0 054653 170009

05-46-53-17
(122.12)

1755

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант ______________________________

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Мамитова Георгия Иналовича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«29» 03 2026 года

Подпись участника

Чистовик

№1

Решение:

1) Обозначим хорды AC и BD

2) Проведём AD, AB, BC, CD

3) ~~Р~~ $AC \cap BD = O$;

$\triangle ADO = \triangle BOC$ по I пр., т.к. $\angle AOD = \angle BOC$, как вертикальные; $BO = DO$; $CO = AO$ по условию $\Rightarrow \angle ADB = \angle CBD$

4) $\angle ADB = \angle CBD \Rightarrow AD \parallel BC$, т.к. $\angle ADB$ и $\angle CBD$ – накрест лежащие при прямых AD и BC и секущей BD

4) Соот-но для $\triangle BOA$ и $\triangle DOC$: $AB \parallel DC$; $\angle ODC = \angle OBA$

5) $\angle ABC = \angle ADC$, т.к. $\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC = \angle BDC + \angle BDA = \angle ADC$;

6) $AB \parallel DC$; $AD \parallel BC \Rightarrow ABCD$ – пар-мм;

$\angle ADC + \angle ABC = 180^\circ$, т.к. это вписанные углы дуг $\smile ADC$ и $\smile ABC$, т.е. $\angle ADC + \angle ABC = \frac{1}{2}(\smile ADC + \smile ABC) = 180^\circ$

7) $\angle ABC + \angle ADC = 2\angle ABC = 180^\circ \Rightarrow \angle ABC = 90^\circ \Rightarrow ABCD$ прямоугольник

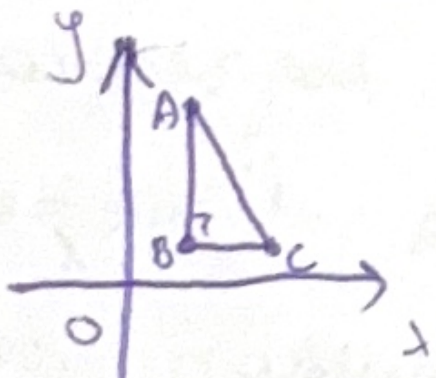
8) Т.к. у описанного прямоугольника диагонали пересекаются ~~в~~ в центре опис. окр-ти, то O – центр окружности

9) Т.к. 3 хорда гарантированно проходит через т. O, то эта хорда – диаметр, её величина – $2r = 10$

Ответ: 10

№3.

Решение:



1) Т.к. $AB \parallel Oy$; $BC \parallel Ox$ ~~хорд~~ абсциссы точек A и B должны совпадать, а так же должны совпадать ординаты точек B и C, т.е.

$A(a_1; b_1)$; $B(a_1; b_2)$; $C(a_2; b_2)$

2) Это значит, что кол-во таких тр-ков – это кол-во конфигураций $a_1; b_1; a_2; b_2$, при этом $a_1; b_1; a_2; b_2 \in \mathbb{N}$; $a_1; b_1; a_2; b_2 \le 10$; т.е $a_1; b_1; a_2; b_2 \in \{1;2;3;4;5;6;7;8;9;10\}$

3) Для каждого числа 10 вариантов $\Rightarrow$ кол-во таких тр-ков: $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^4 = 10000$

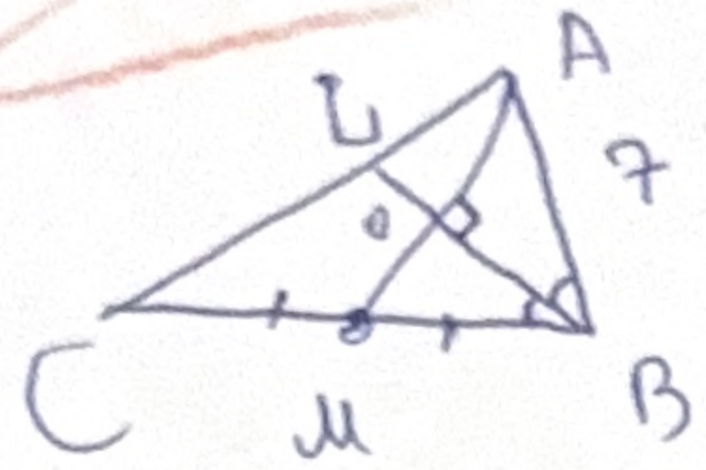
Ответ: 10000

Лист 1

Чистовик

№4

Решение:



1) $BL \cap AM = O$

2) $\triangle AOB = \triangle BOM$ по II пр.:

BO - общая; $\angle OBM = \angle OBA$; $\angle BOM = \angle BOA = 90°$

$\Rightarrow AB = MB = 7$

3) $MB = \frac{1}{2} BC = 7 \Rightarrow BC = 14$

4) По ~~кас~~ неравенству тр-ка:

$$\begin{cases} AC < BC + AB \\ AB < AC + BC \\ BC < AB + AC \end{cases}; \quad \begin{cases} AC < 21 \\ \cancel{7} \; 7 < 14 + AC \\ 14 < \cancel{7} \; 7 + AC \end{cases}; \quad \begin{cases} AC < 21 \\ AC > -7 \\ AC > 7 \end{cases};$$

$7 < AC < 21$

5) По условию: $AC \in \mathbb{Z}$; $\begin{cases} AC \neq AB \\ AC \neq BC \end{cases}$; $\begin{cases} AC \neq 7 \\ AC \neq 14 \end{cases}$, т.е.

