0 177151 430007

17-71-51-43
(129.6)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 3

Место проведения Усть-Лабинск
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Мезенцевой Веры Карповны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Выход в туалет 13:12 – 13:15

Дата
«29» марта 2026 года

Подпись участника

17-71-51-43
(129.6)

чистовик 1.

№1.

апелляция!
90 (Девяносто)

$\sqrt{3(1-ctg^2x)} = 2\sqrt{2}\cos x$

ОДЗ:
$\sin x \neq 0$
$1-ctg^2x \geq 0$
$2\sqrt{2}\cos x \geq 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \cos x \geq 0$

Возведем обе части в квадрат

$3(1-ctg^2x) = 8\cos^2 x$

Так как ctg^2x равен $\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}$, ~~тогда~~ тогда:

$3\left(1-\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\right) = 8\cos^2 x$

Так как $\sin x \neq 0$, то можно умножить на $\sin^2 x$ ~~$\sin^2 x$~~

$3(\sin^2 x - \cos^2 x) = 8\cos^2 x \cdot \sin^2 x$

Пусть $t = \cos^2 x$, тогда $\sin^2 x = 1-t$

$3-6t = 8t - 8t^2$

$8t^2 - 14t + 3 = 0$

$D = 196 - 4\cdot 8 \cdot 3 = 100$

$t_{1,2} = \frac{14 \pm 10}{16}$

$t_1 = \frac{3}{2}$, $t_2 = \frac{1}{4}$

Значение $t = \frac{3}{2}$ невозможно, так как $\cos^2 x \leq 1$.

Значит $\cos^2 x = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos x = \pm\frac{1}{2}$. С учётом ОДЗ $\cos x = \frac{1}{2}$.

Следовательно, $x = 2\pi n \pm \frac{\pi}{3}; n \in Z$.

Проверка:

$\sin^2 x = \frac{3}{4}$

$ctg^2 x = \frac{1}{3}$

$\sqrt{3\left(1-\frac{1}{3}\right)} = \sqrt{2}$

$\sqrt{2} = \sqrt{2}$ – равенство выполняется

Ответ: $x = 2\pi n \pm \frac{\pi}{3}; n \in Z$

чистовик 2

№3.

Множество F состоит из точек (x, y, z), где $x, y, z \in \{-5, -4, \ldots, 4, 5\}$. Каждая координата может принимать 11 различных значений. То есть всего в множестве F содержится $11^3 = 1331$.

~~A, B, C~~ Пусть A, B, C - вершины прямоуг. треугольника с прямым углом при вершине B. По условию катеты AB и BC параллельны координатным осям. Т.к. $AB \perp BC$, то они обязаны быть параллельны двум различным осям.

Посчитаем кол-во способов построить такой треугольник. Выберем вершину прямого угла B. Ей может быть любая точка множества F. Кол-во способов выбрать B равно 1331.

Выберем пару координатных осей, которым будут параллельны катеты. Из трех осей нужно выбрать две. Кол-во способов $= C_3^2 = 3$.

Выберем вершину A на первой выбранной оси, проходящей через точку B. Точка A отличается от B ровно одной координатой. Эта координата может принимать любое из 11-ти значений, кроме того, которое уже занято точкой B. Кол-во способов выбрать $A = 10$.

Выберем вершину C на второй выбранной оси, проходящей через точку B. Аналогично, точка C может принимать столько же значений, сколько точка $A = 10$.

Поскольку выбор каждого элемента независим, перемножим полученные количества:

$$1331 \cdot 3 \cdot 10 \cdot 10 = 1331 \cdot 300 = 399300$$

Ответ: 399300

17-71-51-43
(129.6)

№2. чистовик 3

Обозначим сумму цифр числа A как $S(A)$. Тогда число $A = 9 \cdot S(A) \cdot k$, ~~если~~ где k натуральное по усл.

~~Тогда $A \vdots 9$, а~~ Тогда A делится на 9, значит и $S(A)$ делится на 9 (по признаку делимости на 9). Но A делится на $9 \cdot S(A)$, значит делится на 81.

Рассмотрим трехзначные числа кратные ~~8~~ 9:
$162: S(A)=9$, $243: S(A)=9$, $324: S(A)=9$, $405: S(A)=9$, $486: S(A)=18$, $567: S(A)=18$, $648: S(A)=18$, $729: S(A)=18$, $810: S(A)=9$, $891: S(A)=18$, $972: S(A)=18$.

