60-04-31-84
(129.13)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

GMT+4
Выход: 14:05 - 14:08
3 зад

Вариант 2, 11 класс

Место проведения г. Ульяновск
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов по математике
наменование олимпиады

по Математике
профиль олимпиады

Малышева Владимира Валерьевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«29» марта 2026 года

Подпись участника

Задача 1 Чистовик

$\sqrt{3(1-tg^2x)} = 2\sqrt{2}\sin x$

$\begin{cases} \sqrt{3(1-tg^2x)} = 2\sqrt{2}\sin x \\ \sin x \geq 0 \end{cases}$

Перейдём к ур-ю, возведём обе части в квадрат.

$3(1-tg^2x) = 8\cdot\sin^2 x$ из этого следует:

$3\left(1-\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right) = 8\cdot\sin^2 x$ из этого следует:

$3(\cos^2 x-\sin^2 x) = 8\sin^2 x\cdot\cos^2 x$ (косинус не нулевой, т.к. tg определён, поэтому можем домножать).

Воспользуемся ф-й двойного угла из последнего равенства.

$3\cos 2x = 2\cdot\sin^2 2x \Leftrightarrow$

$\Rightarrow 3\cdot\cos 2x = 2(1-\cos^2 2x) \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\cdot\cos^2 2x + 3\cos 2x - 2 = 0$ это кв. ур-е на $t=\cos 2x$

$2\cdot t^2 + 3t - 2 = 0$

$\left[\begin{array}{l} t_1 = \frac{1}{2} \\ t_2 = -2 \text{ (не подходит, т.к. } |\cos 2x| \leq 1. \end{array}\right.$

$\Rightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x = \pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z$, с учётом усл-я

$\sin x \geq 0$ получаем: Чистовик

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \end{array}\right. \quad k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Задача 2

1) $\frac{n}{S(n)} = 9 \cdot t \Rightarrow t = \frac{n}{9 \cdot S(n)} \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$\Rightarrow n \,\vdots\, 9 \Rightarrow S(n) \,\vdots\, 9 \Rightarrow S(n) = 9 \cdot k \Rightarrow$

$\Rightarrow t = \frac{n}{81 \cdot k} \Rightarrow \quad n \,\vdots\, 81$

2) $n = 2 \cdot 81 = 162$, $S(n) = 9$ +

$n = 3 \cdot 81 = 243$, $S(n) = 9$ +

$n = 4 \cdot 81 = 324$, $S(n) = 9$ +

$n = 5 \cdot 81 = 405$, $S(n) = 9$ +

$n = 6 \cdot 81 = 486$, $S(n) = 18$ +

$n = 7 \cdot 81 = 567$, $S(n) = 18$ – не подх.

$n = 8 \cdot 81 = 648$, $S(n) = 18$ +

$n = 9 \cdot 81 = 729$, $S(n) = 18$ – не подходит

$n = 10 \cdot 81 = 810$, $S(n) = 18$ +

$n = 11 \cdot 81 = 891$, $S(n) = 18$ – не подходит

$n = 12 \cdot 81 = 972$, $S(n) = 18$ +

$n = 13 \cdot 81 > 999$

3) $162 + 648 + 972 = 1782$

Ответ: 1782.

Задача 3 Чистовик.

Пусть $(x, y, z) \in F$, z

По условию $-6 \le x, y, z \le 6$

то есть по 13 в-ов для каждой координаты $\Rightarrow$ всего 13^3 точек в F, пусть ABC — наш прямоугольный Δ-к, AC — гипотенуза,

$B = (x_0, y_0, z_0)$. Пусть $BA \parallel O_x$, $BC \parallel O_y$,

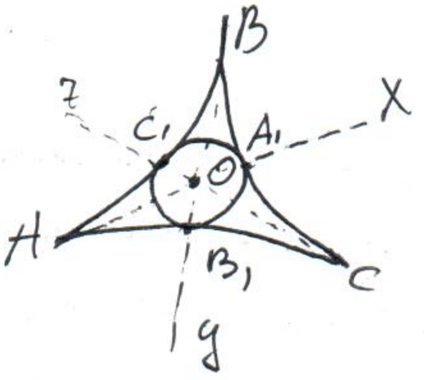
тогда $A = (x_1, y_0, z_0)$, $C = (x_0, y_1, z_0)$.

Теперь посчитаем кол-во Δ-ов. Точку B можно выбрать 13^3 способами далее надо выбрать из трёх осей 2, которым параллельны катеты — 3 способа. Дальше надо выбрать 2 координаты по этим осям, отличающиеся от соответствующих координат точки B. (В примере выше — выбрать $x_1 \ne x_0$ и $y_1 \ne y_0$).

Каждую из 2-х координат выбираем $13 - 1 = 12$ способами. Итак, общее кол-во Δ-в равно $13^3 \cdot 3 \cdot 12^2 = \cancel{949} = 949104$

Ответ: 949104

Задача 5 Чистовик



Заметим, что фигура обладает симметрией при повороте на $\frac{360}{3} = 120°$. Значит если парабола симметрична относительно прямой, проходящей через вершину, то получим следующую картину: введём систему координат, как на рисунке.