$AC \in \{8; 9; 10; 11; 12; 13; 15; 16; 17; 18; 19; 20\}$

6) $P_{ABC} \in [8+21; 20+21]$, $P_{ABC} \in \mathbb{N}$, $P_{ABC} \neq 35$

Ответ: 29; 30; 31; 32; 33; 34; ~~35~~; 36; 37; 38; 39; 40; 41

№5.

Т.к. $\upsilon = const$, то девочка не останавливается. ~~...~~

Это значит, что υ_{max} будет, когда девочка подъезжает идеально к началу зелёного цвета у светофора, υ_{min} - когда девочка проезжает пешеходный переход к концу зелёного цвета.

~~Х~~ Пусть x м/с - υ девочки, запишу ~~отрезки~~ возможные значения x через υ_{max} и υ_{min} для обоих светофоров:

$$\begin{matrix} \text{I} \\ \text{II} \end{matrix} \begin{cases} \frac{50+30}{50+30} \le x \le \frac{50}{30} \\ \frac{50+30+120+10}{50+50+50+10} \le x \le \frac{50+30+120}{50+50+50+10} \end{cases}; \quad \begin{cases} 1 \le x < 1\frac{2}{3} \\ 1 \le x \le 1\frac{1}{4} \end{cases}$$

Решением будет max значение в пересечении двух отрезков, т.е. $1\frac{1}{4}$ м/с. Отмечу, что для II светофора считаем время 3 зелёного цвета после выезда девочки, т.к. раньше она успеть не может.

Ответ: $1\frac{1}{4}$ м/с

Лист 2

05-46-53-17
(122.12)

Чистовик

№6

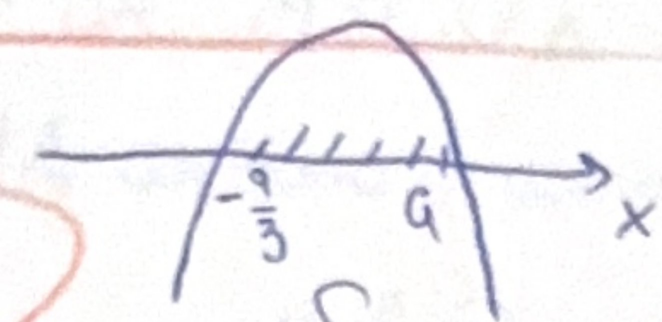
$\frac{1}{a} + \frac{2x}{a^2} - \frac{3x^2}{a^3} \le 0 \quad ; \; | \cdot a^3$ $a \ne 0$, т.к. a, a^2, a^3 стоят в знаменателе

$a^2 + 2ax - 3x^2 \; \underset{\ge}{\le} \; 0$

$a^2 + 2ax - 3x^2 = 0$

$D = 4a^2 + 4 \cdot 3 \cdot a^2 = 16a^2$

$\left[\begin{array}{l} x_1 = \frac{-2a + 4a}{-6} = -\frac{a}{3} \\ x_2 = \frac{-2a - 4a}{-6} = a \end{array} \right.$



либо

Чтобы решением был отрезок, знак неравенства должен быть $\ge$ => знак поменялся, $a^3 < 0$ => $a < 0$

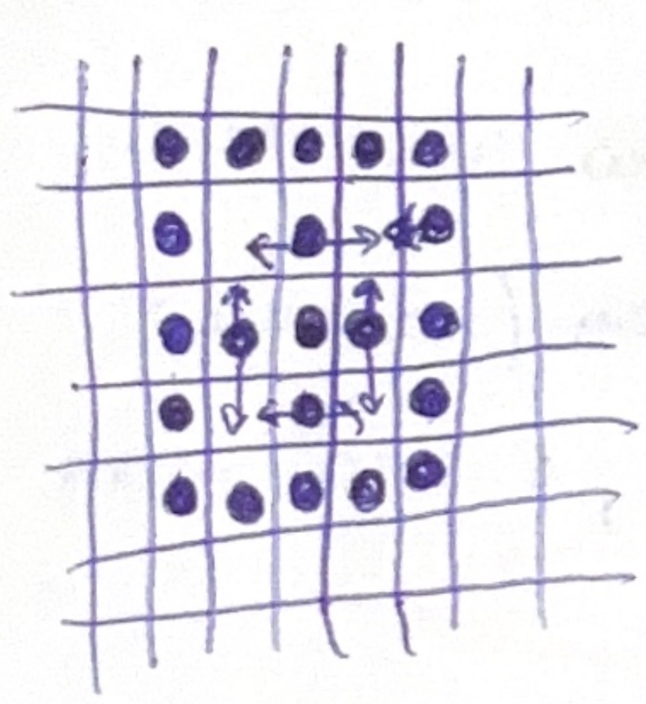
$\left[\begin{array}{l} a - \left(-\frac{a}{3}\right) = 2026 \\ -\frac{a}{3} - a = 2026 \end{array} \right.$; $\left[\begin{array}{l} \frac{4a}{3} = 2026 \\ -\frac{4a}{3} = 2026 \end{array} \right.$; $a = \pm \frac{\overset{1013}{\cancel{2026}} \cdot 3}{\cancel{4}_2}$, но $a < 0$

$a = -\frac{3039}{2} = -1519{,}5$

Ответ: $-1519{,}5$

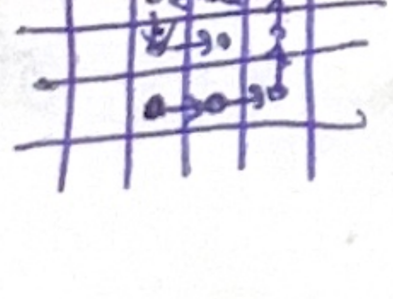
№8.