Тогда числа 567, 729, 891 не подходит (они не делится на 18). Все остальные числа нам подойдут, т.к. они кратны 81 и все, у которых $S(A)=18$, кратны двум.

Тогда сумма второго, шестого и последнего равна 1863.

Ответ: 1863

№4.

Видим, что в точках 0 и 1 все три функции пересекаются в точках с координатой $y=0$. Если бы они не пересекались внутри полосы, то мы бы получили 4 области. Поймем, что происходит, когда пересекаются 2 графика — область, которая была между ними, закрывается, и начинается новая, все они поменялись местами. Т.е. каждое пересечение двух графиков + 1 область. Что происходит, когда пересекаются все три графика нам не сильно интересно - докажем, что такой ситуации не может быть.

Подсчитаем сколько раз графики пересекаются. Разберем общий случай:

листовки 4

$\sin(2n+1)\pi x = \sin(2k+1)\pi x$

$(2n+1)\pi x + 2\pi z = (2k+1)\pi x$ или $(2n+1)\pi x = \pi + 2\pi z - (2k+1)\pi x$

(z - целое)

$x = \frac{z}{k-n}$ или $x = \frac{2z+1}{k+n}$

Тогда для пары 11,15 это числа ~~$0, \frac{1}{26}, \frac{3}{26}, \frac{5}{26}$~~,

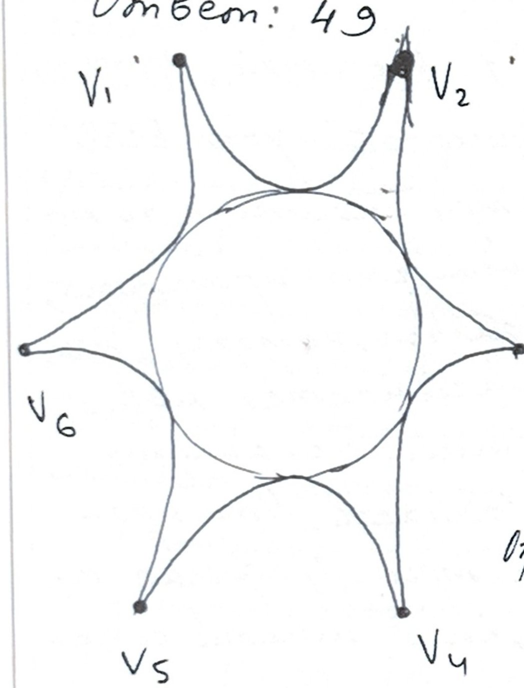
$0, \frac{1}{26}, \frac{3}{26}, \frac{5}{26}, \ldots, \frac{25}{26}, 1$ - 13 внутренних пересечений

Для пары 11,17 это числа $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$, а также $\frac{1}{28}$, $\frac{3}{28}, \frac{5}{28}, \ldots, \frac{27}{28}$ - 16 внутренних пересечений.

Для пары 15,17 это числа $0, \frac{1}{32}, \frac{3}{32}, \frac{5}{32}, \ldots, \frac{31}{32}, 1$ - 16 внутренних пересечений.

Заметим, что для разных пар никакие точки пересечений, кроме 0 и 1, не совпадают, а значит три графика не пересекаются в одной точке. Тогда всего областей ~~4 + 16 и 16 13~~ $4+16+16+13 = 49$.

Ответ: 49



№5.

Решение:

Пусть A - вершина верхней параболы. Пусть $A(0;0)$. Пусть вершины шестиугольника, соответствующие этой параболе, - точки V_1, V_2 [illegible]

Отрезок $V_1V_2 = 1$ по условию.

Введем ПСК с центром в т. A и O_y соответствующей оси симметрии рассматриваемой параболы. $\Rightarrow$ V_1 и V_2 симметричны относительно O_y, т.к

17-71-51-43
(129.6)

$V_1V_2 = 1$ и $V_1V_2 \perp O_y \Rightarrow V_1\left(-\frac{1}{2}, \frac{c}{4}\right) V_2\left(\frac{1}{2}, \frac{c}{4}\right)$. Пусть α - касательная к параболе в точке $V_2 \Rightarrow$ $\Rightarrow \alpha$ имеет уравнение: $y = Cx - \frac{c}{4}$ (так как производная в точке касания равна углу коэффициента касательной) $\Rightarrow \alpha \cap O_y = (\cdot) O$ $\left(0, -\frac{c}{4}\right)$