~~1 П.~~ 1. Касательные параболы в силу симметрии будут проходить через центр симметрии всей фигуры, то есть через впис. окр.

2. $OA = OB = OC = 1$, т.к. O – центр поворотной симметрии для $\triangle ABC$ на $120° \Rightarrow$
$\Rightarrow ABC$ – равносторонний.

3. Пусть парабола AB_1C задаётся ур-м $y = -ax^2 + bx + c$. OC – касат. в т-ке $C \Rightarrow$
$\Rightarrow tg$ угла наклона касат. будет равен производной в т-ке C.

$O(0;0) \Rightarrow C_x = 1 \cdot \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, ~~черновик~~ чистовик

$C_y = -1 \cdot \cos 60° = -\frac{1}{2} \Rightarrow OC: y = kx$,

$-\frac{1}{2} = k \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow k = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow y = -\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot x$, тогда $f'(x) = -2ax + b$, т.к. у параболы нет сдвига вершины по OX, то вершина лежит на OY, то $b = 0$, тогда

$f'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow a = \frac{1}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ парабола будет $y = -\frac{1}{3} \cdot x^2 + c$;

Подставим $C\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow c = -\frac{1}{4}$. И это есть величина парал. сдвига. $y = -\frac{1}{3}x^2$ по OY, то есть OB_1, т.к. B_1 – центр симметрии параболы $\Rightarrow$

B_1 – вершина $\Rightarrow OB_1 = \cancel{|c|} = |c| = \frac{1}{4}$

Ответ: $\frac{1}{4}$

Задача 3

$3x^2 \log_a x - \log_x a - 2x \le 0$

(неизвестная и параметр оба и в основании и в аргументе)

ОДЗ: $x > 0$, $x \neq 1$, $a > 0$, $a \neq 1$.

Пусть $t = \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$,

тогда $\log_x a = \frac{\ln a}{\ln x} = \frac{1}{t}$, нер-во принимает вид

$3\cdot x^2\cdot t - \cancel{1}\frac{1}{t} - 2x \le 0 \Rightarrow$ Чистовик

$\Rightarrow \frac{3\cdot x^2\cdot t^2 - 2xt - 1}{t} \le 0$

числитель – кв. трёхчлен:

$3(x\cdot t)^2 - 2x\cdot t - 1 = 0$

корни этого ур-я: $x\cdot t = 1$ или $x\cdot t = -\frac{1}{3}$

теперь разложим числитель на множителем:

$$\frac{(x\cdot t - 1)(x\cdot t + \frac{1}{3})}{t} =$$

$$= \frac{\left(x\cdot\frac{\ln x}{\ln a} - 1\right)\left(x\cdot\frac{\ln x}{\ln a} + \frac{1}{3}\right)}{\frac{\ln x}{\ln a}} \le 0$$

Умножим числ. и знам на $(\ln a)^2$ (знак не меняется, т.к $\ln a^2 > 0$, при $a \ne 1$ и ОДЗ.

Обозначим $F(x) = x\cdot\ln x$ при $x > 0$, $x \ne 1$.

$$\frac{(F(x) - \ln a)(F(x) + \frac{\ln a}{3})}{\ln a\cdot\ln x}$$

$F'(x) = \ln x + 1 = 0$ при $x = \frac{1}{e}$ – точка минимума.

$F(\frac{1}{e}) = -\frac{1}{e}$ – минимум

На интервале $(0, \frac{1}{e})$ F убывает чист. от 0 до $-\frac{1}{e}$. На интервале $(\frac{1}{e}, 1)$ F возрастает от $-\frac{1}{e}$ до 0. На интервале $(1, +\infty)$ F возрастает от 0 до $+\infty$. При этом $\ln x < 0$, при $x \in (0, 1)$ и $\ln x > 0$ при $x > 1$

Пусть $a > 1$ и $x > 1$, тогда нер-во превращается в $(F(x) - \ln a)(F(x) + \frac{\ln a}{3}) \le 0$, причём множитель $F(x) + \frac{\ln a}{3} > 0$

Значит $F(x) \le \ln a$, причём $F(x)$ монотонно возрастает от 0 до $+\infty$ на $(1, +\infty)$

Решением будет полуинтервал $(1, x_0]$, где $F(x_0) = \ln a$ это и есть искомый полуинтервал. Пусть $a > 1$ и $x \in (0, 1)$, тогда нер-во превращается в ~~$F(x$~~ $(F(x) - \ln a)(F(x) + \frac{\ln a}{3}) \geq 0$, причём мн-ль $F(x) - \ln a$ всегда < 0

Значит нам нужно $F(x) + \frac{\ln a}{3} \le 0$ =

$\Rightarrow F(x) \le \frac{\ln a}{3}$.

Чтобы это усл-е давало ровно одну точку, $(-\frac{\ln a}{3})$ должно быть минимумом $F(x)$, то есть $a = e^{\frac{3}{e}}$.

