0 258527 720004

25-85-27-72
(124.16)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 11 класс

Место проведения г. Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Ломоносов"
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Максимова Татьяна Алексеевна
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«29» марта 2026 года

Подпись участника

100(80) физик Абдулвоб

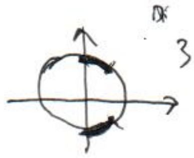
25-85-27-72 (124.16)

ЧИСТОВИК

1. $\sqrt{3(1-\operatorname{ctg}^2 x)} = 2\sqrt{2}\cos x$

ОДЗ: $2\sqrt{2}\cos x \geq 0$

$\cos x \geq 0$



$3(1-\operatorname{ctg}^2 x) \geq 0$

$\operatorname{ctg}^2 x \leq 1$

$|\operatorname{ctg} x| \leq 1$

$3(1-\operatorname{ctg}^2 x) = 8\cos^2 x$

$3 - 3\operatorname{ctg}^2 x - 8\cos^2 x = 0$

$3 - 3\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} - 8\cos^2 x = 0 \quad |\cdot \sin^2 x \quad (\sin x \neq 0$ т.к. $|\operatorname{ctg} x| \leq 1)$

$3\sin^2 x - 3\cos^2 x - 8\sin^2 x\cos^2 x = 0$

$-3\cos 2x - 2\sin^2 2x = 0$

$2\sin^2 2x + 3\cos 2x = 0$

$2 - 2\cos^2 2x + 3\cos 2x = 0$

$2\cos^2 2x - 3\cos 2x - 2 = 0$

замена $t = \cos 2x \quad -1 \leq t \leq 1$

$2t^2 - 3t - 2 = 0$

$t_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \frac{3 \pm 5}{4} = -\frac{1}{2}; 2$

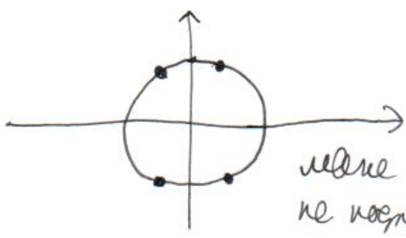
не подходит

$t = -\frac{1}{2}$

$\cos 2x = -\frac{1}{2}$

$2x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \ k \in Z$

$x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k, \ K \in Z$



нижние 2 точки не подходят по ОДЗ (т.к. там cos отриц.)

$\Downarrow$

$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \ n \in Z$

ЧИСТОВИК

2. Обозначим какое-то число из A как n; сумма цифр n и n имеют одинаковый остаток от деления на 9 (назовем его t).

$n=9k_1+t$

сумма цифр n — $S=9k_2+t$

$$\frac{n}{S}=9k_3=\frac{9k_1+t}{9k_2+t}$$

$$9k_3(9k_2+t)=9k_1+t$$
$$\Downarrow$$
$$t\,\vdots\,9$$
$$\Downarrow$$
$$n\,\vdots\,9$$

пусть $n=9k_1$

$S=9k_2$

$$\frac{n}{S}=\frac{k_1}{k_2}\in\mathbb{N}$$

$$\frac{k_1}{k_2}\,\vdots\,9$$
$$\Downarrow$$
$$k_1\,\vdots\,9$$
$$\Downarrow$$
$$n\,\vdots\,81$$

n	S	$\frac{n}{S}$
81	9	9
162	9	18
243	9	27
324	9	36
405	9	45
486	18	27
567	18	$\frac{63}{2}\notin\mathbb{N}$
648	18	36
729	18	$\frac{81}{2}\notin\mathbb{N}$
810	9	90
891	18	$\frac{99}{2}\notin\mathbb{N}$
972	18	54

