}\cdot\underset{x\ \text{катет}}{6}\cdot\underset{y\ \text{катет}}{6}$

2) x, z аналогично 1):

$7^3\cdot6\cdot6$ вар.

3) y, z аналогично 1): $7^3\cdot6\cdot6$ вар.

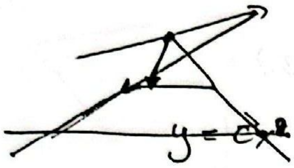
(Треуг. из 1), 2), 3) случ. не могут совпасть, т.к. если верш. разные, то они уже не совп., если верш. одна, и ~~двух~~ хотя бы 1 катет ~~нетп~~ паралл. разным осям (в 1 треуг. одной оси, во 2 другой), а второй одной оси (в 1), 2), 3) всегда есть ровно ~~одна~~ один. букв: {(x, y); (y; z) − y; (x, y); (z, x) − x; (y, z); (z; x) − z}, то треуг. не могут совпасть, т.к. будут выглядеть так (б.о.о.):

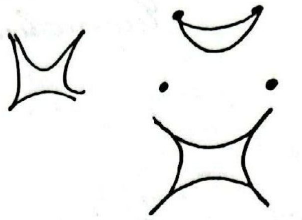
Тогда всего ~~вар~~ вар выбрать такой треуг:

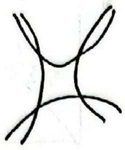
$7^3\cdot6\cdot6+7^3\cdot6\cdot6+7^3\cdot6\cdot6=3\cdot6\cdot6\cdot7^3=$ ~~30~~ 37044

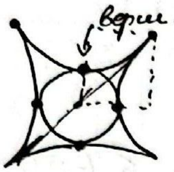
Ответ: 37044

Черновик:



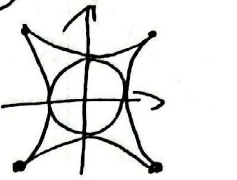






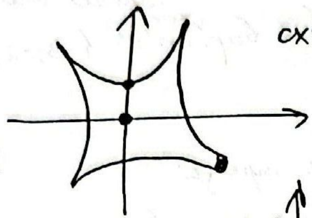
$\frac{15}{7} > \frac{21}{11}$

$\frac{5}{7} > \frac{7}{11}$



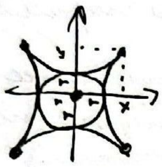
cx^2+r

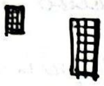
$x^2=y$
$y^2=x$
$y^4=y \quad y\neq 0$
$y=1$

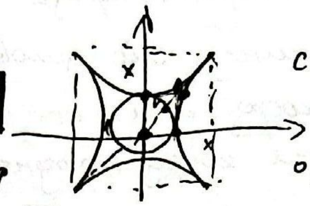


$55 > 49$

$1 = \sqrt{2}\cdot 2(r+x)$





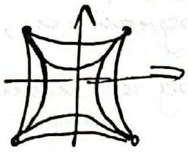


cx^2+r

$\frac{21}{11} > \frac{3}{2}$

$0{,}5$

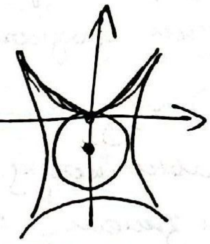
$42 > 33$



$c\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 + r = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

$r = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(1 - \frac{c}{2\sqrt{2}}\right)$ $\quad r+x = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

$\begin{cases} \sqrt{2}\cdot(r+x) = 0{,}5 \\ (r+x)^2\cdot c + r = (r+x)^2 \end{cases}$



