0 182631 040003

18-26-31-04
(129.12)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

+1 доп. бланк

Вариант 2

Место проведения Краснодар
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Ломоносов"
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Малышевского Александра Алексеевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«29» марта 2025 года

Подпись участника

90 (Девяносто)

18-26-31-04 (329.3)

1. Ограничения: $2\sqrt{2}\sin x \geq 0 \Rightarrow \sin x \geq 0; \cos x \neq 0.$

(чистовик)

$$\sqrt{3(1-tg^2x)} = 2\sqrt{2}\sin x \quad \uparrow^2$$

$$3(1-tg^2x) = 8\sin^2 x$$

$$3\left(1-\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right) = 8\sin^2 x$$

$$3\left(\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x}\right) = 8\sin^2 x$$

$$3\cdot\frac{\cos 2x}{\cos^2 x} = 8\sin^2 x \;\Big|\cdot \cos^2 x \neq 0$$

$$3\cos 2x = 8\sin^2 x\cos^2 x = 2(2\sin x\cos x)^2 = 2\sin^2 2x$$

$$3\cos 2x = 2(1-\cos^2 2x)$$

$$2\cos^2 2x + 3\cos 2x - 2 = 0.$$

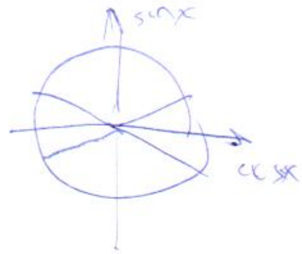
Замена $\cos 2x = t$.

$$2t^2 + 3t - 2 = 0 \quad D = 9 + 4\cdot 2\cdot 2 = 25$$

$$t = \frac{-3\pm 5}{4} = \left[\begin{array}{l} -2 \Rightarrow \varnothing \\ \frac{1}{2} \end{array}\right.$$

$$\cos 2x = \frac{1}{2} \qquad 2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$$

$$\Rightarrow \quad x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$$



При условии $\sin x \geq 0$ подходит только $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k\in\mathbb{Z};\quad x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$

Ответ: $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k\in\mathbb{Z};\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$

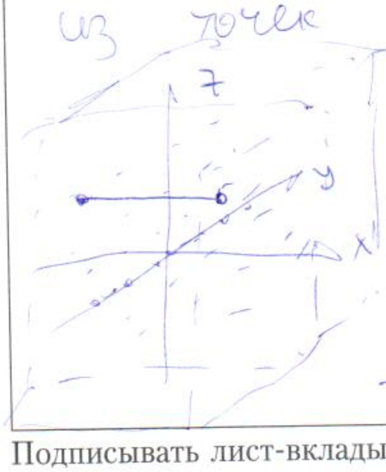
2. Пусть сумма цифр числа ~~A~~ a (искомые) $:= S(a)$.
Если $\frac{a}{S(a)} \vdots 9 \Rightarrow a \vdots 9$, но тогда по свойству кратности на 9 $S(a) \vdots 9$. Тогда как минимум $a \vdots 9^2 = 81$. $\Rightarrow$ все 3-знач. числа, $\vdots 81$: $\frac{162}{9} = 18$ - подходит; $\frac{243}{9} = 9 \cdot 3$ - подходит.
$\frac{324}{9} = 9 \cdot 4$ - подходит $\frac{405}{9} = 9 \cdot 5$; $\frac{486}{18} = 9 \cdot 3$; $\frac{567}{18} \notin \mathbb{Z}$;
$\frac{648}{18} = 4 \cdot 9$; $\frac{729}{18} \notin \mathbb{Z}$; $\frac{810}{9} = 90$; $\frac{891}{18} \notin \mathbb{Z}$; $\frac{972}{18} = 9 \cdot 6$

Тогда A (в 3-знач.) $= \{162; 243; 324; 405; 486; 648; 810; 972\}$.

$I = 162$; $VI = 648$; (последний) $= 972$.

$\sum = 162 + 648 + 972 = 1782$. Ответ: 1782.

