0 948374 670002

94-83-74-67

(124.7)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 11 класс

Место проведения г. Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Ломоносов"
наменование олимпиады

по МАТЕМАТИКЕ
профиль олимпиады

Мамедовой Элины Рамисовны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

+1 лист

+1 ~~лист~~

+1 лист

Дата

«29» марта 2026 года

Подпись участника

90 (Девяносто) дней

94-83-74-67 (124.7)

Черновик

$\sqrt{6(1-ctg^2x)} = 4\cos x$ ОДЗ: $\sin x \neq 0$

$x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}$

$1-ctg^2x = \frac{\sin^2x}{\sin^2x} - \frac{\cos^2x}{\sin^2x} = \frac{-(\cos^2x-\sin^2x)}{\sin^2x} = \frac{-\cos2x}{\sin^2x}$

$\sqrt{\frac{-6\cos2x}{\sin^2x}} = 4\cos x$

$\sqrt{-6\cos2x} = 2\cdot2\cos x\sin x$ ~~ОДЗ~~: $-6\cos2x \geq 0$

$\cos2x \leq 0$

$\sqrt{-6\cos2x} = 2\sin2x$

В ОДЗ: $-6\cos2x = (2\sin2x)^2$

$-6\cos2x = 4(1-\cos^22x)$

$-6t = 4-4t^2$

$4t^2-6t-4=0$

$2t^2-3t-2=0$

$2t^2-4t+t-2=0$

$2t(t-2)-(t-2)=0$

$3x^2\log_a x - \log_x a - 2x \leq 0$ $\cup\{\}$

ОДЗ: $a>0$, $a\neq1$, $x\neq1$, $x>0$

$\log_x a = \frac{1}{\log_a x}$

$3x^2\log_a x - \frac{1}{\log_a x} - 2x$

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

Чистовик

Задача 1

$$\sqrt{6(1-ctg^2x)} = 4\cos x$$

$$1-ctg^2x = \frac{\sin^2x}{\sin^2x} - \frac{\cos^2x}{\sin^2x} = \frac{-(\cos^2x-\sin^2x)}{\sin^2x} = \frac{-\cos 2x}{\sin^2x}$$

$$\sqrt{6\cdot\frac{-\cos 2x}{\sin^2x}} = 4\cos x$$

ОДЗ: $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ -6\cos 2x \geq 0 \to \cos 2x \leq 0 \end{cases}$

$$\frac{\sqrt{-6\cos 2x}}{|\sin x|} = 4\cos x$$

Рассмотрим 2 случае:

(1) Если $\sin x > 0 \to |\sin x| = \sin x$

$$\sqrt{-6\cos 2x} = 4\cos x\sin x$$

$$\sqrt{-6\cos 2x} = 2\sin 2x \quad | \text{ возведём обе части в } (\ )^2$$

$$-6\cos 2x = 4\sin^2 2x \text{, где } \boxed{\sin 2x \geq 0}$$

$$-6\cos 2x = 4(1-\cos^2 2x)$$

$$-6\cos 2x = 4 - 4\cos^2 2x \quad |:2$$

$$-3\cos 2x = 2 - 2\cos^2 2x$$

$$2\cos^2 2x - 3\cos 2x - 2 = 0$$

$$2\cos^2 2x - 4\cos 2x + \cos 2x - 2 = 0$$

$$2\cos 2x(\cos 2x - 2) + (\cos 2x - 2) = 0$$

$$(\cos 2x - 2)(2\cos 2x + 1) = 0$$

$$\left[\begin{aligned} &\cos 2x = 2 \to \varnothing \\ &\cos 2x = -\frac{1}{2} \ \cancel{\to \text{проверим, подходит ли под ОДЗ:}} \end{aligned}\right.$$

$\cancel{-\frac{1}{2} \leq 0}$ ~~(V)~~

$\cancel{\cos 2x = -\frac{1}{2} \to 2x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k\in Z \to x = \pm\frac{5\pi}{12} + \pi k, k \in Z \to}$

$\cancel{\to \sin\left(\pm\frac{5\pi}{12} + \pi k\right) \neq 0}$ ~~(V)~~

94-83-74-67
(124.7)

~~Чистовик~~ ЧЕРНОВИК

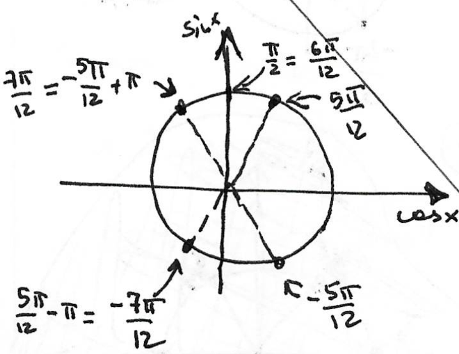
Продолжения Задачи 1.

[redacted] Значит

$x = \pm \frac{5\pi}{12} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ - подходит под ОДЗ.

При этом $\sin x > 0$ из рассм. случая.

$\Rightarrow$



$\Rightarrow$ Под рассматриваемый случай подходит только

$$\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x = \frac{5\pi}{12} + 2\pi k \\ x = \frac{7\pi}{12} + 2\pi n \end{array}\right. \\ k, n \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

(2) Если $\sin x < 0 \rightarrow |\sin x| = -\sin x$

$\sqrt{-6\cos 2x} = 4\cos x(-\sin x)$

$\sqrt{-6\cos 2x} = -2\sin 2x \quad |\uparrow()^2$

$-6\cos 2x =$

A

$a \in \mathbb{N}$

a

$a : S(a) = 9n$

$n \in \mathbb{N}$

$a = S(a) \cdot 9n$

$S(a) \vdots n$

$999 = 18$

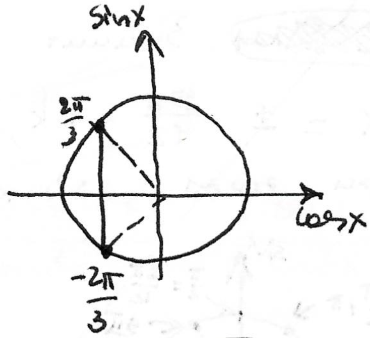
$111 | 9$

$\frac{999}{81} = \frac{111}{9}$

ЧИСТОВИК

N1 (продолжение)

$$\begin{cases} \cos 2x = -\frac{1}{2} \\ \sin 2x \geq 0 \end{cases} \rightarrow \left. 2x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \atop \text{где } k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow$$



$\rightarrow$ $2x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$

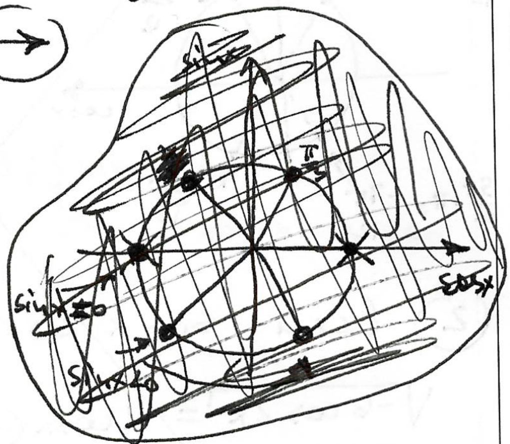
$x = \frac{\pi}{3} + \pi k$

Из ОДЗ: $\sin x \neq 0$,

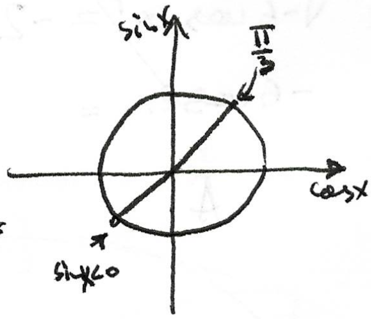
$\cos 2x \leq 0$ (v)

Из усл. рассм. случая: $\sin x > 0$

$\rightarrow$



$\rightarrow$ $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z} \\ \end{cases}$



(2) Если $\sin x < 0 \rightarrow |\sin x| = -\sin x$

$\sqrt{-6\cos 2x} = -2\sin 2x$

$\begin{cases} -6\cos 2x = 4\sin^2 2x \\ \sin 2x \leq 0 \end{cases} \rightarrow$ решаем также, как в (1) случае

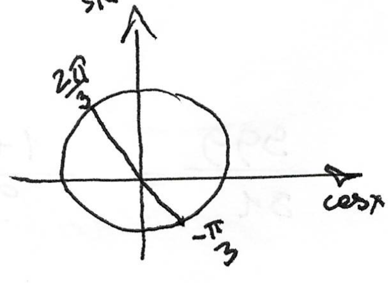
$\begin{cases} \cos 2x = -\frac{1}{2} \\ \sin 2x \leq 0 \end{cases} \rightarrow 2x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \rightarrow$

$\rightarrow x = -\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

ОДЗ: $\sin x \neq 0$, $\cos 2x \leq 0$ (v)

условие случая: $\sin x < 0$

$\rightarrow$



$\rightarrow$ $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

Ответ: $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z}$

ЧИСТОВИК

Задача 2

Дано ~~множество~~ A ~~чисел,~~ состоящее из всех ~~цифр~~ таких чисел $a \in \mathbb{N}$: $\frac{a}{S(a)} = 9n$, где $S(a)$ – сумма цифр числа a, $n \in \mathbb{N}$.