листов всего 5

Аналогично касательная в точке V_1 имеет уравнение $y = -Cx - \frac{c}{4}$ и пересекает O_y ~~в т. (0)~~ в $(\cdot) O$. $tg\angle V_1V_2O = tg\angle V_2V_1O = C$. Т.к. $\frac{V_1V_2}{2} = \frac{1}{2}$, а $XO = \frac{2C}{4} = \frac{C}{2}$, где $(\cdot) X = O_y \cap V_1V_2$. $\angle V_1V_2O = \angle V_2V_1O = \text{arctg}\, C$.

Аналогичные рассуждения можно провести со всеми остальными параболами $\Rightarrow$ ~~V_1, V_2, V_3~~ $V_1V_2V_3V_4V_5V_6$ - правильный шестиугольник. (т.к. все стороны равны единице по условию и все углы равны $2 \cdot \text{arctg} C$. В силу симметрии все касательные будут пересекаться в $(\cdot) O \Rightarrow O(\cdot)$ - центр шестиугольника, а также центр вписанной в изначальный шестиугольник ~~окр~~ окружности, так как расстояние от нее до всех точек касания окружности с параболами $= \frac{c}{4} \Rightarrow tg\angle V_1V_2O = C$, но $\angle V_1V_2O = \frac{1}{2}\angle V_1V_2V_3 = 60° \Rightarrow C = \sqrt{3} \Rightarrow$ Радиус окр-ти $= \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{4}$

№ 8.

$8x^2 \log_a x - \log_x a - 2x \geq 0$

ОДЗ: $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$, $x \neq 1$

Заметим, что $\log_x a = \frac{1}{\log_a x}$

Введем замену: $U = \log_a x$. Тогда $U \neq 0$ и нерав-во перепишется так:

$8x^2U - \frac{1}{U} - 2x \geq 0$

$\frac{8x^2U^2 - 2xU - 1}{U} \geq 0$

Пусть $t = 2xU$. Так как $x > 0$, то знак t совпадает со знаком U -> нерав-во равносильно.

чистовик 6

$$\frac{(2t+1)(t-1)}{t} \geq 0$$

Методом интервалов получаем:

$t \in [-\frac{1}{2}, 0) \cup [1, +\infty)$

$2x \cdot \log_a x \in [-\frac{1}{2}; 0) \cup [1; +\infty)$

$\frac{2x \cdot \ln x}{\ln a} \in [-\frac{1}{2}; 0) \cup [1; +\infty)$

$\frac{x \ln x}{\ln a} \in [-\frac{1}{4}; 0) \cup [\frac{1}{2}; +\infty)$

Разберем 2 случая:

① ~~1 сл~~: $a > 1$, тогда $\ln a > 0$. Тогда на отрезке ~~от нуля~~ $x \in (0; 1)$ функция $y = \frac{x \ln x}{\ln a}$ принимает отрицательные значения, причем ф-я непрерывна и в концах $= 0$. Тогда очевидно, что y лежит в $[-\frac{1}{4}; 0)$ при таких значениях x:

— либо интервалы бесконечных точек (когда любое значение ф-ии на отрезке хоть бы $-\frac{1}{4}$).

- либо 2 полуинтервала, когда на каком-то отрезке внутри $(0; 1)$ надо значение меньше $-\frac{1}{4}$.

и то, что дает противоречие в нашей задаче.

~~2 сл.~~ $0 < a < 1$, тогда на полуинтервале $x \in (1; +\infty)$

② ф-я $y = \frac{x \ln x}{\ln a}$ отрицательна и убывает неограниченно, тогда ее значения в $[-\frac{1}{4}; 0)$ будут достигаться при значениях x, которые дают полный интервал $(1; c]$.

Значит на отрезке (0;1) значения положительное и должно быть решение - точка - значит касание с $y = \frac{1}{2}$. ~~Производная~~

чистовик
7

$y^x (x \ln x)' = \ln x + 1$.

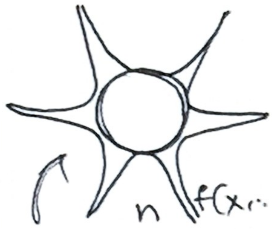
Тогда минимум будет при $x = \frac{1}{e}$ и значения будет $\frac{-1}{e}$.