3. Т.к. множество в пространстве является симметричным относительно всех осей, то кол-во треугольников, катеты которых $\parallel Ox$ и Oy такое же, как тех, у которых катеты $\parallel Ox$ и Oz, Oz и Oy. ~~Все~~ Причем, очевидно, эти количества не пересекаются ~~($\nexists \Delta: \parallel (Ox \cap Oy \cap Oz)$)~~.
$\nexists \Delta$: катеты $\parallel Ox$ и $\parallel Oy$ и $\parallel Oz$. Посчитаем Δ, ~~которые~~ катеты которых $\parallel Ox$ и $\parallel Oy$.
Заметим, что наше множество — некий „куб" из точек $13 \times 13 \times 13$ (от -6 до 6 вкл.).



выберем катет, $\parallel Ox$:
выберем его высоту от -6 до 6 (13 вар.); затем его коорд. по y (как y, так и z у отрезка $= const$) — тоже 13 вариантов.

18-26-31-04 (129.1)

Теперь выбираем 2 точки на выбраном (чистовик) отрезке ~~вдоль~~ $x \in [-6;6]$; $y=const$, $z=const$.

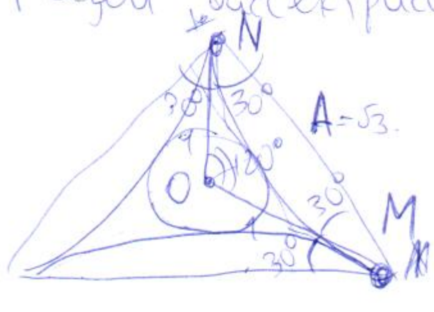
$C_{13}^2 = \frac{13 \cdot 12}{2} = 13 \cdot 6 = 78$. ~~это кол-в~~ Тогда кол-во катетов, $\parallel Ox = 13 \cdot 13 \cdot 78$. Теперь для каждого такого катета построим катет, $\parallel Oy$.

выберем одну из двух точек конца отрезка, из которой будет начинаться катет $\parallel Oy$. (2 вар.) и теперь выберем 1 из оставшихся 12 точек в отрезке $y \in [-6;6]$; $x =$ (выбранный); z такой же, как у катета $\parallel Ox$. Таким образом, на 1 отрезок (катет) $\parallel Ox$ приходится 24 катета, $\parallel Oy$; далее треугольник задается однозначно. Тогда Δ таких, что $\parallel Ox$ и $\parallel Oy$ (катеты): $13 \cdot 13 \cdot 78 \cdot 24$. А для иных комбинаций параллельностей — столько же (комбинаций — 3)

Таким образом, всего: $13 \cdot 13 \cdot 78 \cdot 24 \cdot 3 = 169 \cdot 78 \cdot 72 = 949104$.

5. Т.к. угол нулевой $\Rightarrow$ параболы касаются.

Проведем биссектрисы ~~одного из~~ углов:

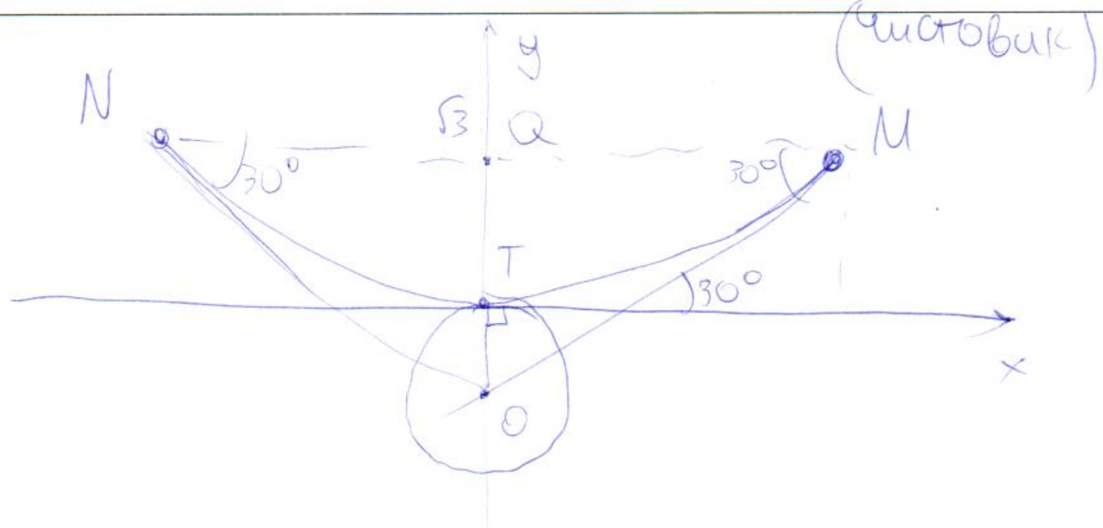


Они же — радиусы опис. окр.: $= R = 1$.