Тогда $a = 9 \cdot n \cdot S(a)$ → т.к. $S(a)$ по опр-то $\in \mathbb{N}$, то $a \,\vdots\, 9$. По св-ву делимости на 9:

$a \equiv S(a) \pmod 9$, т.е. если $a \,\vdots\, 9$, то $S(a)$ также $\vdots\, 9$.

Если a – трехзначное число $\Leftrightarrow 100 \le a \le 999 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 1 \le S(a) \le 27 \\ S(a) \,\vdots\, 9 \end{array}\right\} \Rightarrow S(a) \in \{9; 18; 27\}$. ~~Выпишем~~

~~все такие a:~~

~~1) $S(a)=27 \Leftrightarrow S(a)=9+9+9$ → Единств. $a = 999$~~

~~2) $S(a)=18$: Подходящие a:~~

Заметим теперь, что $a = 9 \cdot \underset{\mathbb{N}}{n} \cdot \underset{\vdots 9}{S(a)} \Rightarrow a \,\vdots\, 81$ →

~~и все такие~~

$81 \cdot 2 = 162$ $S(162)=9$ (V)

$81 \cdot 3 = 243$ $S(243)=9$ (V)

$81 \cdot 4 = 324$ $S(324)=9$ (V)

$81 \cdot 5 = 405$ $S(405)=9$ (V)

$81 \cdot 6 = 486$ $S(468)=18$ (V)

$81 \cdot 7 = 567$ $S(567)=18$ $567 \not\vdots\, 18$, т.к. $567 \not\vdots\, 2$ (X)

$81 \cdot 8 = 648$ $S(648)=18$ (V)

$81 \cdot 9 = 729$ $S(729)=18$ $729 \not\vdots\, 18$, т.к. $\not\vdots\, 2$ (X)

$81 \cdot 10 = 810$ $S(810)=9$ (V)

$81 \cdot 11 = 891$ $S(891)=18$ $891 \vdots\, 18$, т.к. $891 \not\vdots\, 2$ (X)

$81 \cdot 12 = 972$ $S(972)=18$ (V)

$81 \cdot 13 > 999$

$162 + 81 = 243$; $243 + 81 = 324$; $324 + 81 = 405$; $405 + 81 = 486$; $486 + 81 = 567$; $567 + 81 = 648$; $648 + 81 = 729$; $729 + 81 = 810$; $891 + 81 = 972$

ЧИСТОВИК

ПРОДОЛЖЕНИЕ №2

Тогда все трёхзначные числа, входящие в A:

162; 243; 324; 405; 486; 648; 810; 972.
1 2 3 4 5 6 7 8

сумма первого, шестого и последнего:

$162 + 648 + 972 = \underline{1782}$

$$\begin{array}{r} 162 \\ +\,648 \\ 972 \\ \hline 1782 \end{array}$$

Ответ: 1782.

ЧЕРНОВИК

$$3x^2\log_a x - \frac{1}{\log_{ax} x} - 2x \le 0$$

Замена $\log_a x = t$

$$3x^2 t - \frac{1}{t} - 2x \le 0$$

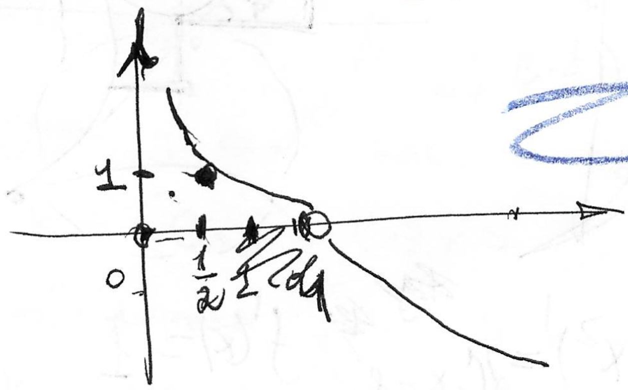
$$\frac{3x^2t^2 - 1 - 2xt}{t} \le 0$$

$$\frac{3x^2t^2 - 3xt + xt - 1}{t} \le 0 \qquad \frac{3xt(xt-1) + (xt-1)}{t} \le 0$$