Проверка для $a = e^{\frac{3}{e}}$ имеем полуинтервал $(1, x_0]$, где $x_0 \cdot \ln x_0 = \frac{3}{e}$ (т.к $\frac{3}{e} > 0$, такая т-ка $x_0 > 1$ существует),

и точку $\frac{1}{e}$, которая не входит в $[1, x_0]$ и не является его концом ~~(1, e~~ $(\frac{1}{e} < 1)$,
теперь пусть $0 < a < 1$ и $x > 1$.
Тогда нер-во превращается в $(F(x) - \ln a) \cdot (F(x) + \frac{\ln a}{3}) \geq 0$, причём множитель $F(x) - \ln a$ всегда > 0. Значит $F(x) \geq \frac{\ln 3}{a}$.

Решением будет луч $[x_1, +\infty)$ – не полуинтервал.

Последний случай $0 < a$, $x < 1$ не может дать точку и интервал: он либо даёт интервалы внутри $(0; 1)$, либо объединяется путем $x > 1$.

Ответ: $a = e^{\frac{3}{e}}$

Черновик

Задача 4.

Каждая новая добавленная кривая увеличивает кол-во областей на число сегментов, на которые она разбивает точками пересечениями с границами и построенными кривыми. Прямоугольник ограничен линиями $x = 0$, $x = 1$, $y = 1$, $y = -1$.
Все функции $y = \sin(k\pi x)$ проходят через точки $(0, 0)$ и $(1, 0)$, которые ле-

жит на боковых сторонах прямоугольника. Количество областей: $1+\sum\limits_{k\in\{11,13,15\}} S_k$

где S_k – кол-во сегментов, на которые разбивается график функции с коэф. k. Оно на 1 меньше кол-ва точек на кривой, которые либо касание границы, либо пересечения с другими прямыми. Также добавляем 1 к сумме т.к. надо учесть нач. сегмент (пустой прямоуг.) Первой добавим кривую для $k=11$, у неё пока нет пересеч с другими. Точки на границе 2 (нач + конец) + 11 (касание $y=\pm1$). Всего 13. и $S_{11}=13-1=12$. Теперь добавим кривую для $k=13$. По аналогии с предыдущей у неё $2+13=15$ т-к на границе. Теперь добавим внутр пересеч. с кривой $k=11$ – решение $\sin(11\pi x)=\sin(13\pi X)$ то есть $\frac{11+13}{2}=12$ точек вида $x=\frac{2n+1}{24}$.

$n=0,1,\dots,11$) итого $S_{13}=15+12-1=$
$=26$.

Чистовик

Последней добавим кривую для $k=15$, по аналог. у неё $2+15=$
$=17$ точек на границе. Также по аналогии с пред. рассужд найдём число внутр. пересеч для $k=13$ - решение.

$\sin(13\pi x)=\sin(15\pi x)$

$\frac{13+15}{2}=14$ точек вида $x=\frac{2n+1}{28}$

$\{n=(0, 1 \ldots 13)$. Также внутр пересеч - с кривой $k=11$ - решение
$\{\sin(11\pi x)=\sin(15\pi x)$

$\frac{11+15}{2}=13$ точек вида $x=\frac{2n+1}{26}$

$n=(0, 1 \ldots 12)$. Но одна из точек это $x=0,5$, где $\sin(5,5\pi)=-1$ и $\sin(7,5\pi)=-1$. Эта точка уже учтена как точка касания границы.
$\Rightarrow$ Новых вн. точек пересечения
точек пересечения в этом сл. 17

$S_{15}=17+12+14-1=42$

Складываем все сегменты и получаем общее кол-во событий:
$1+12+26+42=81$

Ответ: 81

Чистовик.

Черновик.

$$\sqrt{3(1-tg^2x)} = 2\sqrt{2}\sin x$$

$$\begin{cases} 3(1-tg^2x) = 8\sin^2 x \quad (1) \\ 3(1-tg^2x) \geq 0 \end{cases}$$

(1) $3 - 3tg^2x = 8\sin^2 x$

$$3 - \frac{3\sin^2 x}{\cos^2 x} = 8\sin^2 x \ ; \cos^2 x \neq 0$$

$$3\cos^2 x - 3\sin^2 x = 8\sin^2 x \cdot \cos^2 x$$

$$3\cos^2 x - 8\sin^2 x \cdot \cos^2 x - 3\sin^2 x = 0$$

$$3\cos^2 x - 4\sin^2 x \cdot \cos^2 x - 3\sin^2 x - 4\sin^2 x \cdot \cos^2 x = 0$$

$$\cancel{\cos^2 x(3-4\sin^2 x) + \sin^2 x(3-4\cos^2 x) = 0}$$

$$3\cos^2 x - 3\sin^2 x \cdot \cos^2 x - 3\sin^2 x - 3\sin^2 x \cdot \cos^2 x - 2\sin \ldots = 0$$

$\cos^2 x$

$$3\cos^2 x(1-\sin^2 x) + 3\sin^2 x(1-\cos^2 x) -$$
$$- 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x = 0$$

$$3\cos^4 x + 3\sin^4 x - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x = 0$$

$$3 - \frac{3\sin^2 x}{\cos^2 x} \geq 0$$

$$1 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \geq 0$$

Черновик