Тогда отрезок A по т. cos $= \sqrt{1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1\left(-\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{3} = NM$.

$\measuredangle$ одну из парабол, поместив ~~её~~ её на декартову плоскость в начало:

(чистовик)



Найдем c: 1) в точке M касательная к параболе лежит под углом $30°$ к. $Ox \Rightarrow tg 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow$ производная параболы cx^2 в точке M: $= 2cx_M = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Заметим, что $NM = \sqrt{3}$ ~~тогда~~ и т.к. парабола симметрична отн. $Oy \Rightarrow \exists NM \cap Oy = (\cdot) Q$

Тогда $NQ = QM = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x_M = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Подставим:

$2c \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow c = \frac{1}{3}$.

Заметим, что биссектрисса — она же касательная — по свойству ~~на~~ впис. окружности пересекает её центр, а на нашем графике, очевидно, центр впис. окружности $\in Oy$.

~~(т.к. $\triangle ONM$ — р/б. (O — центр. впис. окр))~~.

(т.к. впис. окружность касается параболы в ~~точке~~ её начале). Тогда ~~радиус~~, если ~~начало в ка~~ точка $(0;0) = T$, а центр впис.: $= O$, радиус $= OT =$ ~~y~~ ординате т. O. по модулю а точка O — пересечение касательной с Oy. $(x=0)$

18-26-31-04 (129,13)

у графика данной касательной ~~и~~ (чистовик)

$y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + b$. найдем b; , ~~имея~~ подставив точку $M(\frac{\sqrt{3}}{2};$

М. во первых, $x_M = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow y_M = cx_M^2 = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$= \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4} = \frac{1}{4}. \Rightarrow M\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{4}\right) \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} + b$

$b = -\frac{1}{4}$. Тогда при $x=0$ $y = b = -\frac{1}{4}$.

т.есть радиус равен $\left|-\frac{1}{4}\right| = \frac{1}{4}$. Ответ: $\frac{1}{4}$.

~~8. Решим неравенство отнjсительно x:~~

~~ОГР: $x>0$ $x \neq 1$ ($a>0$, $a \neq 1$).~~

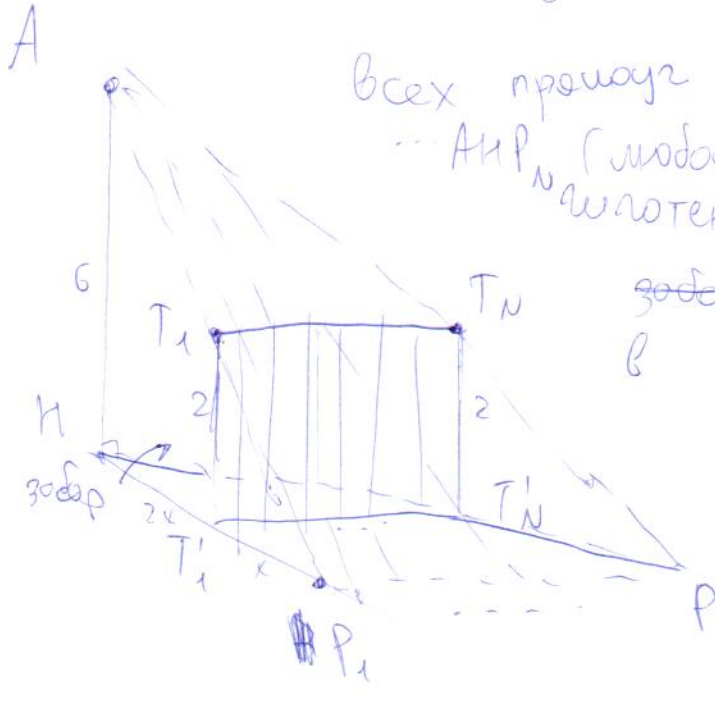
~~$\exists \log_a x = t$ ($t \neq 0$).~~