$$\frac{(3xt+1)(xt-1)}{t} \le 0$$

$$\boxed{\begin{matrix} x>0 \\ x\ne 1 \\ a>0 \\ a\ne 1 \end{matrix}}$$

$$\frac{(3x\log_a x + 1)(x\log_a x - 1)}{\log_a x} \le 0$$



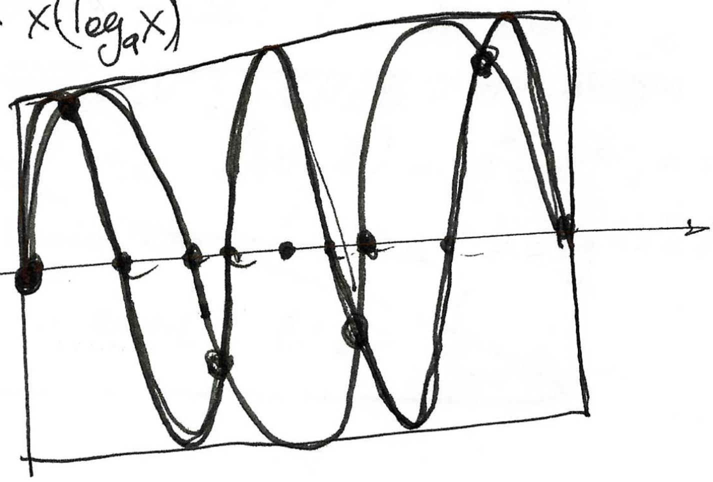
Если $a<1$

$\log_{\frac{1}{2}} x$

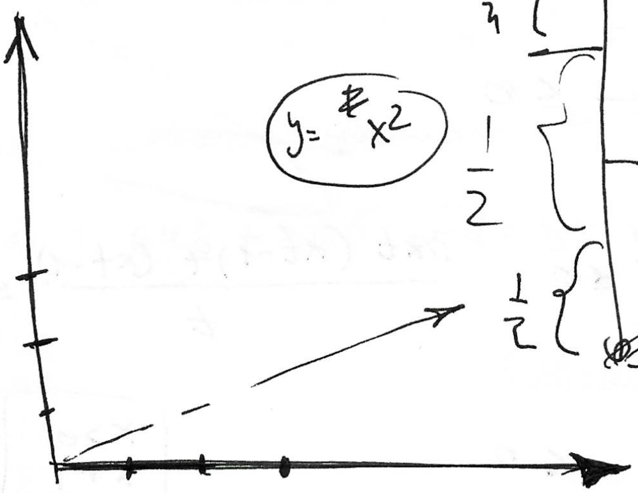
3 5 4

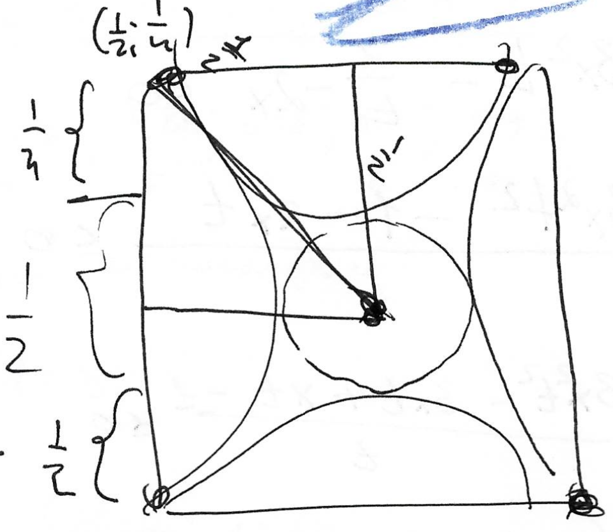
$$f(x) = x\log_a x$$

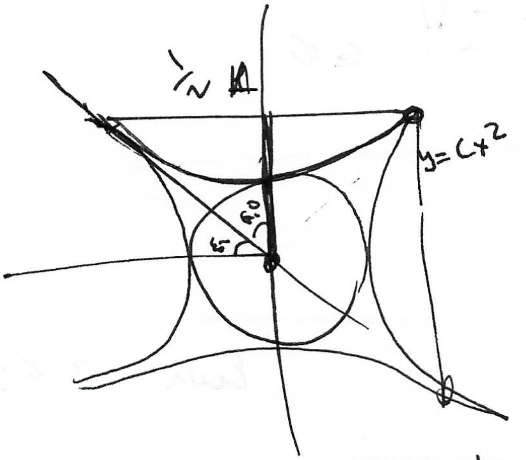
$$f'(x) = x'\log_a x + x(\log_a x)'$$

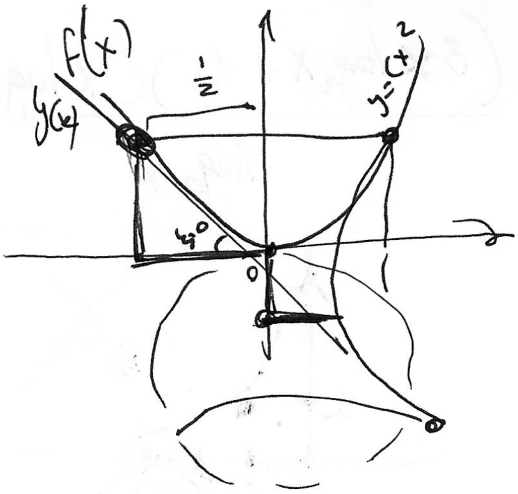


Черновик









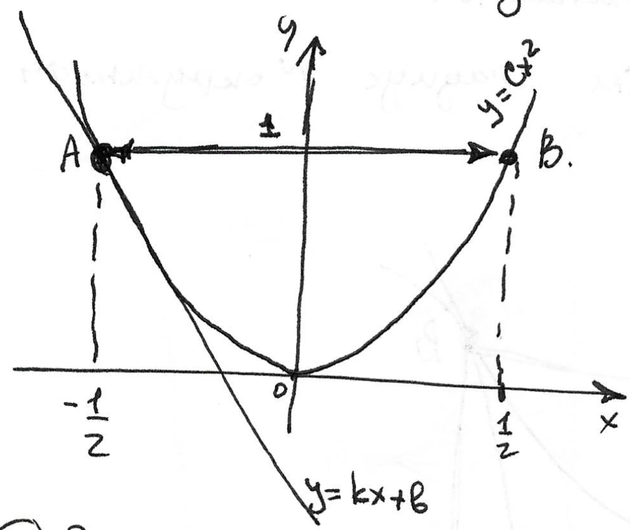
$f'(x) = (cx^2)' = 2cx = 1$ $\quad f'(x) = 1$

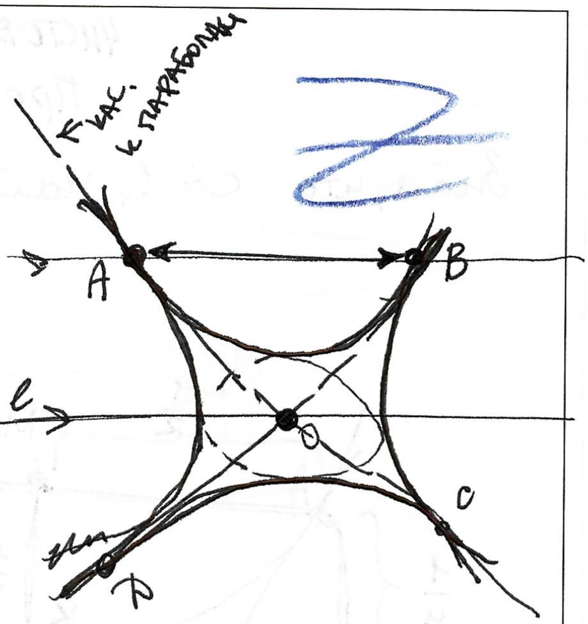
$x_0 = \frac{1}{2}$

$\cancel{2}c \cdot \frac{1}{\cancel{2}} = 1 \to c = 1$

ЧИСТОВИК

Задача 5





① Расположим верхнюю из парабол, образующих „квадрат", на координатной плоскости OXY так, чтобы её вершина совпадала с началом координат, а ~~...~~ ветви были направлены вверх. Пусть A и B – вершины „квадрата" из парабол, C и D – также вершины (см. рис.), а O – центр впис. в него окружности. Тогда координаты точек A и B в выбранной нами системе координат: $A\left(\frac{1}{2}; C\cdot\frac{1}{4}\right)$, $B\left(-\frac{1}{2}; C\cdot\frac{1}{4}\right)$.

② Пусть $y=kx+b$ – кас. к параболе в т. $A\left(\frac{1}{2}; \frac{C}{4}\right)$

Тогда $k=(Cx^2)'=C\cdot 2x = C\cdot 2\cdot\frac{1}{2} = C$

С другой стороны, т.к. в нашем „квадрате" величины углов нулевые, то диагональ AC, проходящая через т. O является также общей касательной парабол (касание в вершинах углов). Т.е. $AC \perp BD$.

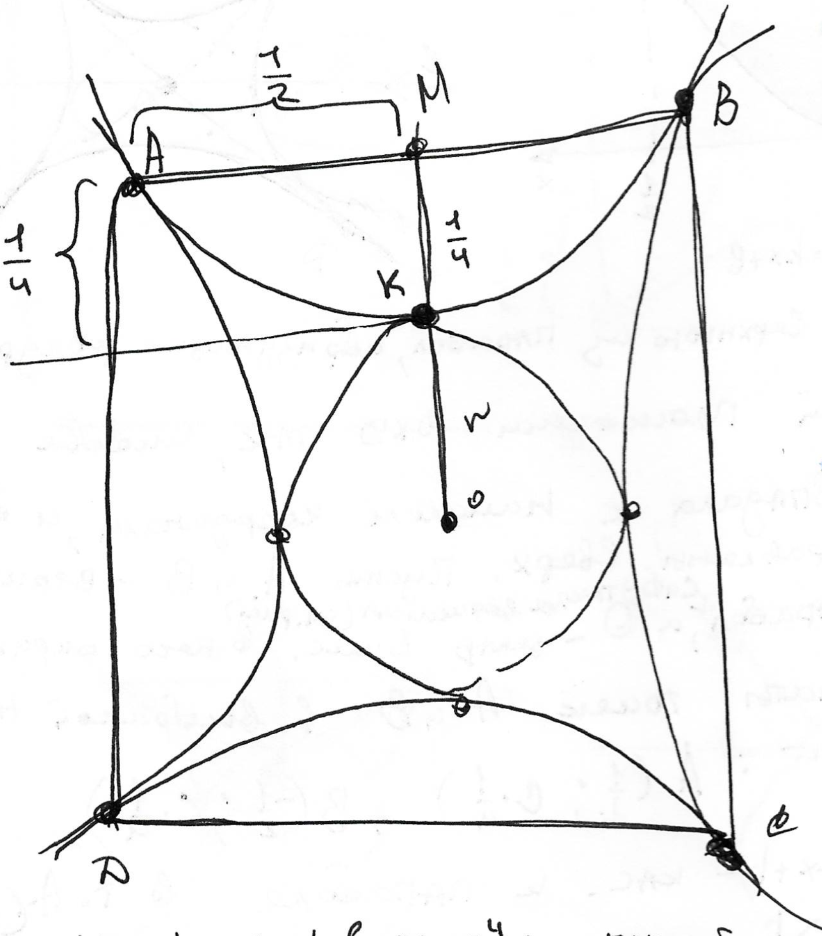
Проведём прямую l через т. O: $l \parallel AB \parallel OX$. Тогда l делит $\angle AOL$ пополам. Т.е. $\angle(AO, l) = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$, а это и есть угол наклона касательной. Т.е. $k = tg\,45^\circ = 1$.

$k = C = 1 \Rightarrow C = 1$. То есть $C\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$.