Тогда 3-ти значные числа, входящие в A —

1е	2е	3е	4е	5е	6е	7е	8-е
162	243	324	405	486	648	810	972

ЧИСТОВИК

$\sum$ 2-го, 5-го и предпоследнего $= 243 + 486 + 810 = 1539$

~~3. Выберем 2 оси, которым будут параллельны наши катеты (C_3^2 способов); для ~~катета~~ катета (1-20) есть $5\cdot 2+1 = 11$ вариантов выбрать 1-й конец и 10 — 2-й (т.е. всего C_{11}^2 вар. выбрать который катет). Так как оба катета лежат в одной плоскости (иначе треугольник не получится), и у них должна быть одна общая вершина (т.е. когда мы выбрали 1-й катет, 2-й должен начинаться в 1-й из вершин 1-20), то у нас есть $2\cdot C_{10}^1$ вариантов выбрать 2-й катет. Когда мы выбрали оба катета, мы можем „сдвигать" треугольник по 3-й оси (которая не параллельна ни одному из катетов). Это сделать есть 11 вариантов. Итого вариантов выбрать треугольник — $3\cdot C_{11}^2\cdot 2\cdot 10\cdot 11$~~

Т.к. 2 катета параллельны 2-м осям, то сначала мы выбираем плоскость, в которой будем строить треугольник (C_3^2 способов). Когда мы выбрали плоскость у нас есть квадрат 11×11 точек. В нем нужно выбрать 3 точки так, чтобы они образовывали прямоугольный треугольник. Будем выбирать те 2, которые не являются вершинами прямого угла (т.е. они не лежат на 1-й прямой). 1-ю можно выбрать $11\cdot 11 = 121$ способами. 2-ю — $11\cdot 11 - 1 - 2\cdot 10 = 100$ способами (т.к. она не может находиться на 1-й прямой с 1-й). Тогда выбрать пару таких точек есть $\frac{121\cdot 100}{2} = 121\cdot 50$ вариантов. Для каждой пары вершину прямого угла можно выбрать 2-мя способами. Т.е. всего построить треугольник в выбранной плоскости есть $121\cdot 50\cdot 2$ вар. Для каждой пары осей есть 11 вариантов, как расположить заданный треугольник относительно 3-ей оси (т.е. мы можем „сдвигать" его вдоль неё). Тогда всего вариантов — $3 \cdot 121 \cdot 50 \cdot 2 \cdot 11 \overset{?}{=} \cancel{2 \cdot 11^2} \cdot$

$\cdot \cancel{5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 11^3 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 11^2 \cdot 3 = 110^2 \cdot 3 = 12100 \cdot 3 = 36300} \overset{?}{=} 3 \cdot 11^2 \cdot$

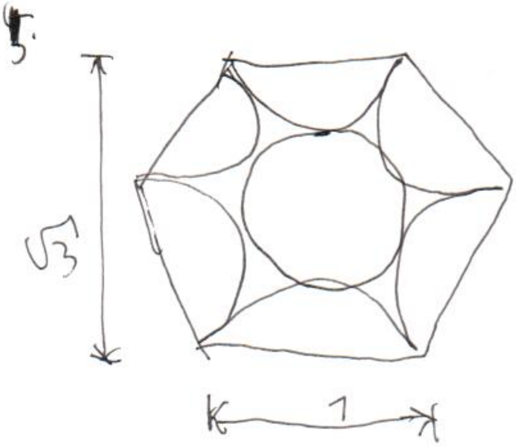
$\cdot 2 \cdot 5^2 \cdot 2 \cdot 11 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 11^3 = 4 \cdot 3 \cdot 25 \cdot 1331 =$

$= 100 \cdot 3993 =$

$= 399300$

ЧИСТОВИК (то что сверху - тоже чистовик)

5.

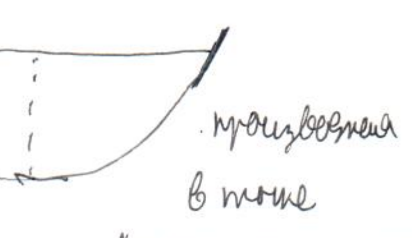


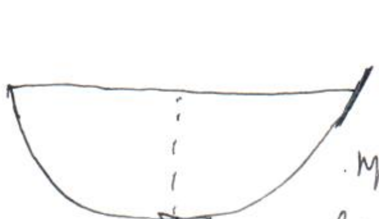
В ~~6-ти~~ шестиугольнике со стороной 1 расстояние между 2-мя параллельными сторонами будет равно $\sqrt{3}$ (по теореме косинусов)