• – закрашенные клетки



– на рисунке представлены возможные „закраски" для произвольной клетки. Как можно увидеть таких „закрасок" 8 штук. Это значит, что $P_{об.} = P_{закр.} \cdot 8$. Посчитаем

P закраски:



I шаг: $p = \frac{1}{4}$;
II шаг – VII шаг: $p = \frac{1}{3}$
VIII шаг: $p = \frac{1}{2}$

$P_{закр.} = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^6 \cdot \frac{1}{2}$

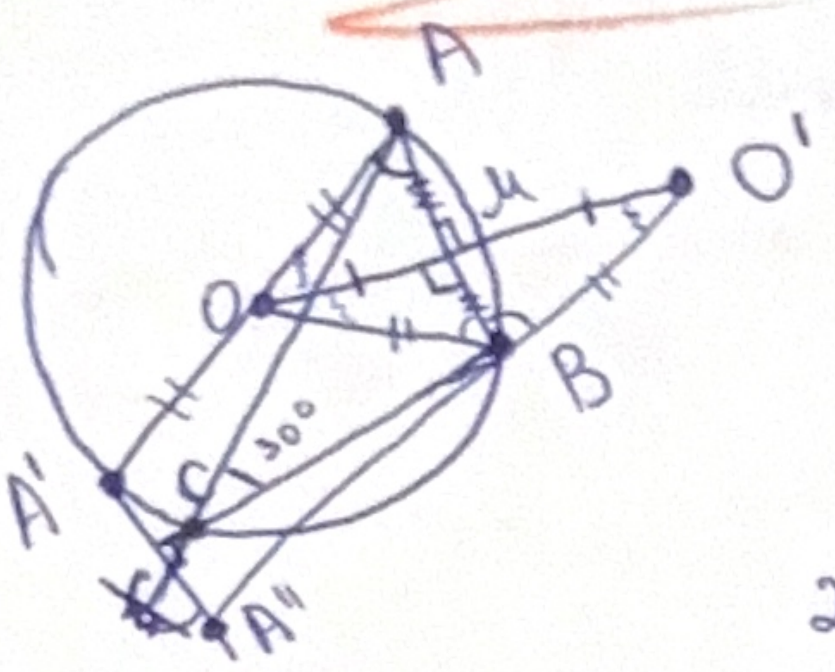
$P_{об.} = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{1}{\cancel{4}} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^6 \cdot \cancel{8} = \left(\frac{1}{3}\right)^6 = \frac{1}{3^6} = \frac{1}{729}$ Ответ: $\frac{1}{729}$

Лист 3

Чистовик

№7.

Решение:



1) AO = OA', как радиусы
  ||
  OB

2) $OO' \cap AB = M$

3) $\triangle OMB = \triangle O_1MB$ по I пр., т.к. $\angle OMB = \angle O'MB = 90°$, т.к. O и O_1 симметрично отн-но AB, $OM = O'M$ так же, MB - общая $\Rightarrow$ $\angle OBM < \angle O'BM$

4) $AO = OB \Rightarrow \triangle AOB$ - р/б, $\angle OAB = \angle OBM = \angle O'BM$

5) $\angle O'BM = \angle OAB \Rightarrow AA' \parallel O'A''$, т.к. $\angle O'BM$ и $\angle OAB$ - накрест лежащие при пар. прямых $O'A''$ и AA' и секущей AB

Ответ: $\angle B = 90°$

№2

Для начала заметим, что если n - четырехзначное, то n^2 - семи- или восьмизначное.

$$\begin{array}{r} \times\ 9999 \\ 9999 \\ \hline 89991 \\ 89991 \\ 89991 \\ 89991 \\ \hline 99980001 \end{array}$$

Если n^2 - семизначное, то нам подойдёт только 1000, т.к. иначе одна из первых 4-х цифр точно совпадать не будет (начиная с 1415 не будет совпадать ~~как~~ первая цифра, а с 1001 по 1414 либо 2, либо 3, либо 4)

Если же n^2 - восьмизначное:

~~Заметим~~ Пусть $n = \overline{abcd}$, тогда $n^2 = \overline{abcd}$ ~~a+~~ 1000a + ~~abcd~~ ~~bcd~~, ~~при этом 1000a > bcd~~.