ЧИСТОВИК

Продолжение №5

Зная, что $c=1$, найдём радиус r окружности

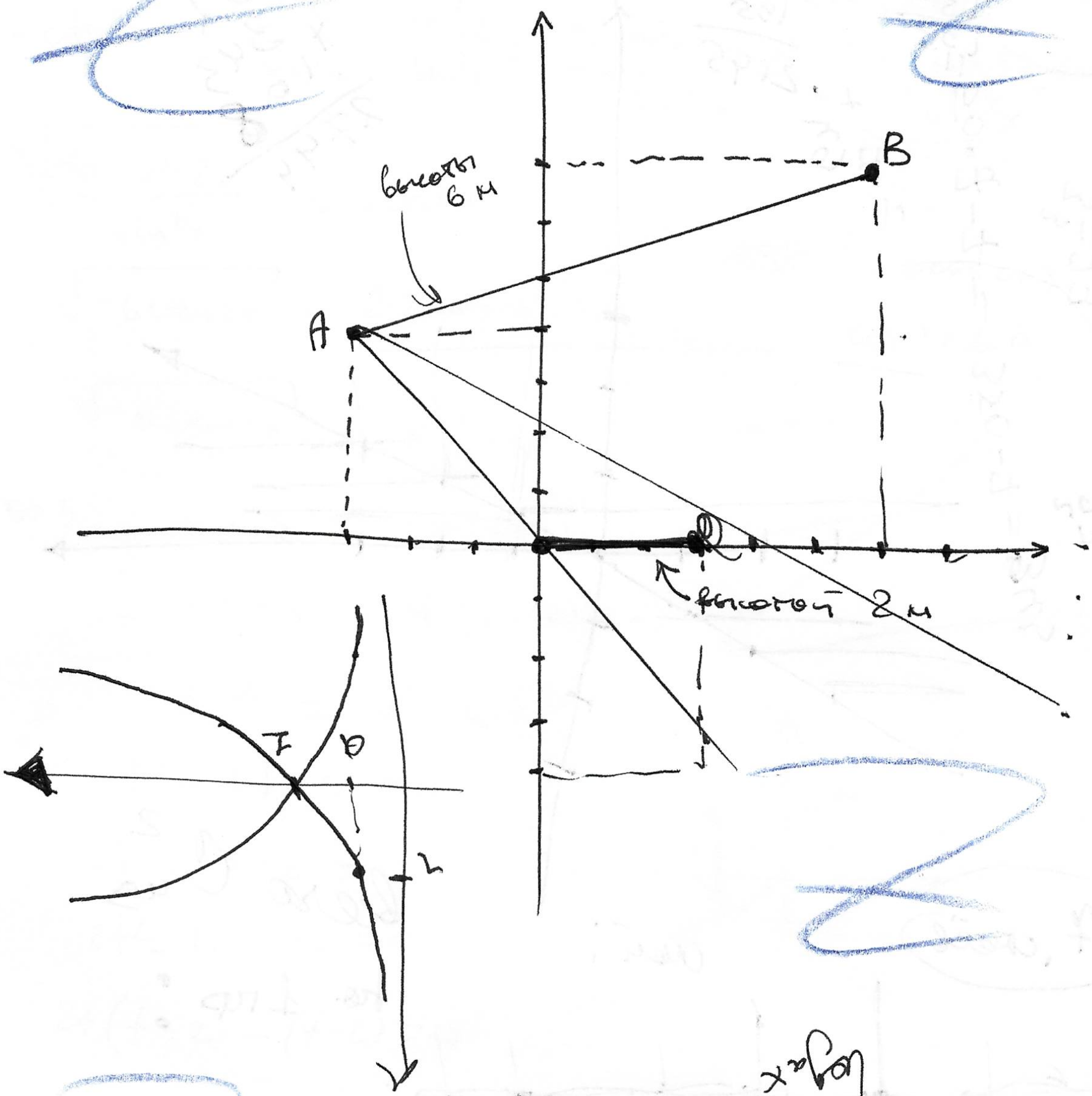


Впишем наш „квадрат" из парабол в „настоящий" квадрат ABCD (см. рис), т.е. проведём AB, BC, CD, AD. Тогда $AB=1$ по усл. Проведём через т. касания – K окр-ти и параболы · AB прямую, пусть $OK \cap AB = M$ тогда $AM=MB=\frac{1}{2}$, $OM=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}$ $MK=\frac{1}{4}$ из найденного ранее.

То есть $OK = r = OM - MK = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

Ответ: $\frac{1}{4}$

Черновик



$$3x^2\log_a x - \frac{1}{\log_a x} - 2x \leq 0$$

$$\frac{3x^2\log_a^2 x - 2x\log_a x - 1}{\log_a x} \leq 0$$

$$\frac{(3x\log_a x + 1)(x\log_a x - 1)}{\log_a x} \leq 0$$

Черновик

$$\begin{array}{r} 15 \\ \times\ 13 \\ \hline 45 \\ 15 \\ \hline 195 \end{array}$$

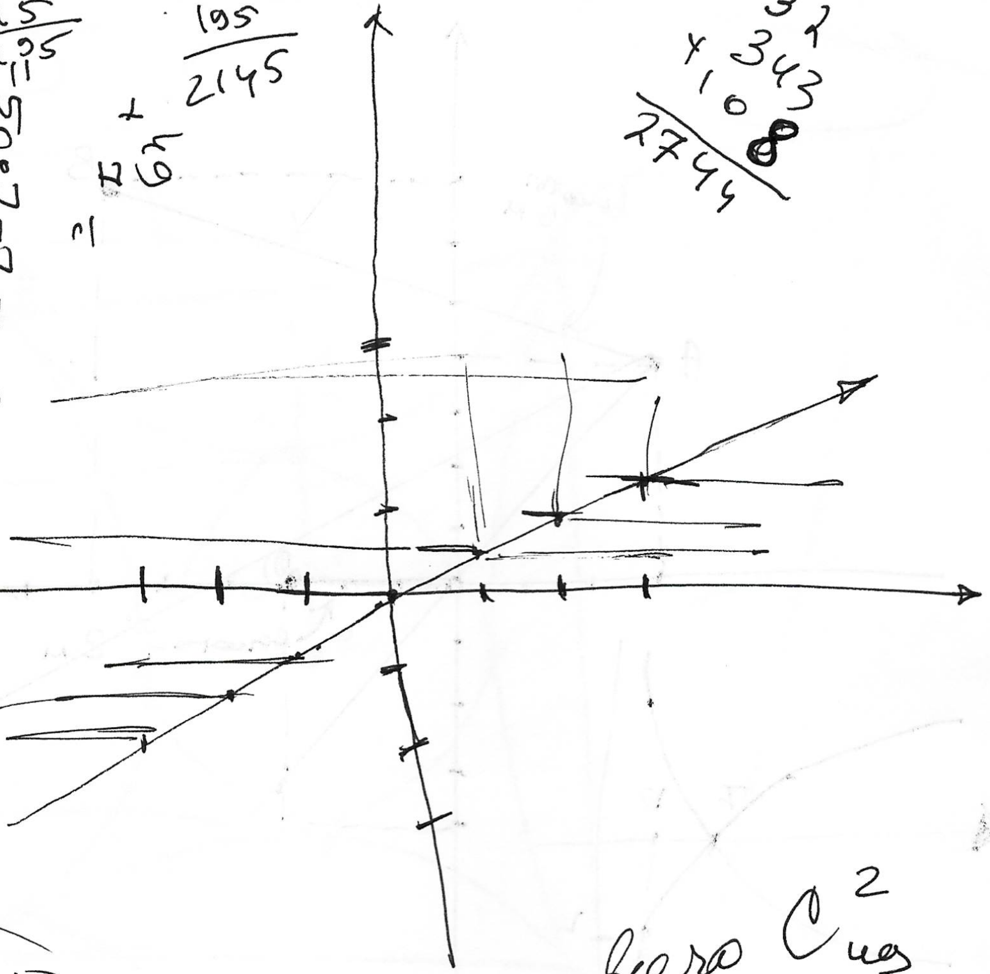
$$\begin{array}{r} 195 \\ 195 \\ \hline 2145 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 343 \\ \times\ 108 \\ \hline 2744 \end{array}$$