$L = \sqrt{1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cos 120} =$

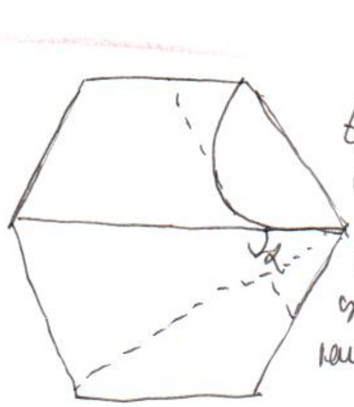
$= \sqrt{2+1} = \sqrt{3}$

Симметрии одна из парабол





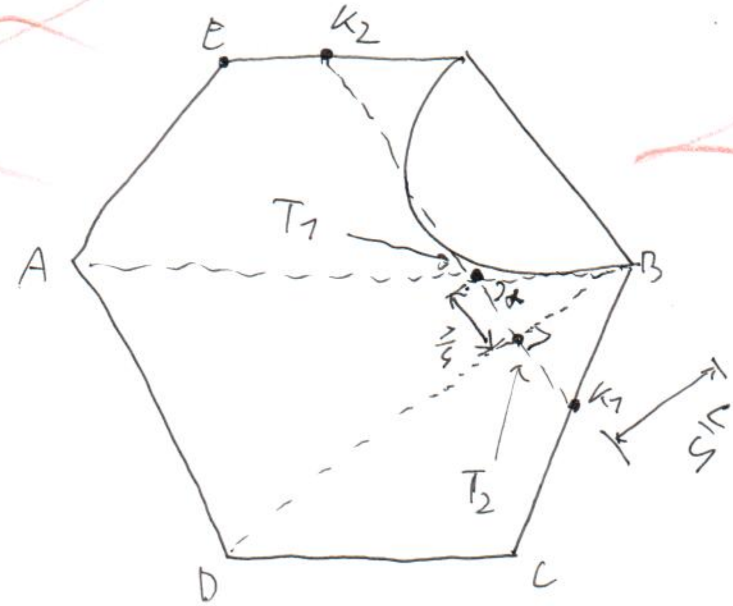
производная в точке касания со стороной равна $2cx = c$



$tg\alpha = c$ (производная) это tg угла наклона касательной;

касательная проходит через центр окружности в силу симметрии картинки

ЧИСТОВИК



$tg\,\alpha = C$

⇓

отношение на высоте (T_1T_2) отрезок равен $\frac{1}{4}$

шестиугольник правильный $\Rightarrow \angle ABC = 60^\circ$

$\angle DCB = 120^\circ \Rightarrow \angle DBC = 30^\circ$

⇓ $\angle DBA = 30^\circ$

$T_1T_2 = T_2K_1 = \frac{1}{4}$

аналогично с другой стороны находим; тогда $K_1K_2 =$

$= 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1{,}5$, т.е.

K_1K_2 – сред. линия трапеции

$CE \Rightarrow K_1, K_2$ – середины

соотв. сторон (также

$\angle DBC = 30^\circ$, $T_2K_1 = \frac{1}{4} \Rightarrow$

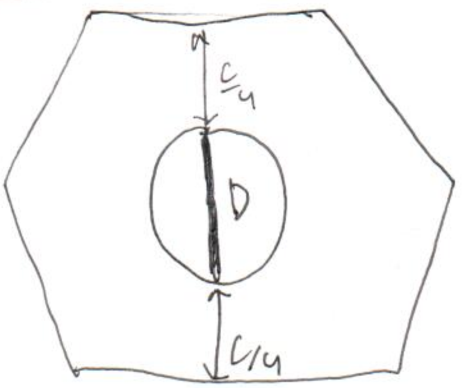
$\Rightarrow BK_1 = \frac{1}{2}$)

кв.ур. через

↓ ~~параболы~~ x^2

$BT_2 = \frac{C}{4} = BK_1 \cdot \cos 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{C}{4} \Rightarrow C = \sqrt{3}$