Рассмотрим max(n), т.е. n = 9999, тогда $n^2 = 99980001$, т.е. даже при max n ~~числа~~ 9 и 8 цифры нельзя „догнать" по сравнению с $n \Rightarrow n^2$ - семизначное, n = 1000 Ответ: 1000

Листы

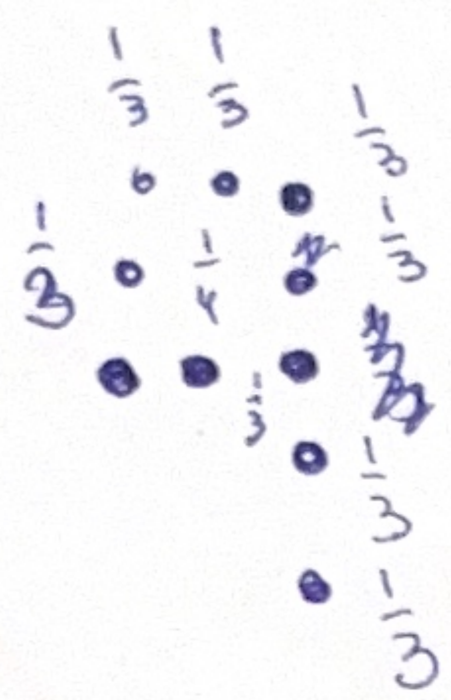
Черновик

$$\begin{array}{r} \times\,318 \\ 318 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times\,3190 \\ 3190 \\ \hline 2871 \\ 319 \\ 957 \\ \hline 10176100 \end{array}$$

$$\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^6\cdot\frac{1}{2}\cdot 8 =$$

$$\frac{1}{3}^{6} = \frac{1}{36}$$



81 729

$9 \cdot 9 \cdot 9$

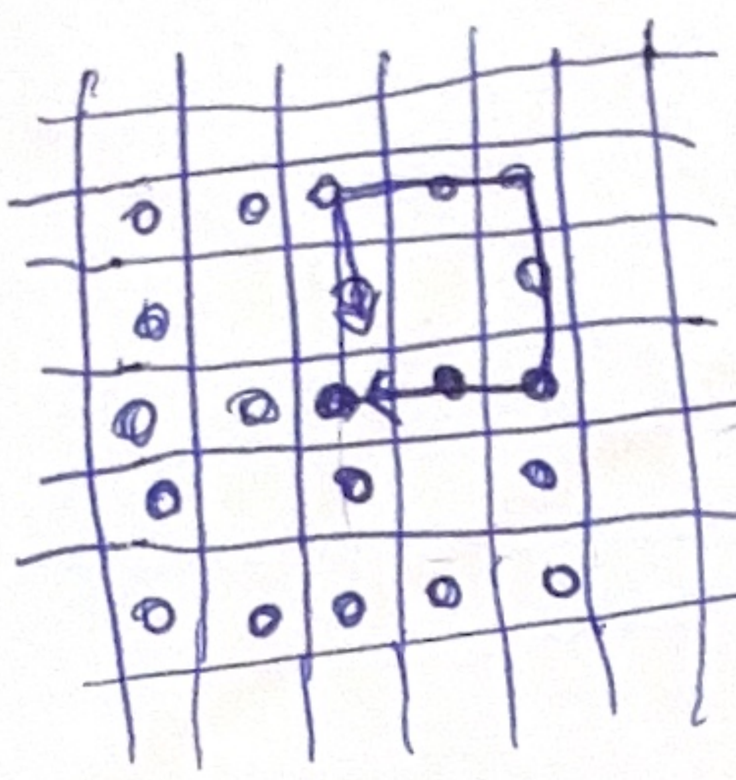
$$\frac{1}{729}$$

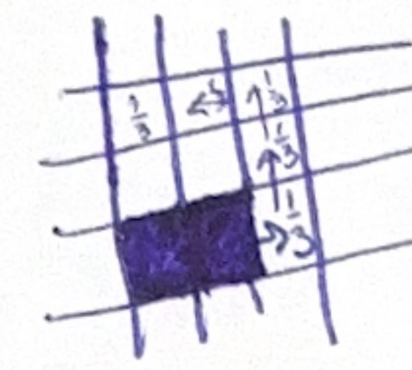
$\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}$

$\frac{1}{3}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$

$\frac{1}{4}$ $\frac{1}{3}$

$$\begin{array}{r} 5656 \\ 1414 \\ 5656 \\ 1414 \\ \hline 1999396 \end{array}$$





$$\begin{array}{r} \times\,1414 \\ 1414 \\ \hline 5656 \\ 1414 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times\,1412 \\ 1412 \\ \hline 2824 \\ 1412 \\ 5648 \\ 1412 \\ 1993744 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times\,1411 \\ 1411 \\ \hline 1411 \\ 1411 \\ 5644 \\ 1411 \\ 1990911 \end{array}$$

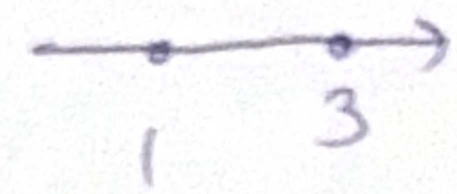
$$\begin{array}{r} \times\,1419 \\ 1419 \\ \hline 141 \\ 564 \\ 141 \\ \hline 19881 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times\,1415 \\ 1415 \\ \hline 7075 \\ 1415 \\ 5660 \\ 1415 \\ \hline 2002225 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times\,9999 \\ 9999 \\ \hline 89991 \\ 89991 \\ 89991 \\ 89991 \\ \hline 99980001 \\ 0 \end{array}$$

Черновик

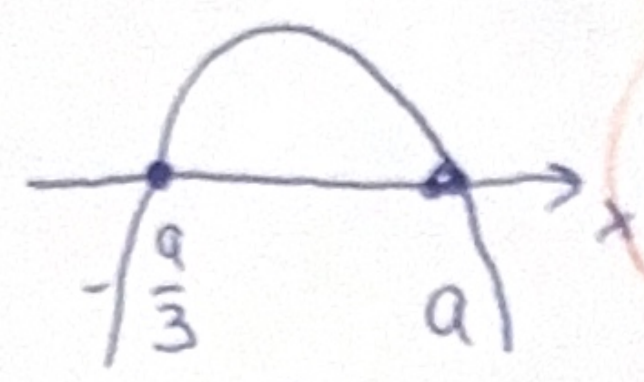
$\frac{1}{a}+\frac{2x}{a^2}-\frac{3x^2}{a^3}\le 0 \; ; \quad \Big|\cdot a^3$