$\boxed{r}$

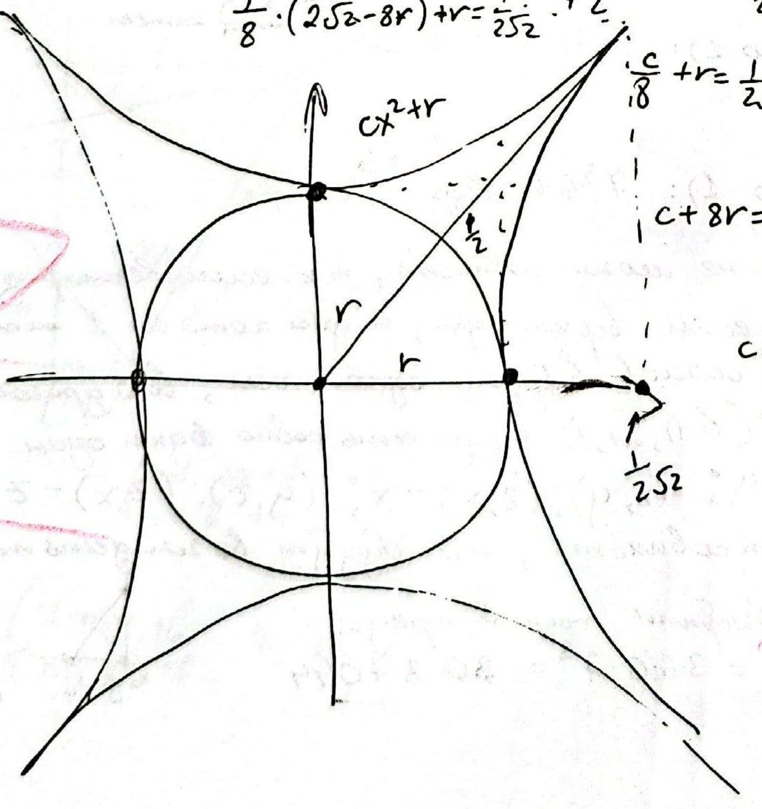
$\begin{cases} \sqrt{2}\cdot(r+x) = \frac{1}{2} \\ (r+x)^2\cdot(2\sqrt{2}-8r)+r = (r+x) \end{cases}$

$(r+x) = \frac{0{,}5}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

$\frac{1}{8}\cdot(2\sqrt{2}-8r)+r = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

$\frac{1}{4\cdot 2}\cdot c + r = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

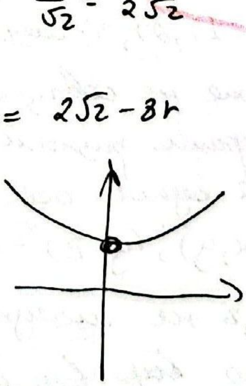
$\frac{1}{2} = \sqrt{2}\cdot x$
$x = \frac{1}{2\sqrt{2}}$



$\frac{c}{8} + r = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

$c + 8r = \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$

$c = 2\sqrt{2} - 8r$



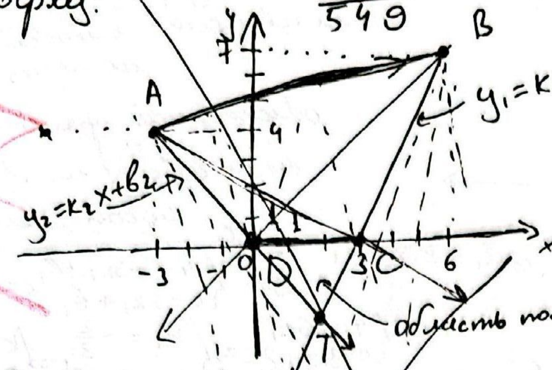
~~Чистовик~~: Черновик.

№6.

$13\frac{1}{14}$

$\times\frac{183}{3}$ 549 — $183\,|$ — $\times\frac{15}{7}$ 105 — $\times\frac{183}{3}$ 549

Вид сверху:



$y_1=k_1x+b_1$

$y_2=k_2x+b_2$

$+\frac{105}{36}$ 141

$\frac{183}{14}\cdot\frac{3}{2}=$

$=\frac{}{28}$

$\times\frac{14}{13}$ $+\frac{42}{14}$ 182

область полной тени (СВЕРХУ!)