~~$3t x^2 - \frac{1}{t} 2x - \frac{1}{t} \leq 0$~~

~~$D = 4 - 4\cdot 3t\cdot\left(-\frac{1}{t}\right) = 16.$~~

~~$x = \frac{2 \pm 4}{6t} = \left[\begin{array}{l}\frac{6}{6t} = \frac{1}{t} = \frac{1}{\log_a x} = \log_x a \\ -\frac{2}{6t} = -\frac{1}{3t} = -\frac{1}{3\log_a x} = -\frac{1}{3}\log_x a.\end{array}\right.$~~

6. Рассмотрим свечение на забор (чистовик) из определенной точки, например из A:



$AH \perp$ пустырю, тогда во всех прямоуг треуг $AHP_1, AHP_2 \dots$ $\dots AHP_N$ (любой луч света - гипотенуза AP_i) происходит ~~забор~~ касание забора в точке T_i и $T_iT'_i \parallel AH$, имея также общий угол.

AP_iH получаем $\Delta AHP_i \sim \Delta T_iT'_iP_i$ по двум углам ($\angle T_iT'_iP_i = \angle AHP_i$; AP_iH-общ) и тогда ~~точки~~ ~~$P_1 \dots P_N$ образуют~~

$$\frac{P_1T'_1}{P_1H} = \dots = \frac{P_NT'_N}{P_NH} \Rightarrow \Delta T'_1HT'_N \sim \Delta P_1HP_N$$

по общ. углу P и двум отношениям, и в общ. виде $\Delta T'_1HT'_i \sim \Delta P_1HP_i$ $i \in \{1, \dots N\}$

$\Rightarrow P_1 \dots P_N$ образуют отрезок параллельный $T'_1T'_N$ по т. обр. т. Фалеса.

Очевидно, что единственной затененной зоной является некая область за забором ниже лучей касательных ($T'_1P_1T'_NP_N$)

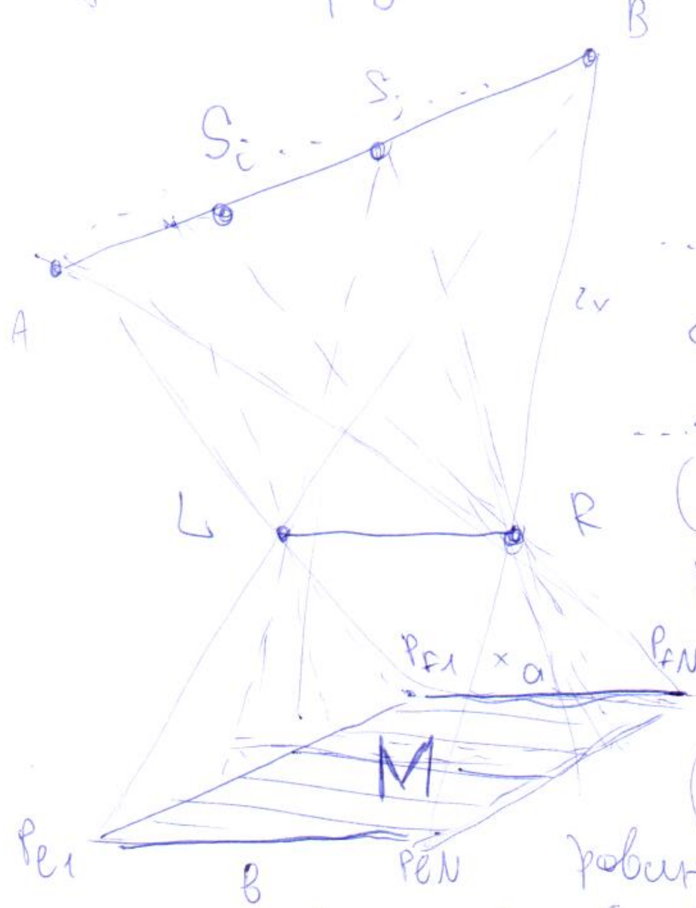
каждая такая область (от каждой точки) (листовик) — трапеция ($P_1P_N \parallel T_1'T_N'$). ~~Неважно~~, причем коэф. подобия ~~трапц.~~ ΔAHP_i, $\Delta T_iT_i'P_i$: $k_1 = 3 \Rightarrow \frac{HT_i'}{T_i'P_i} = 3-1=2$

$\Rightarrow$ у $\Delta HP_1P_i \sim \Delta HT_1'T_i'$ $k_2 = \frac{3}{2}$.