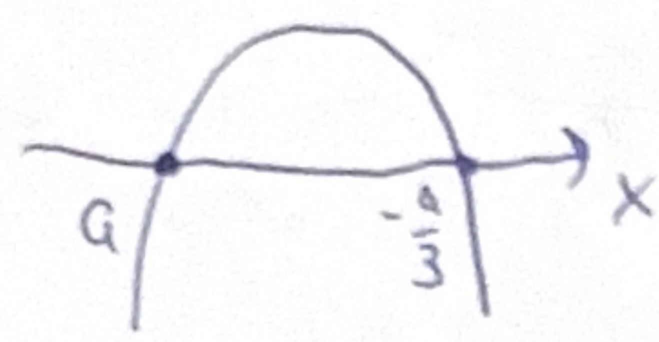
$a^2+2ax-3x^2\le 0$

$D=b^2-4ac=4a^2+4\cdot a^2\cdot 3=16a^2$

$\left[\begin{array}{l} x_1=\frac{-2a+4a}{-6}=-\frac{a}{3} \\ x_2=\frac{-2a-4a}{-6}=a \end{array}\right.$

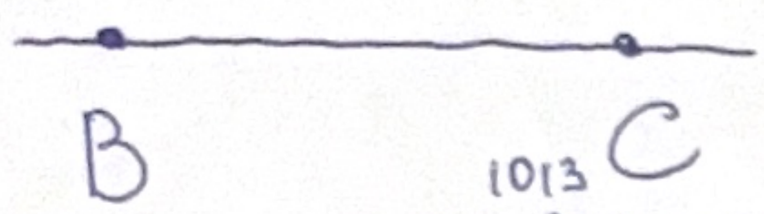


либо



$a-\left(-\frac{a}{3}\right)=2026$

$-\frac{a}{3}-a=2026$



$\frac{4a}{3}=2026$

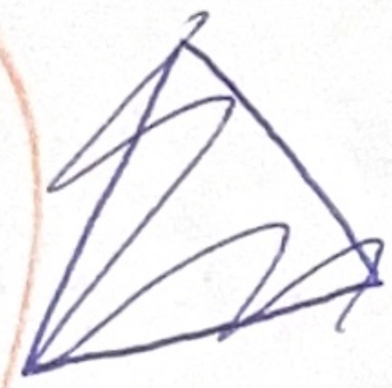
$a=\pm\frac{\overset{1013}{\cancel{2026}}\cdot 3}{\underset{2}{\cancel{4}}}$