$3^3 = 27$

$50 \cdot 7 - 7 = 350 - 7 = 343$

$$\begin{array}{r} 27 \\ \times\ 4 \\ \hline 108 \end{array}$$



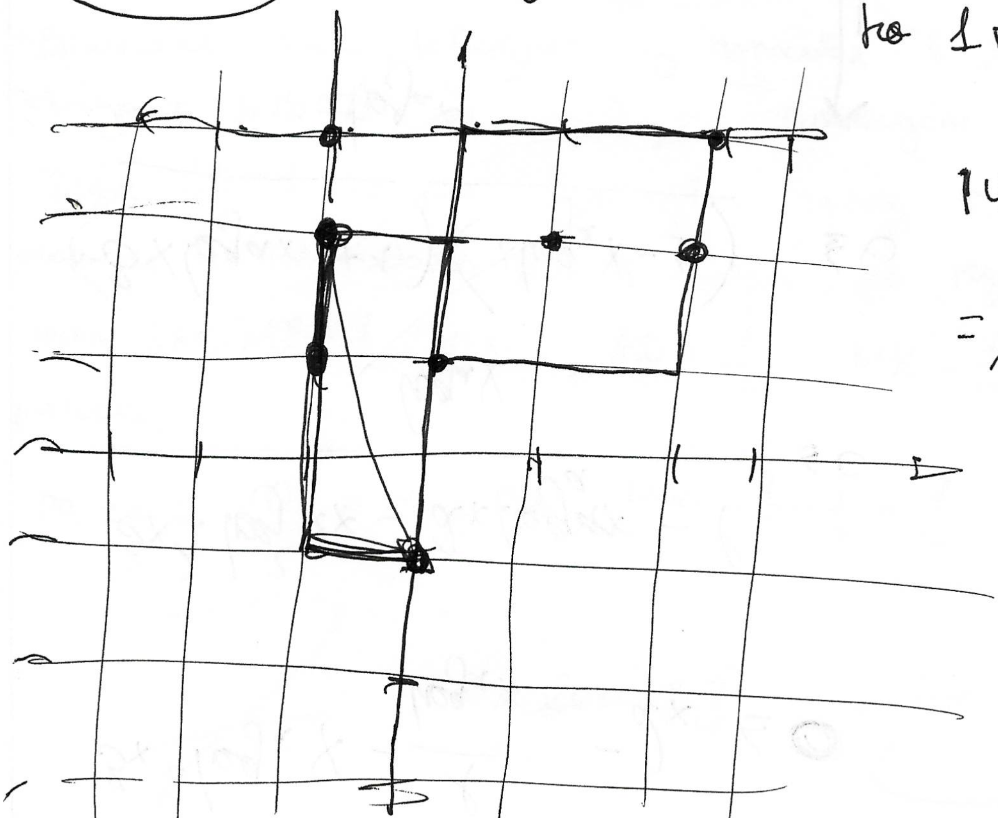
7 слоёв

слои:

всего C_{14}^{2}

на 1 пр:

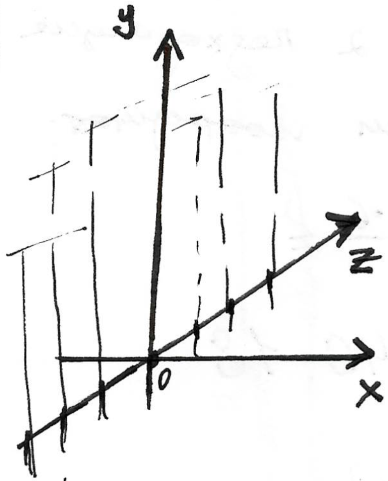
$14_{\text{прел}} \cdot C_{14}^{2} = \cancel{14}^{7} \cdot \frac{14 \cdot 13}{\cancel{2}}$



94-83-74-67 (12.7)

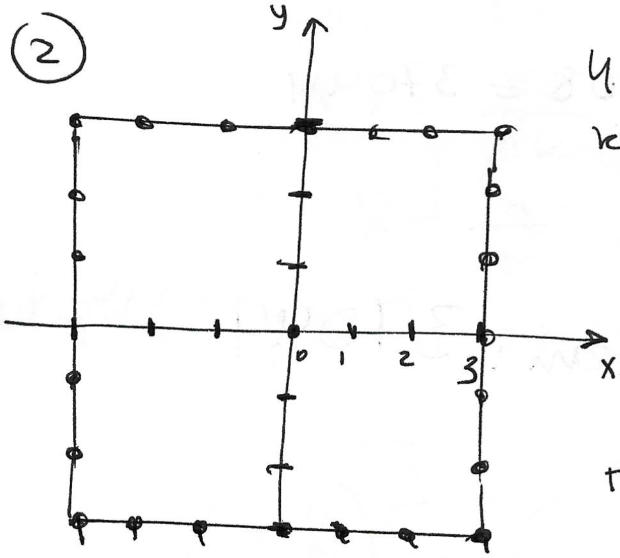
ЧИСТОВИК

Задача 3

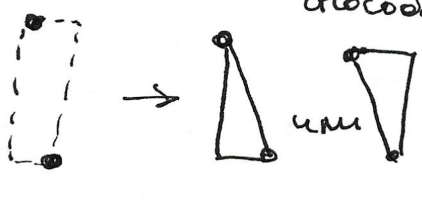


① Т.к. 2 катета △ параллельны 2-м осям, то △ полностью лежит либо в плоскости параллельной OXY, либо в плоскости параллельное OXZ, либо в пл-ти ∥ OYZ. Т.к. в каждой из плоскостей ситуация симметричная, то посчитаем кол-во искомых △-ов в плоскости, параллельной пл-ти OXY и умножим на 3. В каждой из этих плоскостей коорд. Z равна ±3; ±2; ±1 или 0 — 7 разл. вариантов. Т.к. в каждой плоскости ситуация одинаковая, то посчитаем кол-во △ в плоскости OXY (z=0) и умножим на 7.

②



Чтобы нарисовать △ с катетами ∥ осям нужно выбрать из 7·7=49 целых точек 2 не лежащие на одной прямой ∥ оси. Это будут концы гипотенузы. Потом △ можно достроить ровно 2-мя способами.



Кол-во способов выбрать 2 любые точки: C_{49}^2

Кол-во способов выбрать 2 точки лежащие на одной прям. (∥ оси) = кол-ву прямых $\cdot C_7^2 = 14 \cdot C_7^2$

Чистовик.
Продолжение N 3

Тогда кол-во способов выбрать 2 подходящие точки, не лежащие на прямой || оси координат:

$$C_{49}^2 - 14 \cdot C_7^2 = \frac{49 \cdot 48}{2} - \frac{\overset{7}{\cancel{14}} \cdot 7 \cdot 6}{\cancel{2}} =$$

$$= 49 \cdot \left(\frac{48}{2} - 6\right) = 49 \, (24-6) = 49 \cdot 18$$

Тогда кол-во Δ равно $49 \cdot 18 \cdot 2$

(3) Учтем п. (1):

Тогда всего искомых Δ-ов:

$$49 \cdot 18 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 3 =$$

$$= 7^2 \cdot 3^2 \cdot 2^2 \cdot 7 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7^3 =$$

$$= 343 \cdot 27 \cdot 4 = 343 \cdot 108 = 37044$$

$$\begin{array}{r} 343 \\ \times\ 108 \\ \hline 2744 \\ 343 \\ \hline 37044 \end{array}$$