$\Rightarrow P_1P_N = \frac{3}{2}T_1'T_N' = 3\cdot\frac{3}{2} = \frac{9}{2}$; для точки S

$dist(S; P_1P_N(S)) = \frac{3}{2} dist(S; забор)$

где dist — перпендикуляр, P_1P_N относится к конкретной S. Посмотрим на множест. трапеций сверху:



а так как $dist(A; забор) < \ldots$ $\ldots < dist(S_i; забор)$ $< \ldots < dist(S_j; забор)$ $\ldots < dist(B; забор)$ (из того что AB непрерывен; $y_A < y_B$).

$\Rightarrow$ множество оснований трапеций (P_1P_N) проиллюстрировано и является параллелограмом M ($a \parallel b$, $a = b = \frac{9}{2}$)

Тогда если точки начала и конца забора — L и R, $a = P_{F1}P_{FN}$; $b = P_{e1}P_{eN}$, то

Чистовик

затенённая площадь — площадь многоугольника $\angle P_{e1}P_{eN}P_{fN}R$.

$= S_{\angle RP_{e1}P_{eN}} + S_{\Delta RP_{eN}P_{fN}}$.

Найдем коорд. точек: (дистанции в проекции на Oxy)

$\overline{BL} = \{-6; -7\}$ тогда

$\frac{3}{2}\overline{BL} = \{-9; -\frac{21}{2}\}$ и тогда

$P_{e1} = \left(6-9; 7-\frac{21}{2}\right) = \left(-3; -\frac{7}{2}\right)$.

$\Rightarrow P_{eN} \left(-3+\frac{9}{2}; -\frac{7}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}; -\frac{7}{2}\right)$

$\overline{AR} = \{6; -4\} \Rightarrow \frac{3}{2}\overline{AR} = \{9; -6\}$

$\Rightarrow P_{fN} = (-3+9; 4-6) = (6; -2)$

$dist(L; P_{e1}P_{eN}) = 0 - \left(-\frac{7}{2}\right) = \frac{7}{2}$.

Тогда $S_{\angle RP_{e1}P_{eN}} = \frac{7}{2}\cdot\left(\frac{3+\frac{9}{2}}{2}\right) = \frac{7}{2}\cdot\frac{15}{4} = \frac{105}{8}$.

~~$BR = \sqrt{3^2+7^2} = \sqrt{58}$~~

~~$\Rightarrow RP_{eN} = \frac{\sqrt{58}}{2}$~~ Заметим, что $\Delta ABR \sim \Delta P_{eN}$...

$P_{fN}R$ ($\angle R$ – верт; $\frac{BR}{RP_{eN}} = \frac{AR}{RP_{fN}} = 2$). $\Rightarrow$ отнош. их площадей – 4. $\nexists S_{\Delta ABR}$: $AR = \sqrt{6^2+4^2} = \sqrt{52}$

$BR = \sqrt{49+3^2} = \sqrt{58}$; $AB = \sqrt{9^2+3^2} = \sqrt{90}$ $\cos\angle ARB = \frac{5}{\sqrt{754}}$

~~$\Rightarrow \sin\angle ARB = \sqrt{\frac{3341}{8\sqrt{221}}}$ и $S_\Delta = \frac{1}{2}\sqrt{52}\cdot\sqrt{6}$~~ $\sin\angle ARB = \frac{9\sqrt{9}}{\sqrt{754}} \Rightarrow$