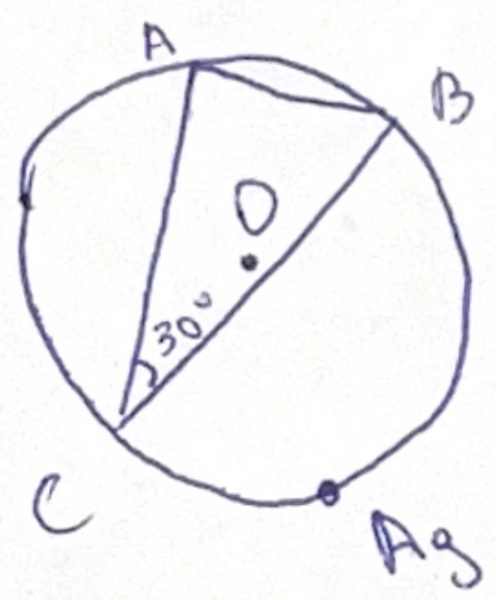
$-\frac{4a}{3}=2026$

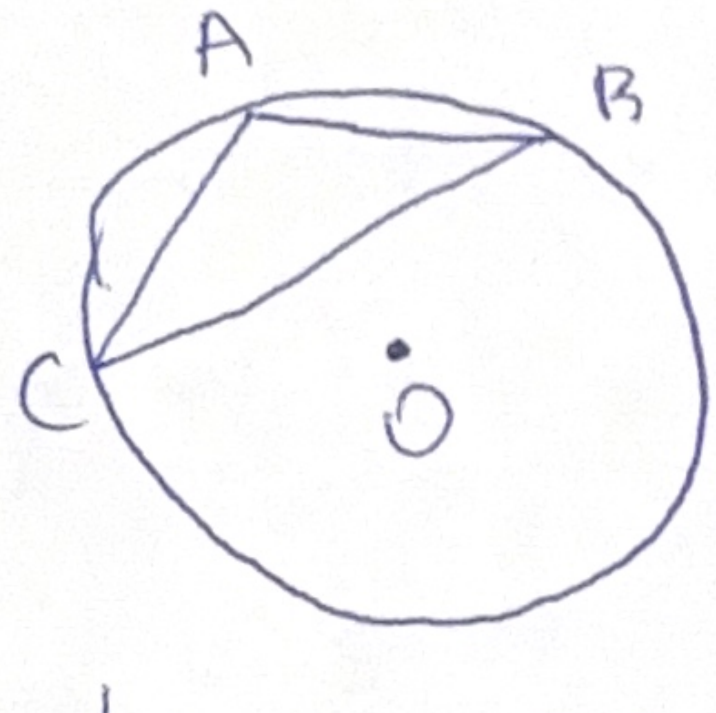
$a=\pm\frac{3039}{2}=\pm 1519{,}5$

$\cdot\, O'$

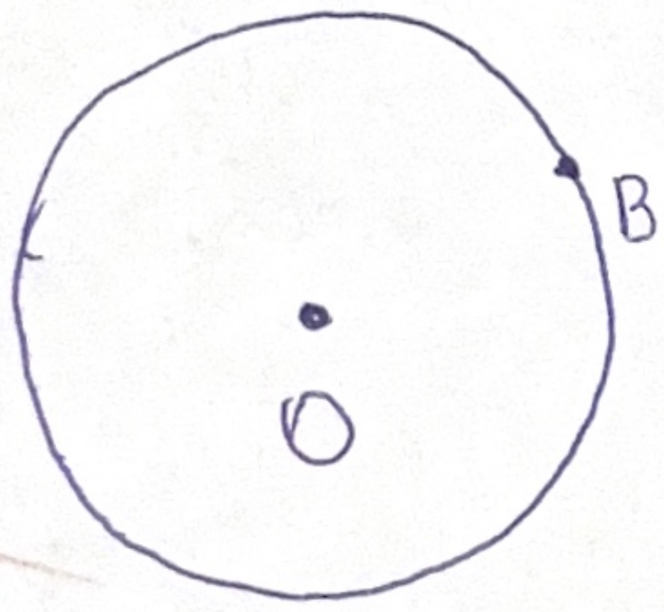
№7.