$\frac{183}{14}$

B,C

$y_1:\begin{cases}7=6k_1+b_1\\0=3k_1+b_1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}7=3k_1\\0=3k_1+b_1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k_1=\frac{7}{3}\\0=\frac{7}{3}\cdot 3+b_1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k_1=\frac{7}{3}\\b_1=-7\end{cases}\Rightarrow y_1=\frac{7}{3}x-7$

A,D

$y_2:\begin{cases}4=-3k_2+b_2\\0=0\cdot k_2+b_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4=-3k_2\\b_2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k_2=-\frac{4}{3}\\b_2=0\end{cases}\Rightarrow y_2=-\frac{4}{3}x$

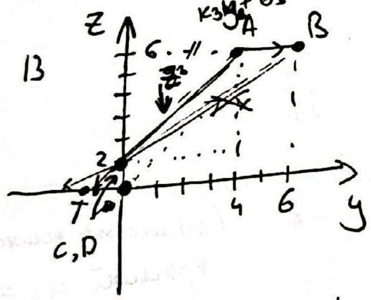
$y_1\cap y_2$: $\frac{7}{3}x-7=-\frac{4}{3}x\Leftrightarrow 7x-21=-4x\Leftrightarrow 11x=21\Leftrightarrow x=\frac{21}{11}$

подст. в ур. y_2: $-\frac{4}{3}\cdot\frac{21}{11}=-\frac{4\cdot 7}{11}=-\frac{28}{11}\Rightarrow$ коорд. T: $\left(\frac{21}{11};-\frac{28}{11}\right)$

Вид сбоку: ||

$19\frac{17}{28}$ 13

$\times\frac{280}{2}$ 560



$z_3\cap Oy=E$:

A,C

z_3: $\begin{cases}6=4k_3+b_3\\2=0\cdot k_3+b_3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6=4k_3+2\\b_3=2\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}k_3=1\\b_3=2\end{cases}\Rightarrow z_3=1y_3+2\Rightarrow$

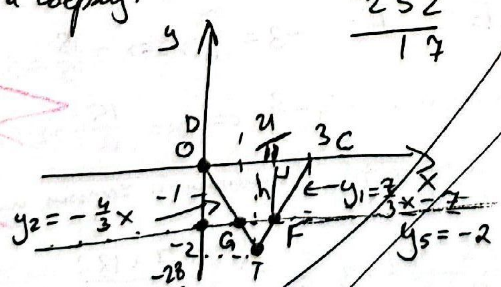
$\Rightarrow$ коорд. т. E: $0=y_1+2\Leftrightarrow y_1=-2\Rightarrow$

$\Rightarrow$ коорд. $E(-2;0)$

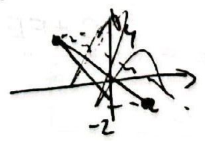
$549\,|\,28$; -28; 19; 269; -252; 17

$\times\frac{28}{9}$ 252

Вид сверху:



Все ниже прямой $y_5=-2$ точки A будут освещать



Найдем координаты точек G, F: G: $-\frac{4}{3}x=-2\Leftrightarrow x=\frac{2\cdot 3}{4}=\frac{3}{2}\Rightarrow G\left(\frac{3}{2};-2\right)$,

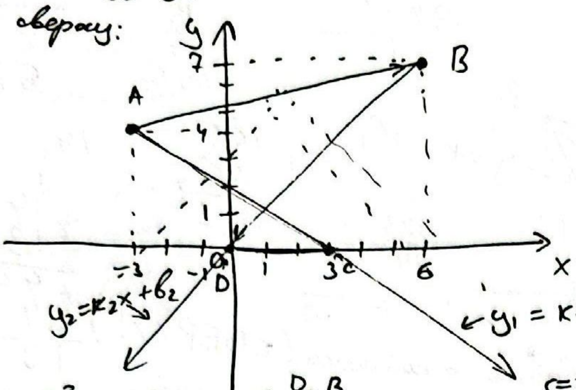
F: $-2=\frac{7}{3}x-7\Leftrightarrow\frac{7}{3}x=5\Leftrightarrow x=\frac{15}{7}\Rightarrow F:\left(\frac{15}{7};-2\right)$, $GF\parallel OC\Rightarrow$