Черновик

$58 \times 13 = 174 + 58 = 754$

$52 = 2 \cdot 2 \cdot 13$

$68 = 2 \cdot 2 \cdot 17$

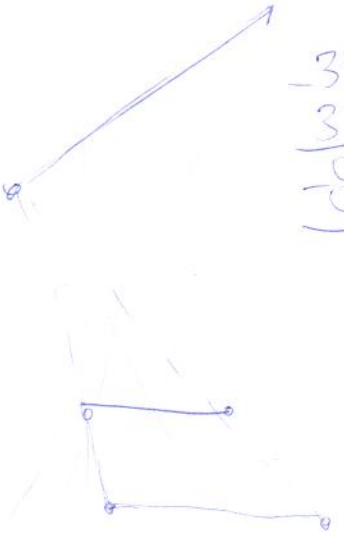
$3311 : 11 = 301$

$301 : 13$ $\quad$ $301 : 17$

$52 + 68 = 120$

$13 \times 17 = 91 + 13 = 221$

$221 : 13 = 17$



$\sqrt{58} \cdot \sqrt{13} \cos\alpha = 5$

по т. cos $52 + 68 - 2 \cdot \sqrt{52} \cdot \sqrt{68} \cdot \cos\alpha = 90$

$221 \times 16 = 1326 + 2210 = 3536$

$-2 \cdot \sqrt{52} \cdot \sqrt{68} \cdot \cos\alpha = 90 - 52 - 68$

$2\sqrt{52} \cdot \sqrt{68} \cos\alpha = \cancel{30}\ 20$

$2 \cdot 2\sqrt{13} \cdot 2\sqrt{17} \cos\alpha = 30$

$\cos\alpha = \dfrac{5}{\sqrt{58} \cdot \sqrt{13}}$

$\cancel{450}\ 225$ $\quad$ $\cos\alpha = \dfrac{30}{8\sqrt{221}}$

$\cos^2\alpha = \dfrac{900}{64 \cdot 221}$

$\dfrac{225}{3536}$ $\quad$ $\sin^2\alpha =$

$\sqrt{58}\sqrt{52} \cos\alpha = 10$ $\quad$ 32 16

$\cos\alpha = \dfrac{5}{\sqrt{754}}$

$\sqrt{58} \cdot 2\sqrt{13} = 10$ cos α

$\dfrac{3536 - 225}{3536} = \dfrac{3311}{3536}$

$3^2 + 7^2 + 4^2$

$\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3311}}{8\sqrt{221}}$

$\dfrac{754 - 25}{754} = \dfrac{729}{754}$

$= 9 + 49 + 16$

$= 58 + 16 = 74.$

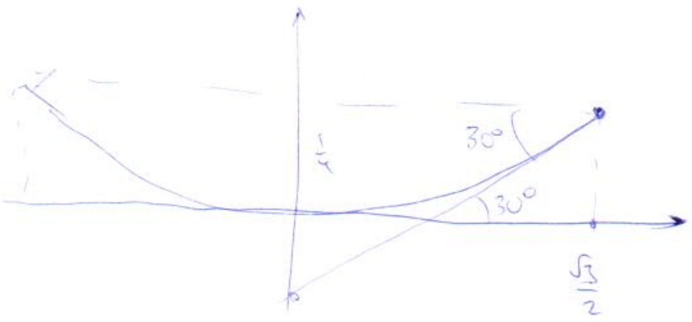
$= \dfrac{9\sqrt{9}}{\sqrt{754}}$

~~cos α~~

$52 + 58 - 2\sqrt{52} \cdot \sqrt{58} \cdot \cos\alpha = 90$

Черновик

$\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4} = \frac{1}{4}$



$3x^2\log_a x - \log_x a - 2x \leq 0$

$a>0 \quad x>0 \quad a\neq 1 \quad x\neq 1.$

$D = 4 + 4\cdot 3\log_a x\cdot\log_x a = 16.$

$\frac{2\pm 4}{6\log_a x} = \left[\begin{array}{l}\frac{1}{\log_a x}\\ -\frac{1}{3\log_a x}\end{array}\right.$

$x = \log_x a$

$\log_x a = x$ $\qquad x = -\frac{1}{3}\log_a x$

$x^x = a$

$x = \log_x a^{-\frac{1}{3}}$

$3\log_a x \leq 0$

$x\neq 1$

$x^x = a^{-\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{a^{\frac{1}{3}}}\right)^{-3}$

$(x^x)\quad x^{-3x} = a$

Черновик.

$\frac{A}{S(A)} \vdots 9 \Rightarrow A \vdots 9 \Rightarrow S(A) \vdots 9 \Rightarrow A \vdots 81.$

$$\begin{array}{r} \times\, 169 \\ 78 \\ \hline 13182 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\, 169 \\ 78 \\ \hline 1352 \\ +\,11830 \\ \hline \boxed{13182} \end{array}$$

$\frac{1}{4}$ $\quad -\frac{1}{4}$

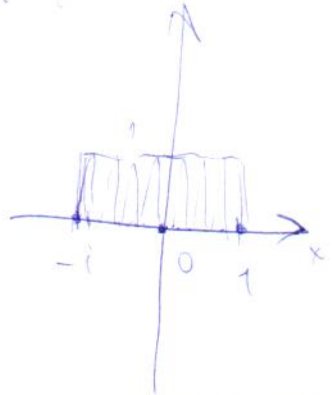
$\cancel{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} + b$