ЧИСТОВИК

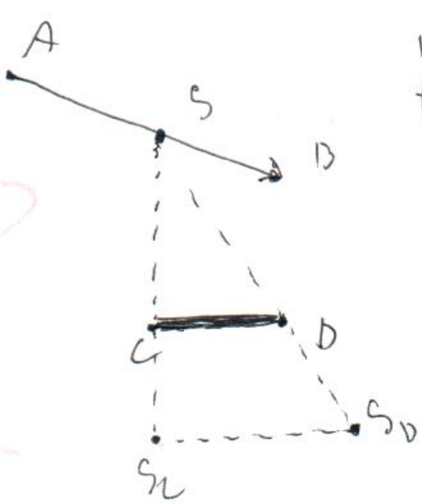


$$D=\sqrt{3}-2\cdot\frac{c}{4}=\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

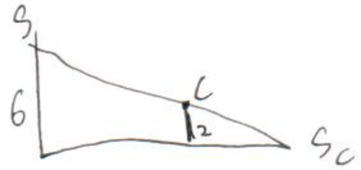
диаметр окр

радиус окр. – $R=\frac{D}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$

6.



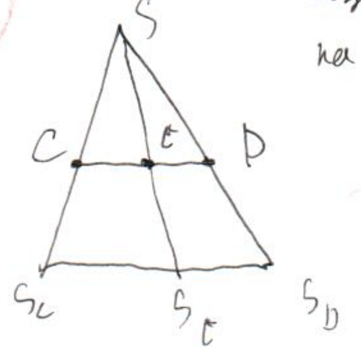
т.к. светлячок летит на высоте 6м, а высота забора – 2м



расстояние по земле от S до C будет в 2 раза больше расстояния по земле от C до Sc (по подобию треугольников)

ЧИСТОВИК

рассмотрим Δ SS_cS_D (S_c и S_D - границы тени от точек C и D соотв.)



Возьмем некую-либо точку E на заборе

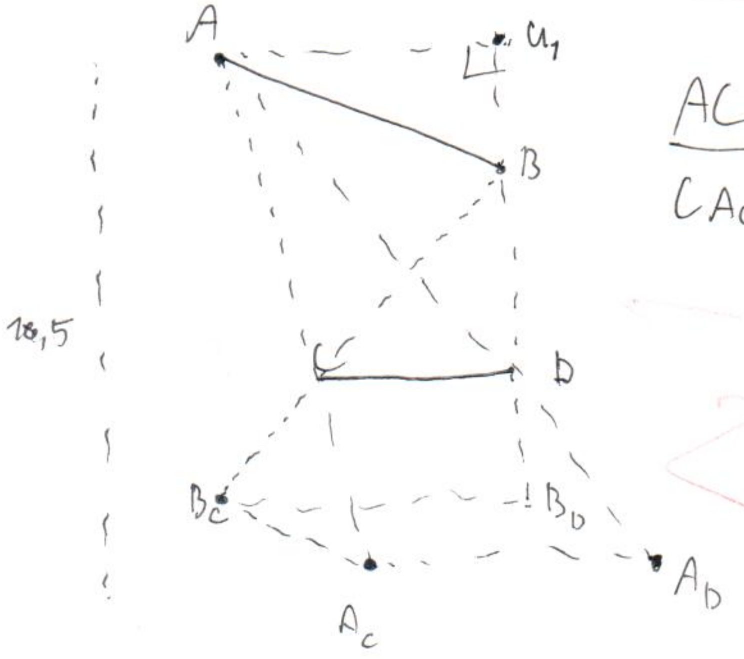
$$\frac{CS}{CS_C} = \frac{ES}{ES_E} = \frac{DS}{DS_D}$$

⇓

$S_C \parallel S_D$, и S_E

всегда лежит на S_CS_D

т.к. в любой момент времени тень будет представлять из себя трапецию



$$\frac{AC}{CA_C} = 2 = \frac{BC}{CB_C}$$

$\angle ACB = \angle B_CCA_C$ (накрестлежащие)

⇓

$S_{\triangle ABC} = 4S_{\triangle CB_CA_C}$

$S_{CDA_CA_D} = S_{AA_CA_D} - S_{ACD}$

Затененная область — $SDA_DA_CB_C$ (по мере движения светлячка из A в B (прямолинейно), A_C будет переходить в B_C)