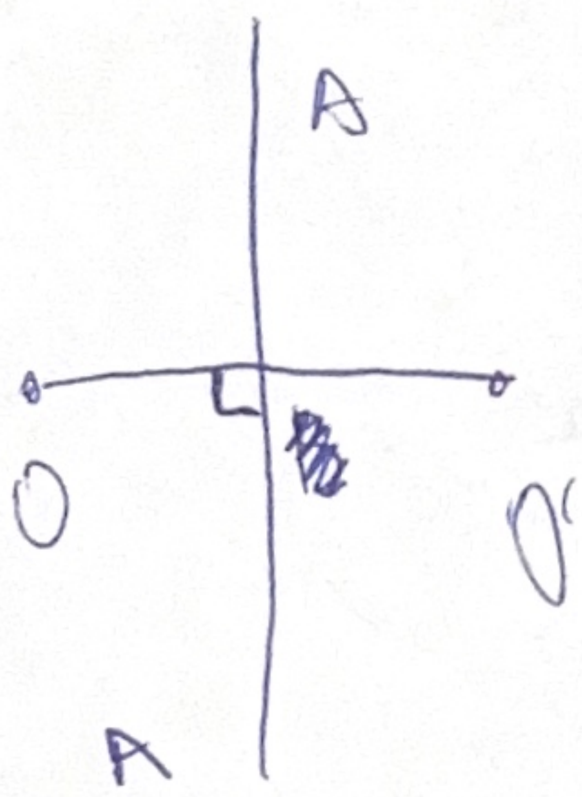


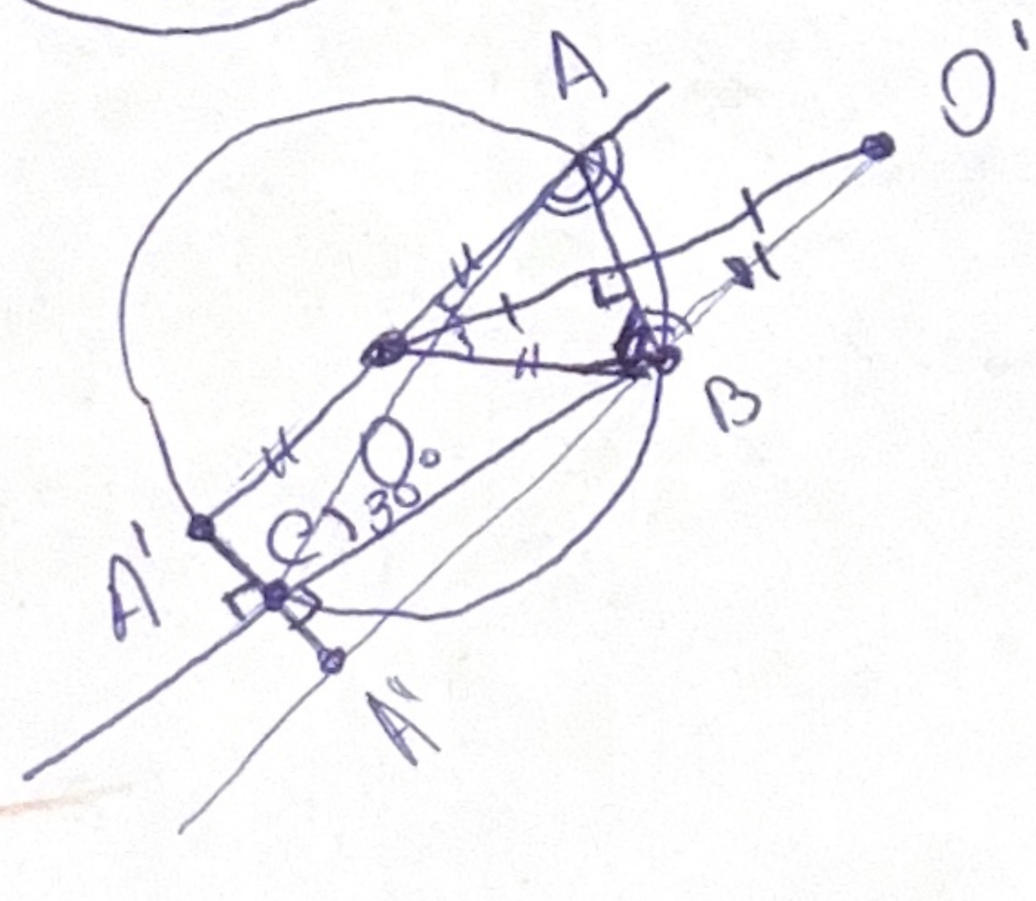


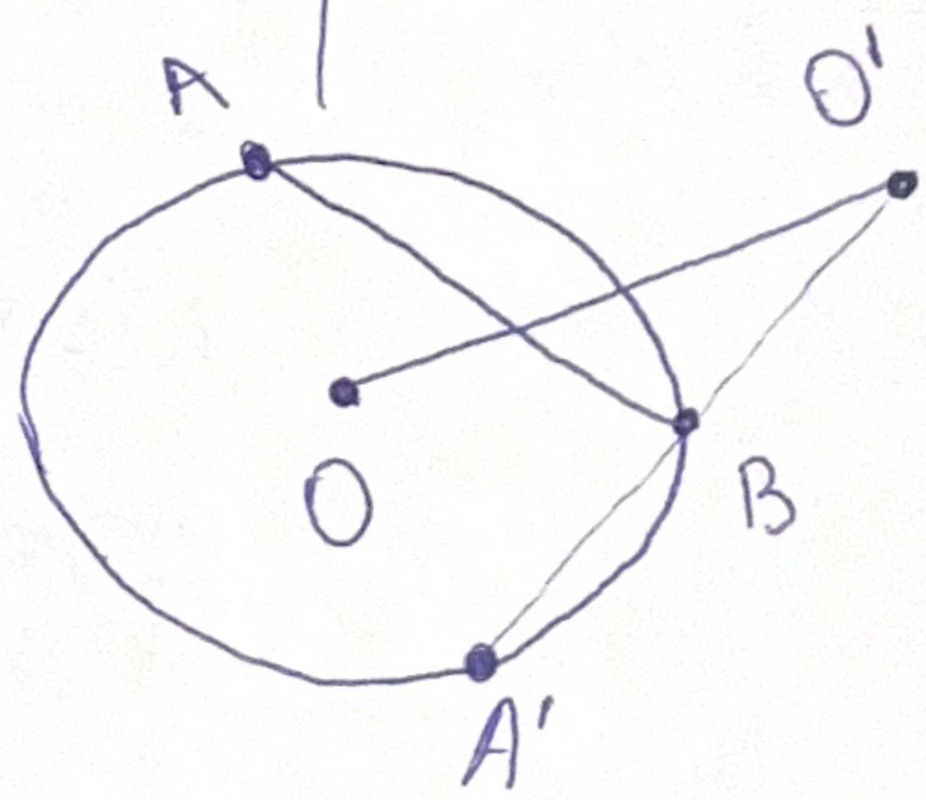


$\cdot\, O'$



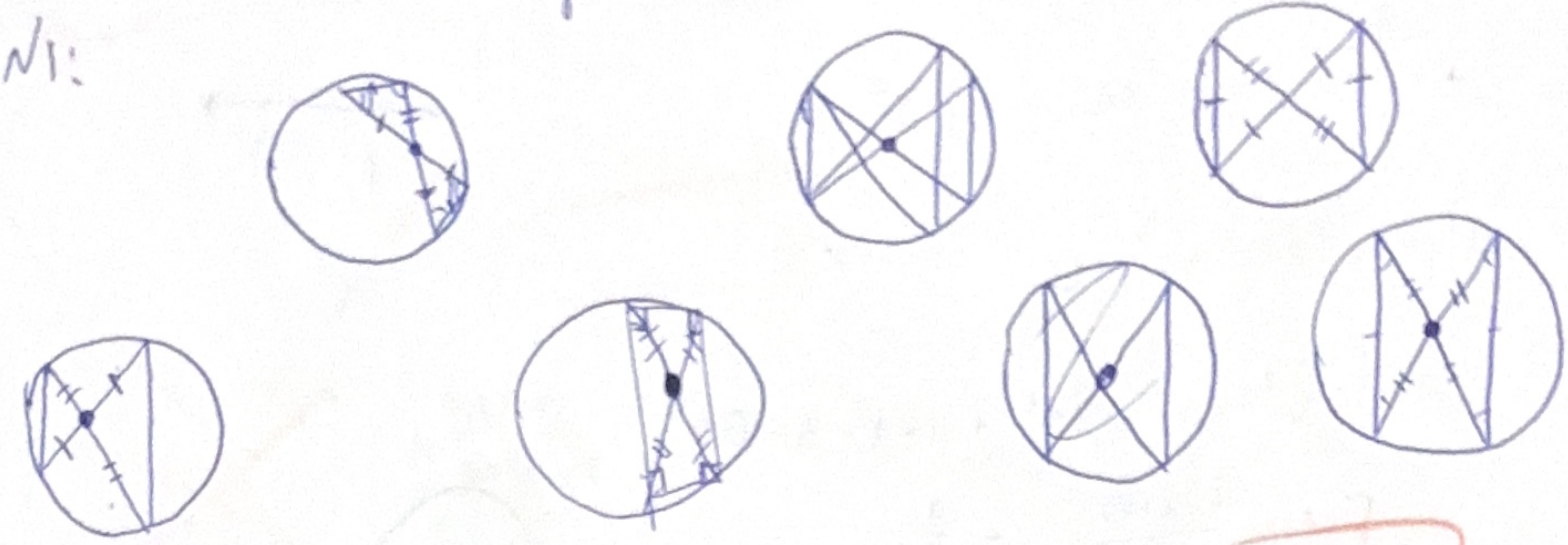






Черновик

№1:



№2.