$\Rightarrow$ OCFG — трап. ($GO\cap FC=T$) $\Rightarrow S_{OCFG}=\frac{OC+GF}{2}\cdot h=$ h высота из F на OC

$=\frac{3+\left(\frac{15}{7}-\frac{3}{2}\right)}{2}\cdot 2=3+\left(\frac{30-21}{14}\right)=3+\frac{9}{14}=3\frac{9}{14}$ Ответ: $3\frac{9}{14}$

№6. Чистовик:

Вид сверху:



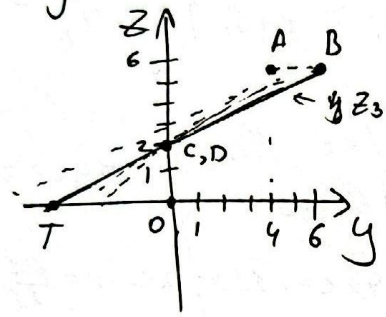
область над прямой y_2 была освещена в любой момент, область над прямой y_1 была освещена в любой момент.

A, C

$y_1: \begin{cases}4=-3k_1+b_1\\ 0=3k_1+b_1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4=-6k_1\\ 0=3k_1+b_1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}k_1=-\frac{2}{3}\\ 0=-2+b_1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}k_1=-\frac{2}{3}\\ b_1=2\end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow y_1=-\frac{2}{3}x+2$; D, B $y_2: \begin{cases}0=0k_2+b_2\\ 7=6k_2+b_2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b_2=0\\ k_2=\frac{7}{6}\end{cases} \Rightarrow y_2=\frac{7}{6}x$

Вид сбоку:



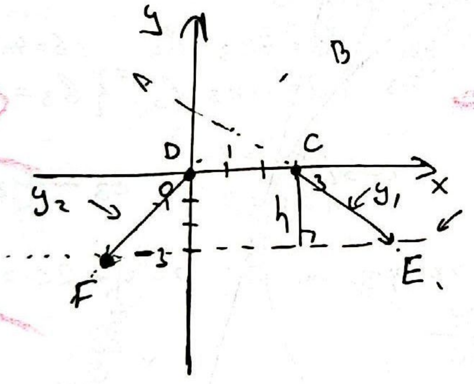
Область (на оси y), слева от T была освещена в любой момент:

B, C:

$z_3: \begin{cases}6=6k_3+b_3\\ 2=0k_3+b_3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4=6k_3\\ b_2=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}k_3=\frac{2}{3}\\ b_3=2\end{cases} \Rightarrow z_3=\frac{2}{3}y+2$

координаты т. T: $0=\frac{2}{3}y+2 \Leftrightarrow -2=\frac{2}{3}y \Leftrightarrow y=-3 \Rightarrow T(-3;0)$

Вид сверху:



$y_3=-3$ (область ниже прямой $y_3=-3$ освещена в любой момент)

Найдём координаты точек F, E: F: $-3=\frac{7}{6}x \Leftrightarrow -\frac{18}{7}=x \Rightarrow F\left(-\frac{18}{7};-3\right)$; E: $-3=-\frac{2}{3}x+2 \Leftrightarrow -5=-\frac{2}{3}x \Leftrightarrow x=\frac{15}{2} \Rightarrow E\left(\frac{15}{2};-3\right)$

$y_1 \cap y_2 \neq \varnothing$

$FE \parallel DC \Rightarrow DCEF$ — трапец. S_{DCEF} — площадь затенённой части пустыря:

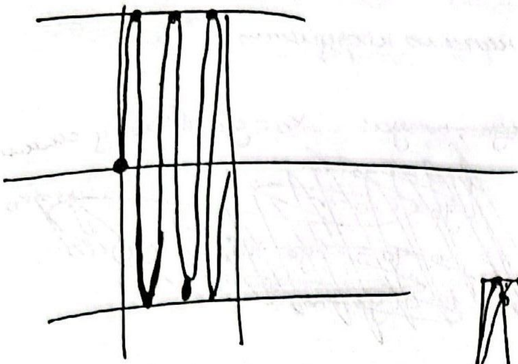
$S_{DCEF}=\frac{DC+FE}{2}\cdot h$ — высота из C на FE (= 3)

$=\frac{(3-0)+\left(\frac{15}{2}-\left(-\frac{18}{7}\right)\right)}{2}\cdot 3=\frac{3+\frac{15\cdot 7+18\cdot 2}{14}}{2}\cdot 3=$

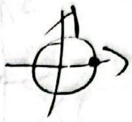
$=\frac{3+\frac{105+36}{14}}{2}\cdot 3=\frac{3+\frac{141}{14}}{2}\cdot 3=\frac{3+10+\frac{1}{14}}{2}\cdot 3=\frac{13\frac{1}{14}}{2}\cdot 3=\frac{183\cdot 3}{14\cdot 2}=\frac{549}{28}=19\frac{17}{28}$

Ответ: $19\frac{17}{28}$

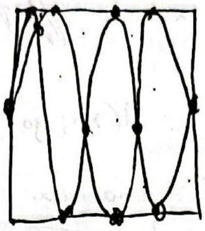
Черновик:

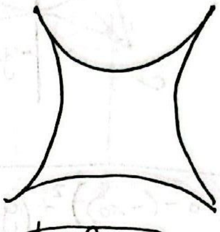


$y = \sin k\pi x$



13

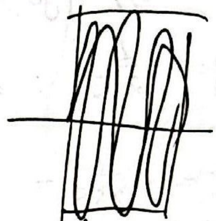




$k = 11$

$\frac{\pi}{2} + 2\pi m = k\pi x$

$\frac{1}{2} + 2m = kx \quad x = \frac{1}{11} + \frac{2}{11}m$



$+12$
$+13$
$+14$
39

$3x^2 \log_a x - \log_x a - 2x \le 0$

$8 \cdot 12 = 96$

$5 \cdot 12 = 60$

48

$3x^2 \log_a x - \frac{1}{\log_a x} - 2x \le 0$

$3x^2 t - \frac{1}{t} - 2x \le 0 \quad 3x^2t^2 - 1 - 2xt \le 0$

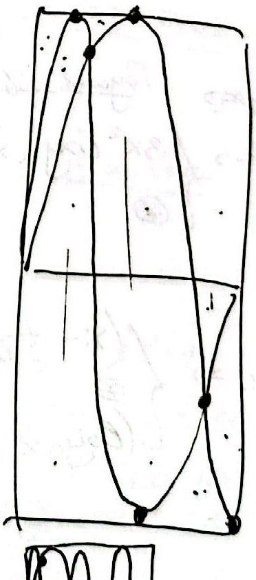
$x^2 - \frac{2x}{3t} - \frac{1}{3t^2} \le 0$

$+11$
$+13$
$+15$
39

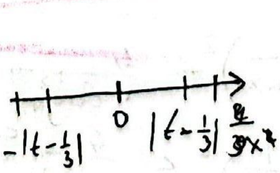
$\frac{1}{3} = \frac{3}{9t^2}$

$\left(x - \frac{1}{3t}\right)^2 - \frac{1}{3t^2} - \frac{1}{9t^2} \le 0 \qquad \left|t - \frac{1}{3}\right| \le \frac{2}{3x}$