ЧИСТОВИК

$S_{\text{затемненное}} = S_{CB_cA_c} + S_{CDA_cA_b}$

~~$S_{\triangle ABC} = \frac{5\cdot 3}{2} = 7,5$~~ $S_{ACD} = \frac{7\cdot 3}{2} = 10,5$

высота $\triangle AA_cA_b$ равна 10,5 $(7\cdot 1 + 7\cdot\frac{1}{2})$, $A_cA_b =$

$= 1,5\, CD = 4,5$

$S_{\triangle AA_cA_b} = \frac{10,5\cdot 4,5}{2}$

$S_{ABC} = S_{CDA_1A}$

$S_{CDA_cA_b} = \frac{10,5\cdot 4,5}{2} - 10,5 =$

$S_{\square} - S_{ABA_1} - S_{BCD} =$

$= \frac{\frac{21}{2}\cdot\frac{9}{2}}{2} - \frac{21}{2} =$

$= \frac{(6+3)\cdot 7}{2} - \frac{2\cdot 6}{2} - \frac{3\cdot 5}{2} =$

$= \frac{63-12-15}{2} = 18$

$= \frac{21\cdot 9}{8} - \frac{84}{8} =$

$= \frac{105}{8}$

$S_{CB_cA_c} = \frac{18}{4} = 4,5 = \frac{36}{8}$

~~$S_{CB_cA_c} = \frac{7,5}{4} = \frac{\frac{15}{2}}{4} = \frac{15}{8}$~~

~~$S_{\text{затемненное}} = \frac{39}{8}$~~ ~~$S_{\text{затемненное}} = \frac{105}{8} + \frac{15}{8} = 15$~~

ЧИСТОВИК

$S_{\text{закрашенное}} = \frac{105}{8} + \frac{36}{8} = \frac{141}{8}$

8. $8x^2 \log_a x - \log_x a - 2x \leq 0$

ОДЗ: $x \neq 1$, $a \neq 1$
$x > 0$, $a > 0$

$8x^2 \log_a x - \frac{1}{\log_a x} - 2x \leq 0$

$8x^2 \log_a^2 x - 2x \log_a x - 1 \leq 0$

замена $t = 2x \log_a x$

$2t^2 - t - 1 \leq 0$

$t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = -1; 2$

~~1) $2x \log_a x = -1$~~

~~2) $2x \log_a x = 2$~~

$t \in [-1; 2]$

$-1 \leq 2x \log_a x \leq 2$ при $a > 1$

$f(x) = 2x \log_a x$ – возраст. функция (т.к. $2x$ и $\log_a x$ – обе возрастают)

$\Downarrow$

при $a > 1$ решением будет либо

ЧИСТОВИК

отрезок, либо отрезок без точки $x=1$

$\Downarrow$

$a<1$

$$\begin{cases} -1 \le 2x\log_a x \\ 2x\log_a x \le 2 \end{cases}$$

$$f(x) = 2x\log_a x =$$

$$= 2x\frac{\ln x}{\ln a} = \frac{1}{\ln a}\, 2x\cdot\ln x$$

$$\cancel{f'(x) = 2\frac{\ln x}{\ln a} + 2x\cdot\frac{1}{x\ln a} = 2\frac{\ln x}{\ln a} + \frac{2}{\ln a}}$$

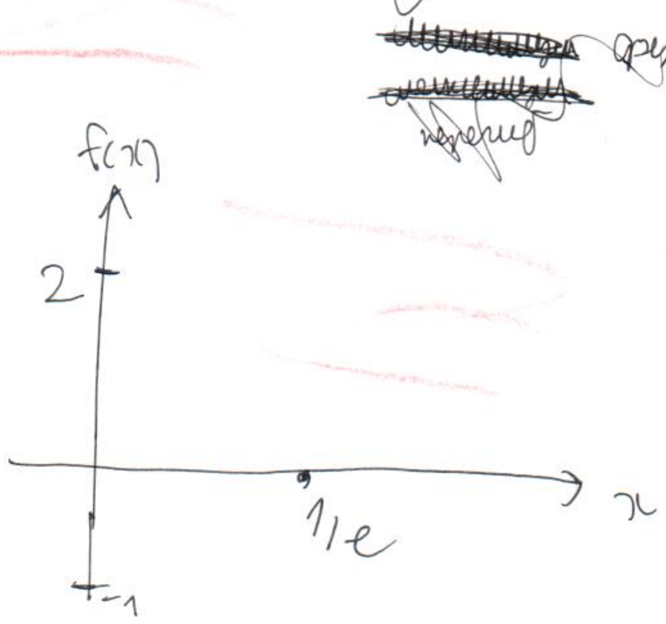
$$f'(x) = \frac{1}{\ln a}\cdot\left(2\ln x + 2x\cdot\frac{1}{x}\right) = 0$$