$1000 \cdot 1000 = 1000000$

$1001 \cdot 1001 = 1001000 + 1001 = 1002001$

$\begin{array}{r} 35 \\ \times\ 35 \\ \hline 175 \\ 105 \\ \hline 1225 \end{array}$

$\overline{abcd} = (1000a + 100b + 10c + d)^2 = (1000a + 100b + 10c + d) \times$

$\times (1000a + 100b + 10c + d) = \cancel{1000000a}\ 1000000a^2 + 100000ab$

$3500 \cdot 3500 = 12250000$

$1\frac{1}{4}$ м/с   160с

9

$10000 \cdot 10000 = 100000000$

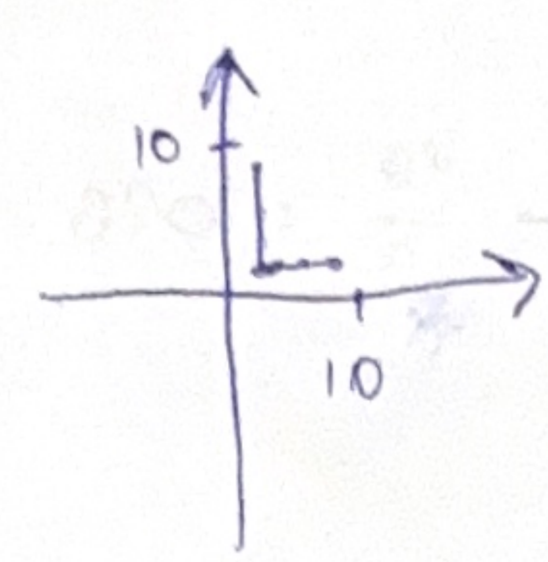
$50 : \frac{5}{4} = 40c$

$30 : \frac{5}{4} = 24c$

1,9 ; 9,1   1,1

$120 : \frac{5}{4} = 96c$

№3.



$\begin{array}{r} 81 \\ \times\ 81 \\ \hline 81 \\ 648 \\ \hline 6561 \end{array}$

$A(a_1; b_1)$; $B(a_2; b_2)$; $C(a_1; b_2)$

$\frac{9}{11}^{(3} \vee \frac{2}{3}^{(11}$

a_1 – 9в.

b_2 – 9в.

81

$9^4 = 81 \cdot 81$

$30 : \frac{5}{3} = \frac{90}{5}$

$\frac{5}{3}$ м/с

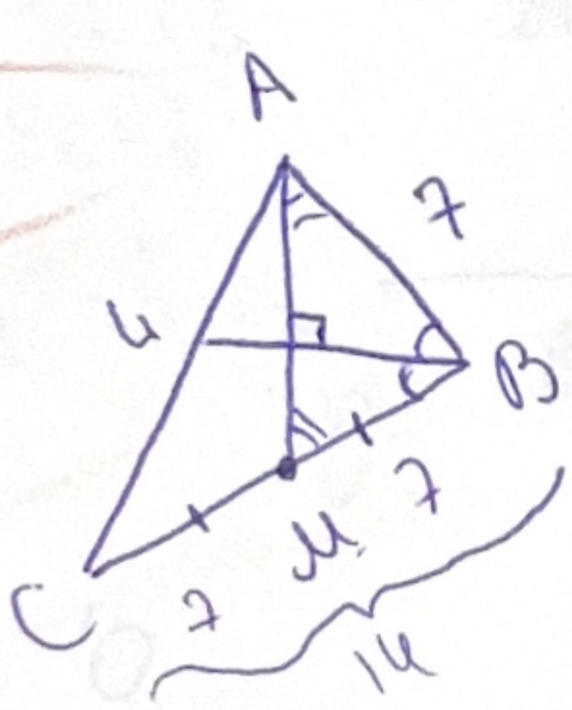
$\frac{120 \cdot 3}{5} = 72c$

18с

$120 : \frac{5}{3}$

№4

1 м/с



30с

$\cancel{14} < AC < 21$

30с проходит

$\leq 1\frac{2}{3}$ м/с

№5.

50м – $\cancel{200}$ $\cancel{160}$

50м – 30с

3м 3л

10+50 +50

$\begin{array}{r} 200 \\ 110 \end{array}$

$\frac{210}{160}$

72+48 = 120с

$1\frac{5}{16}$

$1\frac{9}{11}$

~~800 – 30с~~

200м. – 160с

210м. – 260с

$\begin{cases} 1 \leq x \leq 1\frac{2}{3} \\ 1\frac{5}{16} \leq x \leq 1\frac{9}{11} \end{cases}$ $1 \leq x \leq 1\frac{1}{4}$