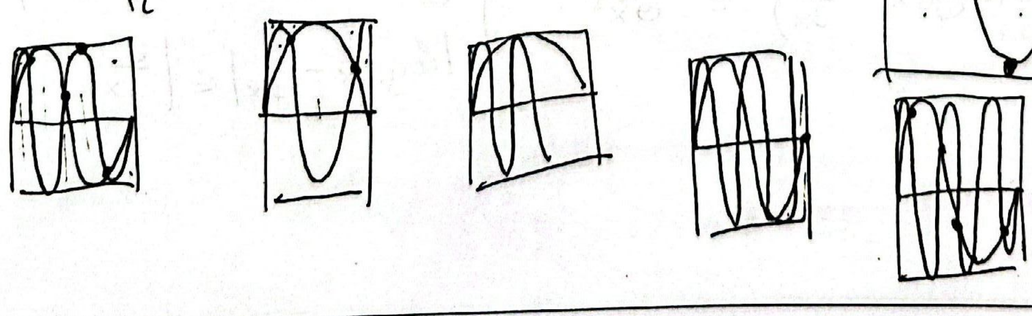
$\left(x - \frac{1}{3t}\right)^2 \le \frac{4}{9t^2}$



$t^2 - \frac{2t}{3x} - \frac{1}{3x^2} \le 0 \Leftrightarrow \left(t - \frac{1}{3x}\right)^2 \le \frac{4}{9x^2}$

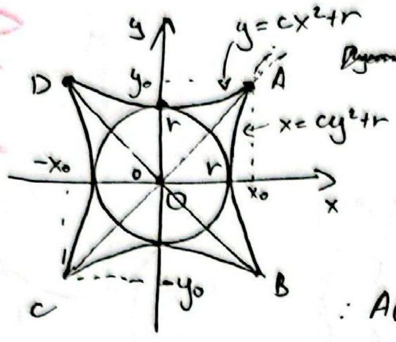


12



Чистовик:

№5. Поместим центр окр. в начало координат



~~Пусть $x_0=y_0$, тогда:~~ $x_0=y_0$ в силу симм.:

: $A(x_0;y_0)$, $C(-x_0,-y_0)$:

$AC=1$ по усл. $\Rightarrow AO=OC=\frac{1}{2}$,

$1=\sqrt{(x_0-(-x_0))^2+(y_0-(-y_0))^2}=\sqrt{4x_0^2+4y_0^2}=2\sqrt{x_0^2+y_0^2}\overset{x_0=y_0}{=}2\sqrt{2x_0^2}=2\sqrt{2}x_0\Rightarrow$

$\Rightarrow x_0=y_0=\frac{1}{2\sqrt{2}}$: $\Rightarrow c\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2+r\overset{т.A}{=}\frac{1}{2\sqrt{2}}\Rightarrow$

$= r=\frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{c}{4\cdot 2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{c}{8}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 8r=\frac{8}{2\sqrt{2}}-c=\frac{4\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}-c=2\sqrt{2}-c\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow r=\frac{2\sqrt{2}-c}{8}$

Ответ: $\frac{2\sqrt{2}-c}{8}$

№8.

$3x^2\log_a x-\log_x a-2x\le 0\Rightarrow (*)\begin{cases}a>0\\x>0\\a\ne 1\\x\ne 1\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}3x^2\log_a x-\frac{1}{\log_a x}-2x\le 0\\(*)\end{cases}\Leftrightarrow$

~~Пусть $b=$~~

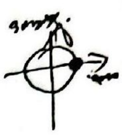
$\Leftrightarrow\begin{cases}3x^2\log_a^2 x-1-2x\log_a x\le 0\\(*)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-\frac{2x}{3\log_a x}-\frac{1}{3\log_a^2 x}\le 0\\(*)\\\log_a^2 x-\frac{2\log_a x}{3x}-\frac{1}{3x^2}\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\left(x-\frac{1}{3\log_a x}\right)^2\le\frac{4}{9\log_a^2 x}\\(*)\\\left(\log_a x-\frac{1}{3x}\right)^2\le\frac{4}{9x^2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left|x-\frac{1}{3\log_a x}\right|\le\left|\frac{2}{3\log_a x}\right|\\(*)\\\left|\log_a x-\frac{1}{3x}\right|\le\left|\frac{2}{3x}\right|\end{cases}$

Чистовик.