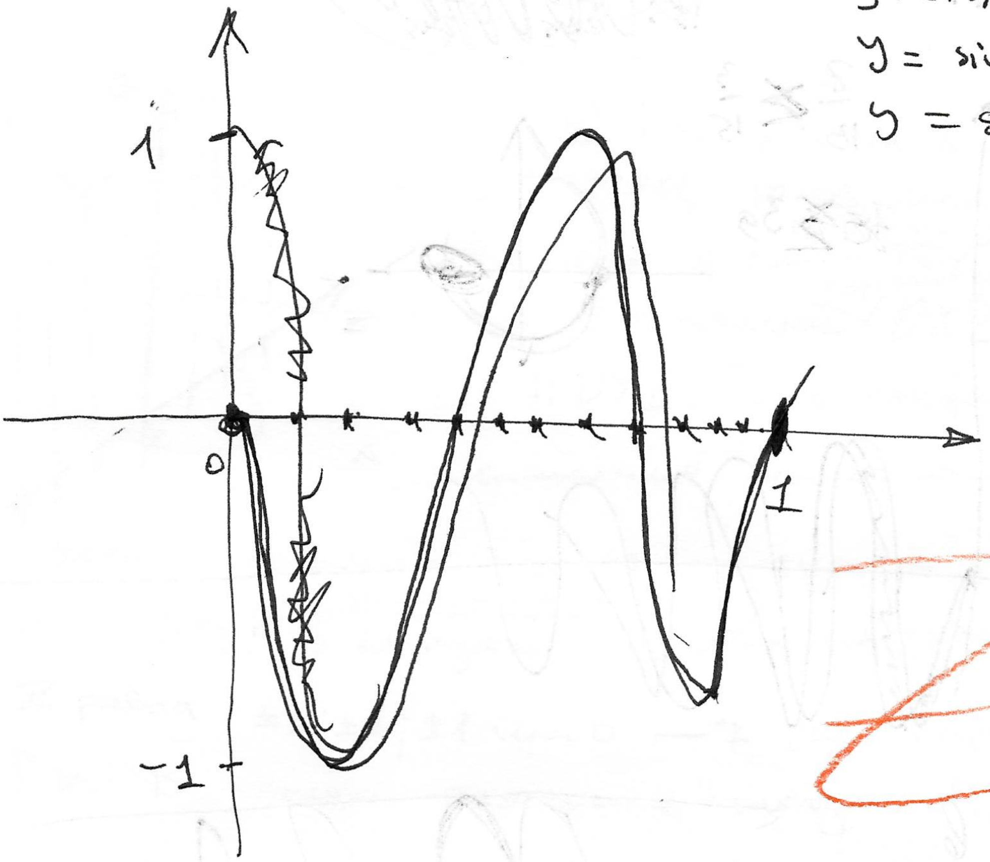
Ответ: 37044

Черновик

$y = \sin(11\pi x)$

$y = \sin(13\pi x)$

$y = \sin(15\pi x)$



$\sin(k\pi x) = 0$

$k\pi x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$

$x = \frac{\cancel{\pi} n}{\cancel{\pi} k}, n \in \mathbb{Z}$

$x = \frac{n}{k}, n \in \mathbb{Z}$

$\sin(11\pi)$

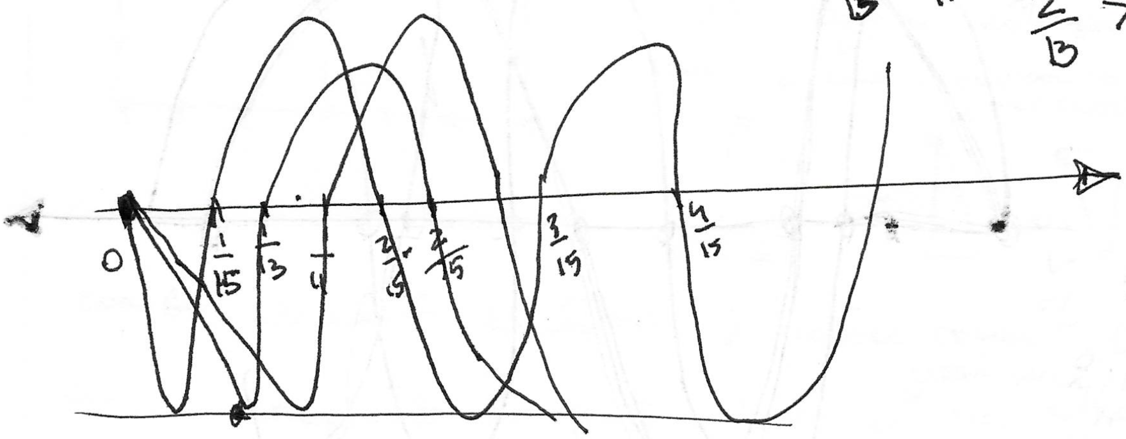
$\sin(2\pi k + \pi)$

НОК $= (11; 13; 15) = 11 \cdot 13 \cdot 15$

$\frac{2}{15} > \frac{1}{11}$

$22 > 15$

$\frac{2}{13} > 2$

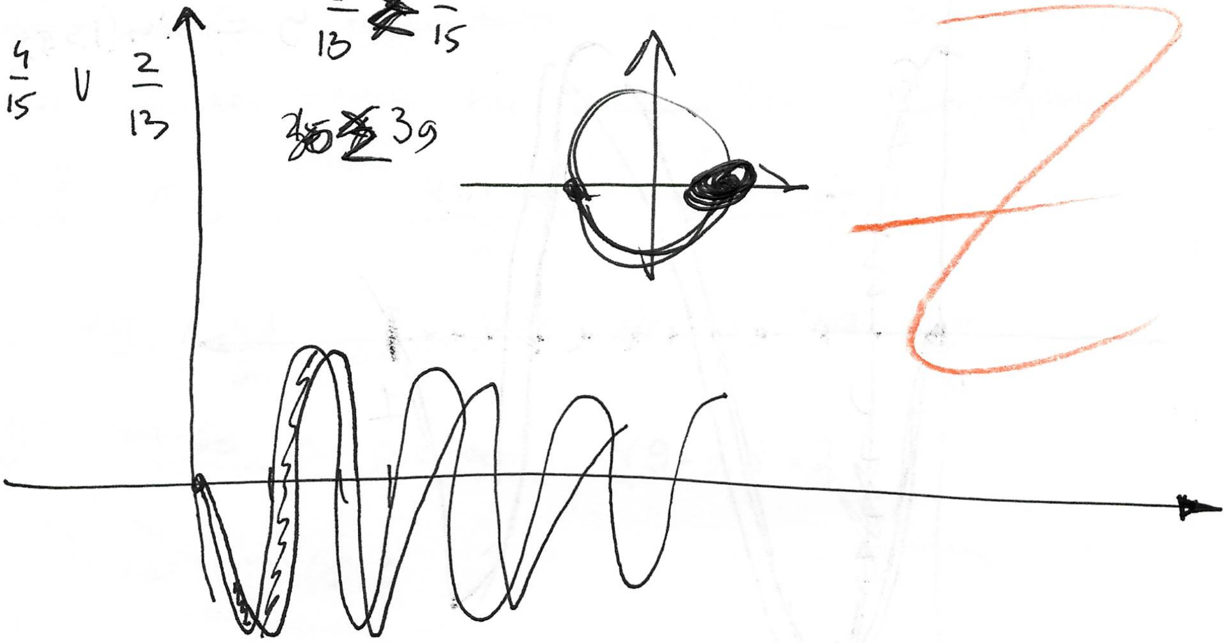


Черновик

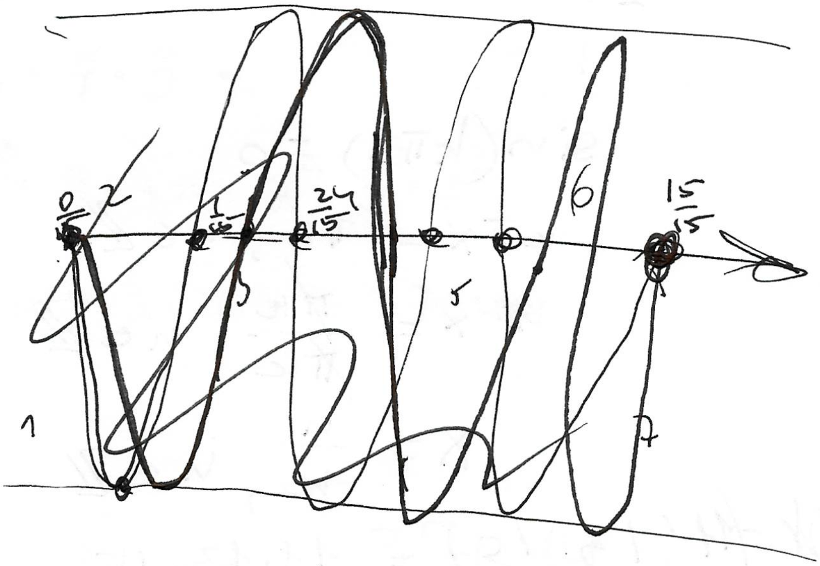
$15 \cdot 13 \cdot 11 = 2145$

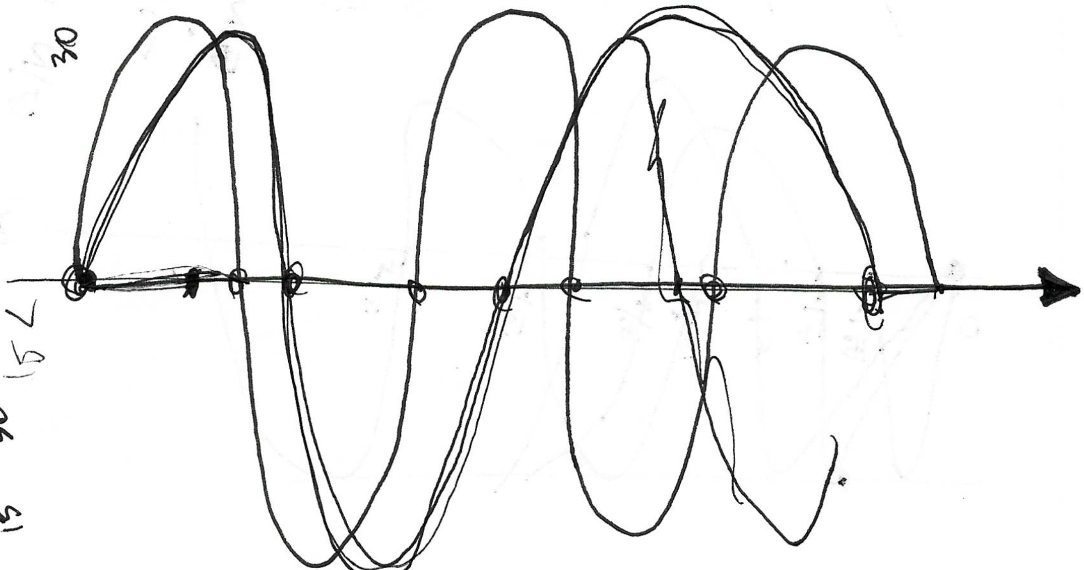
$\frac{4}{15} \vee \frac{2}{13}$

$\frac{2}{13} \quad \frac{3}{15}$



$\frac{9}{15} > \frac{6}{13}$



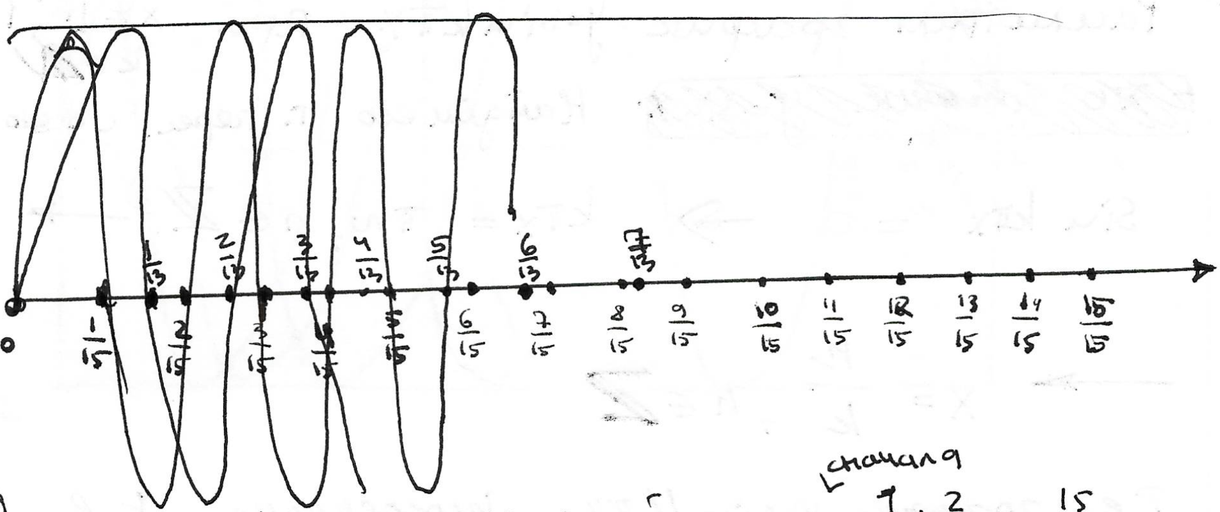


$\frac{2}{15} \vee \frac{1}{13}$