$-\frac{1}{4}$

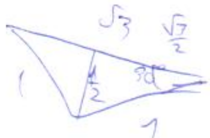
$$\begin{array}{r} \times\, 13182 \\ 172 \\ \hline 26364 \\ +\,922740 \\ \hline 949104 \end{array}$$

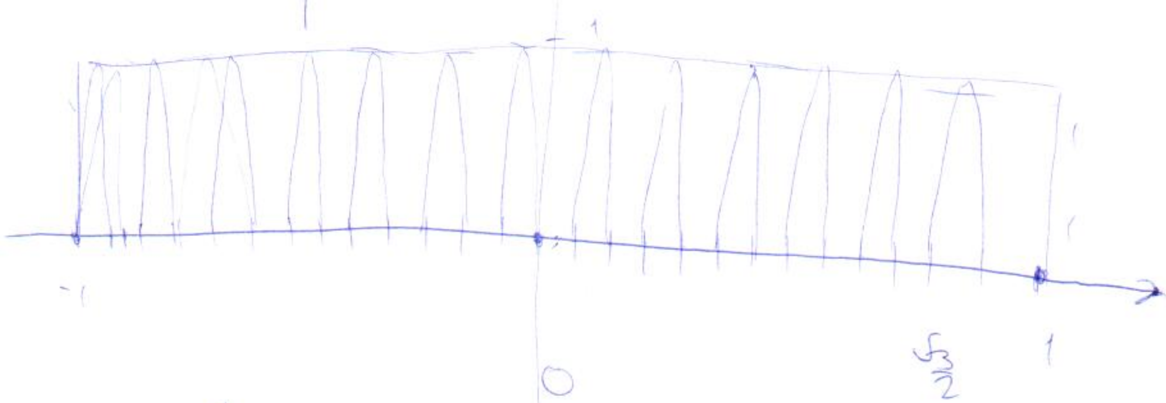
$\sin(11\pi x)$

$\frac{10}{11}$

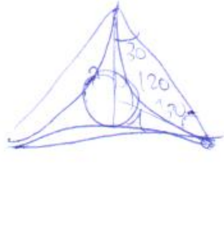


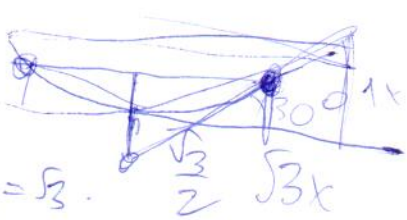
$y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + b =$





$\frac{\sqrt{3}}{2}$





$1+1-2\cdot1\cdot1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3}.$

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \sqrt{3}x$

$tgx = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\qquad \frac{1}{\sqrt{3}}$

$2c\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad c = \frac{1}{3}.$

Черновик.

$\sqrt{3\left(1-\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right)} = 2\sqrt{2}\sin x$

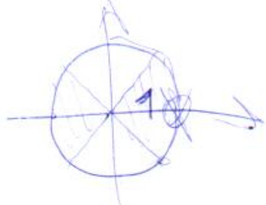
ОТР: $tg^2 x \le 1$

$-1 \le tg x \le 1$;

$\sqrt{3\left(\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x}\right)} = 2\sqrt{2}\sin x$

$\cos x > 0$.