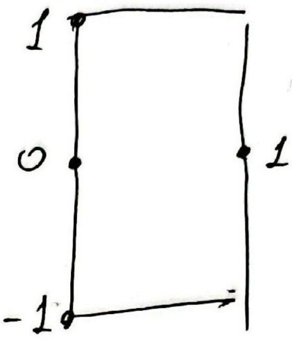
№4.

Каждое касание сторон полоски или друг друга (графиков): +1 часть => n точек пересечений => n+1 часть



если в одной точке 2 кас. – все равно +1 часть.

$y = \sin k\pi x$



1) $k_1 = 11$: $y_1 = \sin 11\pi x$ (в т. $x=0$: $y_1 = 0$)

кас с сторонами: (в $x=0$, $x=1$) – 2 ч:

$n, m \in \mathbb{Z}$

$$\left[\begin{aligned} 11\pi x &= \frac{\pi}{2} + 2\pi m_1 \\ 11\pi x &= -\frac{\pi}{2} + 2\pi n_1 \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} 11x &= \frac{1}{2} + 2m_1 \\ 11x &= -\frac{1}{2} + 2n_1 \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} x &= \frac{1}{22} + \frac{2}{11}m_1 \\ x &= -\frac{1}{22} + \frac{2}{11}n_1 \end{aligned}\right.$$

2) $k_2 = 13$ $y_2 = \sin 13\pi x$ (в т $x=0$: $y_2 = 0$)

аналогично:

$$\left[\begin{aligned} x &= \frac{1}{26} + \frac{2}{13}m_2 \\ x &= -\frac{1}{26} + \frac{2}{13}n_2 \end{aligned}\right.$$

($\cancel{y\ \sin 11\pi \neq \sin}$

$\sin 11\pi = \sin 13\pi = \sin 15\pi$

т. $x=0$ и $x=1$ посчитаны)

3) $k_3 = 15$, $y_3 = \sin 15\pi x$ (в т $x=0$; $y_3 = 0$)

аналогично:

$$\left[\begin{aligned} x &= \frac{1}{30} + \frac{2}{15}m_3 \\ x &= -\frac{1}{30} + \frac{2}{15}n_3 \end{aligned}\right.$$

В случае 1: $\frac{1}{22} + \underbrace{\frac{2}{11}m_1}_{=\frac{4}{22}m_1} \in [0;1) \Rightarrow m_1 \in [0;5]$, нет одинаковых

$-\frac{1}{22} + \underbrace{\frac{2}{11}n_1}_{=\frac{4}{22}n_2} \in (0;1) \Rightarrow n_2 \in [1;5]$ – 11 т. кас.

В случае 2: $\frac{1}{26} + \underbrace{\frac{2}{13}m_2}_{=\frac{4}{26}m_2} \in (0;1) \Rightarrow m_2 \in [0;6]$

$-\frac{1}{26} + \frac{4}{26}n_2 \in (0;1) \Rightarrow n_2 \in [1;6]$ – 13 т. кас

В случае 3: $\frac{1}{30} + \frac{4}{30}m_3 \in (0;1) \Rightarrow m_3 \in [0;7]$

$-\frac{1}{30} + \frac{4}{30}m_3 \in (0;1) \Rightarrow n_3 \in [1;7]$ – 15 т. кас.

пересечения y:

$y_1 \cap y_2$: $\left[\begin{aligned} 11\pi x &= 13\pi x \text{ – нет реш} \\ 11\pi x &= 2\pi l + \pi - 13\pi x \end{aligned}\right. \Leftrightarrow 11x = 2l + 1 - 13x \Leftrightarrow 24x = 2l+1 \Leftrightarrow x = \frac{2l+1}{24} \in (0;1) \Rightarrow l \in [0;11]$ – 12 т.

$y_1 \cap y_3$: аналогично; $x = \frac{2l+1}{26} \Rightarrow l \in [0;12]$ – 13 т

$y_2 \cap y_3$: $x = \frac{2l+1}{28} \Rightarrow l \in [0;13]$ – 14 т.

$11+13+15+12+13+14+2+1 = 39+39+2+1 = 81$

Ответ: 81 ~~частей~~.