$\frac{2}{30} = \frac{1}{15}$

94-83-74-67
(124.7)

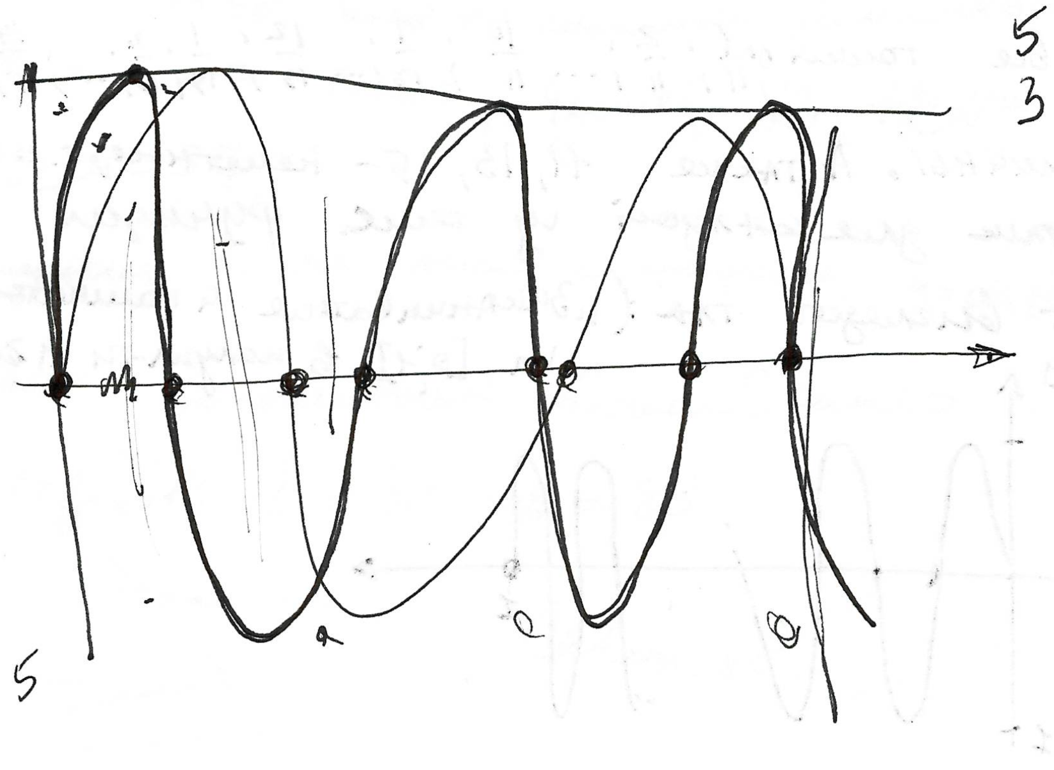
Черновик



Отметим на числ. прямой числа (сначала) $\frac{1}{15}, \frac{2}{15}, \dots \frac{15}{15}$, затем $\frac{1}{13}, \frac{2}{13}, \dots \frac{13}{13}$ и $\frac{1}{11}, \frac{2}{11}, \dots \frac{11}{11}$.

$\frac{1}{15} < \frac{1}{13} < \frac{2}{15}$, $\frac{2}{15} < \frac{2}{13} < \frac{3}{15}$, ... и так далее. Но в какой-то момент окажется, что $\frac{m+1}{15} < \frac{m}{13}$ где $m \in N$, $m \le 13$ $\to 13m+13 < 15m \to$

$\to$ $\left.\begin{array}{l} 2m > 13 \to m > 6{,}5 \\ m \in N \end{array}\right\} \Rightarrow m \geq 7$, $\frac{m}{13} < \frac{m+2}{15}$



ЧИСТОВИК
№4

Рассмотрим график $y=\sin k\pi x$ при $x\in[0;1]$, $k\in\mathbb{N}$.

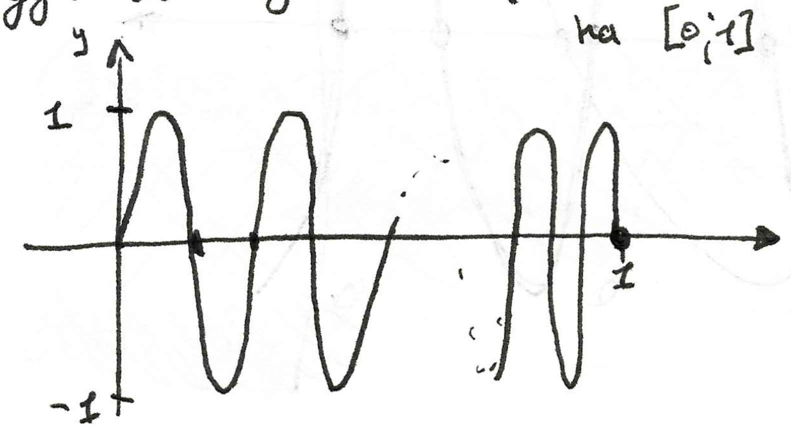
Найдём его т. перес. с осью x:

$\sin k\pi x=0 \Rightarrow k\pi x=\pi n,\ n\in\mathbb{Z} \longrightarrow$

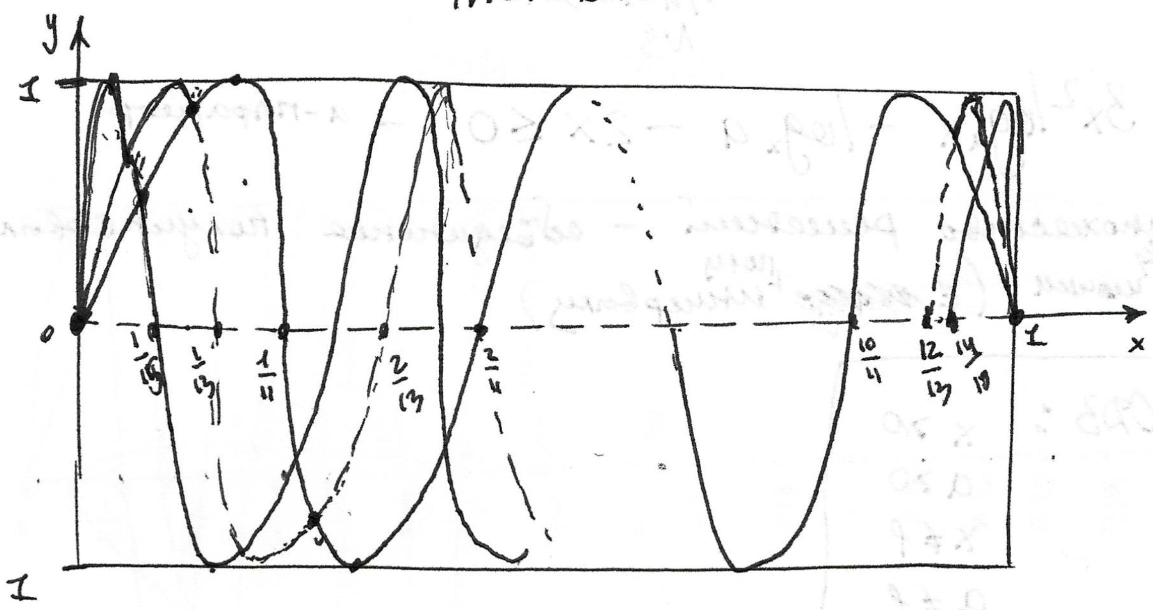
$\longrightarrow x=\frac{n}{k},\ n\in\mathbb{Z}$

Т.е. график $y=\sin 11\pi x$ пересекает Ox в точках $0; \frac{1}{11}; \frac{2}{11}; \frac{3}{11}; \dots \frac{11}{11}=1$, $y=\sin 13\pi x$ в точках $0; \frac{1}{13}; \frac{2}{13}; \dots \frac{13}{13}$; а $y=\sin(15\pi x)$ в точках $0; \frac{1}{15}; \frac{2}{15}; \dots \frac{15}{15}$.

Заметим, что т.к. числа 11, 13 и 15 попарно взаимопросты, то НОК$(11;13;15)=11\cdot13\cdot15$, а все точки $0; \frac{1}{11}; \frac{2}{11}; \dots \frac{10}{11}; \frac{1}{13}; \dots \frac{12}{13}; \frac{1}{15}; \frac{2}{15}; \dots; \frac{14}{15}; 1$ различны. А также 11, 13, 15 – нечетные, т.е график для каждой из опис. функций будет выглядеть так: („заканчиваться и начинаться" на $[0;1]$ в полупл-ти $y\geq0$)



ЧИСТОВИК



1) Нарисуем график $y = \sin(11\pi x)$ Он разделит Прямоугольник на 13 частей (точки кас с прямыми $y = \pm 1$ и $(0;0)$; $(1;0)$)

2) Нарисуем график $y = \sin(13\pi x)$ Он пересечет $y = \sin(11\pi x)$ в ~~13~~ 12 точках (из взаимопростоты), не считая точек $(0;0)$ и $(1;0)$ с каждой т. перес. графиков кол-во непрес. областей увеличивается на 2 т. е. Теперь частей $13 + 12 \cdot 2 =$
$= 13 + 24 = 37$.

Повторим то же самое с графиком $y = \sin(15\pi x)$

~~Закрашенных~~ Закрашенных областей число

$37 + 2 \cdot 16 + 16 = 37 + 48 = 85$

Ответ: 85

ЧИСТОВИК

№8

$3x^2 \log_a x - \log_x a - 2x \leq 0$ – a-параметр

множество решений – объединение полуинтервала и точки (∉ полуинтервалу)

ОДЗ: $x > 0$, $a > 0$, $x \neq 1$, $a \neq 1$

$$3x^2 \log_a x - \frac{1}{\log_a x} - 2x \leq 0$$

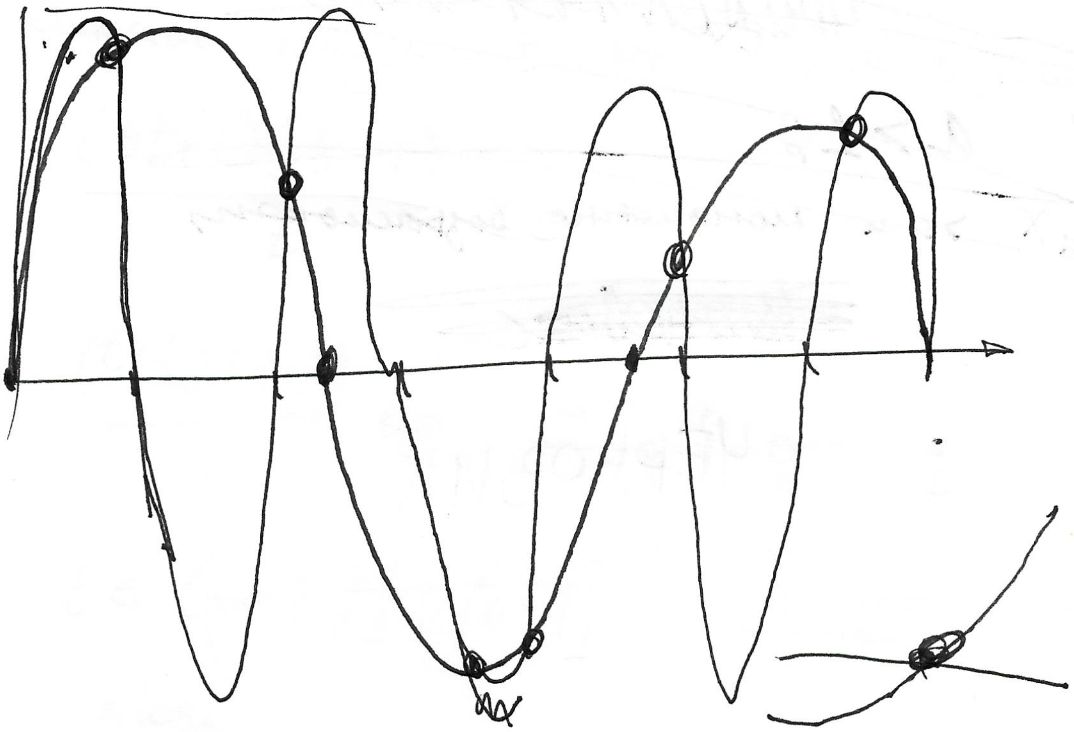
$$\frac{3x^2 \log_a^2 x - 2x \log_a x - 1}{\log_a x} \leq 0$$

$$\frac{3x^2 \log_a^2 x - 3x \log_a x + x \log_a x - 1}{\log_a x} \leq 0$$

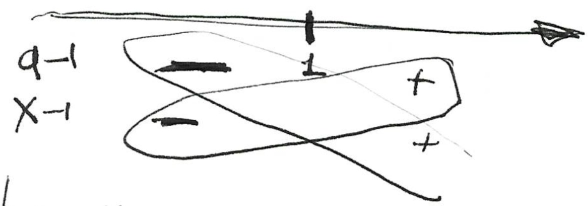
$$\frac{(3x \log_a x + 1)(x \log_a x - 1)}{\log_a x} \leq 0 \quad \Big| : x, \; x > 0$$

94-83-74-67
(124,7)

ЧЕРНОВИК



~~Если $\log_a x$~~



$\log_a x > 0$

$x \log_a x - 1 \vee 0$

$\cancel{x \log_a x \vee 1}$

$\frac{1}{x} = \log_a a^{\frac{1}{x}}$

$x\ (a-1)(a^{\log_a x} - a^{\frac{1}{x}})$

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

~~ЧИСТОВИК~~

~~ПРОДОЛЖЕНИЕ №8~~

~~Если $a>1$,~~

~~$\log_a x$ то и монотонно возрастает~~

~~Черновик~~

ЧЕРНОВИК

Подписывать лист-вкладыш запрещено! Писать на полях листа-вкладыша запрещено!

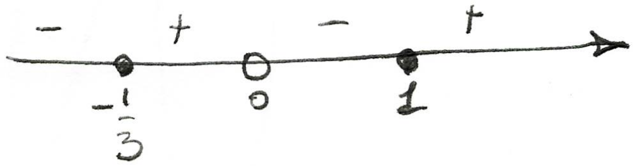
Чистовик

№8. продолжение.

Замена $x\log_a x = t$, где $x>0$, т.е t знакоэкв $\log_a x$

$$\frac{(3t+1)(t-1)}{t} \le 0$$

$$\frac{(t+\frac{1}{3})(t-1)}{t} \le 0$$



$t \in (-\infty; -\frac{1}{3}] \cup (0; 1]$ $\xrightarrow{\text{обр. замена}}$

$x\log_a$