$\frac{\sqrt{3 \cos 2x}}{\cos x}$



162
+648
810
+972
1782

$\cos x > 0$

$2\cos^2 x - 1$

$\cos 2x > 0$

(1) $\frac{\sqrt{3\cos 2x}}{\cos x} = 2\sqrt{2}\sin x$

$\times$ 81 3 = 243

$\times$ 81 10 = 810

$\times$ 81 4 = 324

$\times$ 81 11: 81 + 81 = 891

$\times$ 81 5 = 405

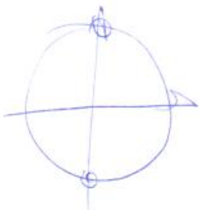
$\times$ 81 6 = 486

$\times$ 81 12: 162 + 81 = 972

$\times$ 81 7 = 567

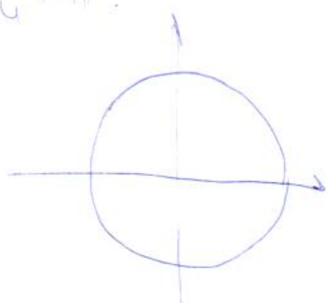
$\times$ 81 8 = 648

$\times$ 81 9 = 729

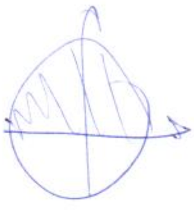


$-\frac{\pi}{2}+2\pi k \le 2x \le \frac{\pi}{2}+2\pi k$

$-\frac{\pi}{4}+\pi k \le x \le \frac{\pi}{4}+\pi k$.



ОТР: $\sin x > 0$.



$3(1-tg^2 x) = 8\sin^2 x$

$\cos 2x = \frac{8}{3}\sin^2 x \cos^2 x$

$3\left(\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x}\right) = 8\sin^2 x$

$\cos 2x = \frac{2}{3}\sin^2 2x$

18-26-31-04 (129.1%)

чистовик

$\Rightarrow S_\Delta = \frac{1}{2} AR \cdot BR \cdot \sin\angle ARB = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{52} \cdot \sqrt{58} \cdot \frac{9\sqrt{9}}{\sqrt{754}}$

$= \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}\sqrt{13 \cdot 58} \cdot \frac{9\sqrt{9}}{\sqrt{754}} = 9\sqrt{9}$. Тогда $S_{\Delta RP_{EN}P_{FN}}$

$= \frac{1}{4} \cdot 9\sqrt{9}$. Ответ: $\frac{105}{8} + \frac{9\sqrt{9}}{4}$.

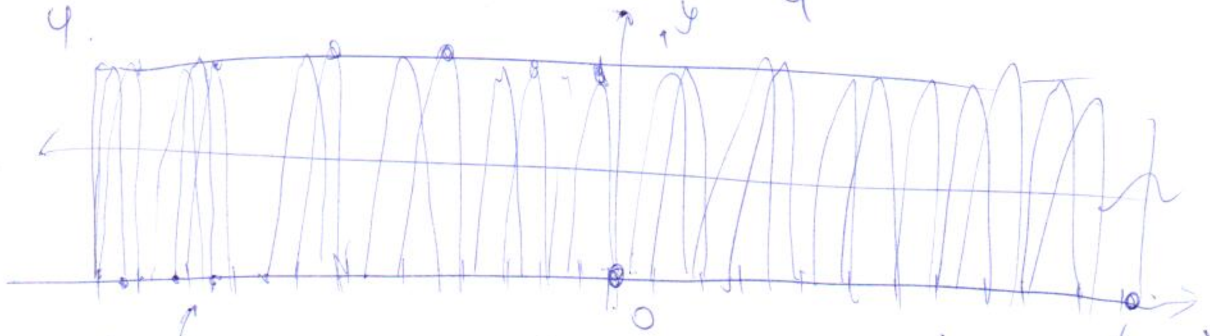


Иллюстрация графика НОД(k_i) попарно $(k_i + 1; k_i) = 1 \Rightarrow$ ветви синусоидов никогда не наложатся, а будут лишь пересекаться. ...

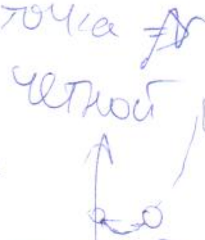
2. Решим ур-е относительно x, так, что $\log_a x = t$.:

$3tx^2 - \cancel{4} 2x - \frac{1}{t} \leq 0 \quad D = 4 - 3t \cdot (-\frac{1}{t}) \cdot 4 = 16$.

$x = \frac{2 \pm 4}{6t} = \left[\begin{array}{l} \frac{1}{t} = \log_x a \\ \frac{-2}{3t} = -\frac{1}{3}\log_x a. \end{array} \right.$

если решение нерав-ва - точка $\neq a$ знак нестрогий $\Rightarrow \exists$ корень четной кратности

$x = \log_x a \Leftrightarrow x^x = a$ & $y = x^x$:



2 реш.

при $x \in (0; 1) / \{\frac{1}{2}\}$

$x = -\frac{1}{3}\log_x a \quad x^x = a^{-\frac{1}{3}}$. ... Ответ: $a \in (0; 1) \setminus \{\frac{1}{2}\}$.