$\ln x = -1$

$x = \frac{1}{e}$

$\Downarrow$

~~функция~~

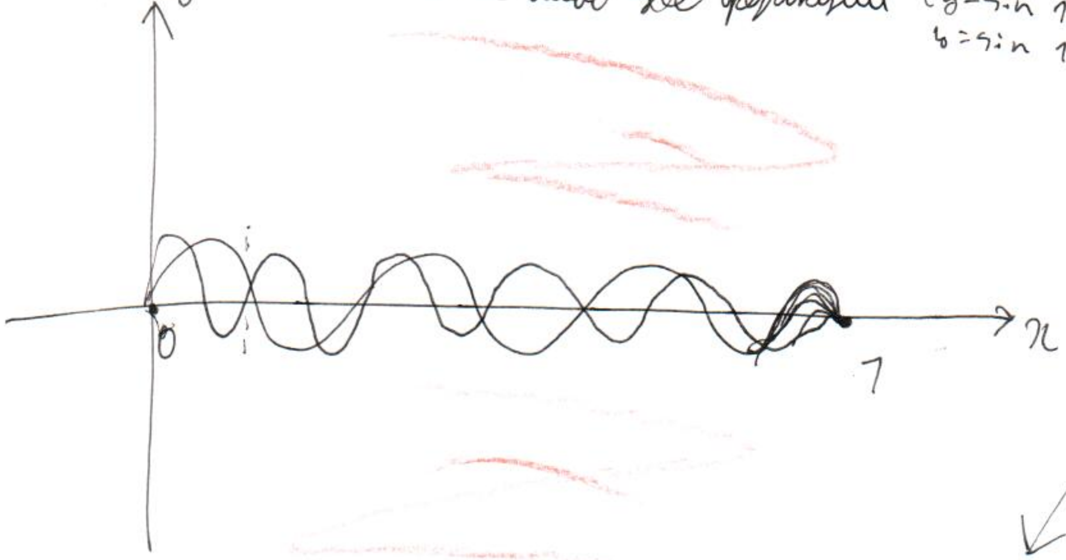


ПРОДОЛЖЕНИЕ ДАЛЬШЕ (ПОСЛЕ ЗАДАЧИ 4)

ЧИСТОВИК

4\. 13, 15, 17 – взаимно простые числа

кроме лишь две функции ($y=\sin 13\pi x$, $y=\sin 15\pi x$, $y=\sin 17\pi x$)



могут быть равны 0 одновременно только при $x=0$, $x=1$

рассмотрим функцию $y=\sin 17\pi x$; на каждом промежутке, где она изменяется от -1 до 1 или наоборот она пересекает оставшиеся 2 функции ровно по 1 разу. Каждая точка пересечения увеличивает кол-во областей на графике на 1. Тогда $y=\sin 17\pi x$ имеет 8 промежутков от -1 до 1 или наоборот, и тогда точек пересечения будет $8\cdot 2$; аналогично для 2-х других функций. Тогда всего точек пересечения (не считая крайние) $= \frac{8\cdot2+7\cdot2+6\cdot2}{2} = 21$

ЧИСТОВИК

Если эти отрезки не пересекались, было бы 4 области. Тогда всего областей $4+21=25$

б. при $t=-1$ $t=2$ ~~неравенство~~ левая часть неравенства равна 0

$$\begin{cases} -1 \le 2x\log_a x \\ 2x\log_a x \le 2 \end{cases}$$ – хотя бы одно из этих неравенств будет иметь решение в виде вырожденного интервала

⇕

при $t=-1$ или $t=2$

$x=1$ – так мы получим выколотую точку

$2x\log_a x = -1$