$A = e^{-\frac{2}{e}}$

Ответ: $A = e^{-\frac{2}{e}}$

черновик 1.

$3(1-ctg^2 x)$



$0 \le x \le 1; \; -1 \le y \le 1$

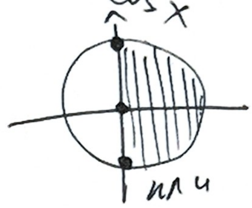
ОГР:

$2\sqrt{2}\cos x \geq 0$

$\cos x \geq 0$

$n \quad f(x_1 \ldots x_i) \stackrel{+}{=} 6x^2 + c$; где $c \in Z$

$f(x_1 \ldots x_i)$



или

$\sin x \neq 0$

$\cos x \geq 0$

$\sqrt{3(1-ctg^2 x)} = 2\sqrt{2}\cos x$

$3(\sin^2 x + \cos^2 x - ctg^2 x) = 2\sqrt{2}\cos x$

$\sqrt{3(\sin^2 x + (\cos x - ctg x)(\cos x + ctg x))} = 2\sqrt{2}\cos x$

$k \in \{11; 15; 17\}$ $11^2 = 121$ 18

$11^3 = 1331$

2 например: $(-5; 2)$

$1331 \cdot 300$

$\times 1331$
300
399300

45 (*целочисл. не уд. усл. задач.) 2

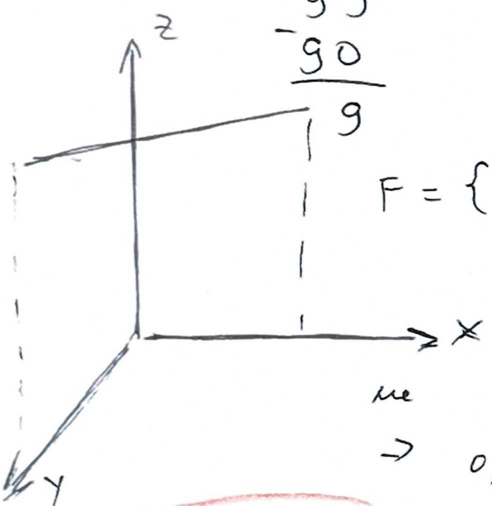
$-639 \,|\, 18$
$54 \quad 35,5$
99
-90
9

$\times 18$
3
54

$(0; 0)$ $(3; 0)$

$(6; 9)$

№3
399300



$8x^2 \log_a x -$

$\log_a x - \log_x a - 2x$

$F = \{т.\}$

координата целочисленного не превосходит 5 по модулю →
→ $\underbrace{0, 1, 2, 3, 4, 5}$

числа, не превосходящие 5 по модулю + отрицательные их варианты (т.к на числовой оси расстояния до нуля одинаковое) $\{-5, \ldots, 5\}$

Повысить оценку на 5 баллов
(старая оценка – 85 баллов,
новая оценка – 90 баллов)

Председателю апелляционной комиссии олимпиады школьников "Ломоносов" Ректору МГУ имени М.В. Ломоносова академику В.А. Садовничему от участника заключительного этапа по профилю "Математика"

Мезенцевой Веры
Карповны.

апелляция.

Прошу пересмотреть мой индивидуальный предварительный результат заключительного этапа, а именно 85 баллов, поскольку считаю, что:

В задании №8 в своем решении я верно делаю замену переменных и прихожу к неравенству с одной переменной. Далее я использую метод интервалов и прихожу к тому, что новая переменная лежит в какой-то области. Далее я верно переписываю неравенство и прихожу к исходным переменным. Далее я, как и в решении, рассматриваю области, учитывая ОДЗ и получаю, что только одна из областей нам подходит. В ней я, через условие про то, что часть решений – точка, прихожу к тому, что "a" определяется однозначно и нахожу его через производную. Получаю верный ответ. Прошу пересмотреть моё решение и выставить полный балл.

В задании №1 я, определив область допустимых значений возвожу обе части уравнения в квадрат и пользуюсь тождеством ~~ctg~~ $ctg^2x = \frac{\cos^2x}{\sin^2x}$. Затем произвожу замену $t=\cos^2x$

из двух решений уравнения в соответствии с ОДЗ нам подходит лишь одно, поэтому произвожу обратную замену и получаю верное значение. После этого произвожу проверку подтверждающую верность моего решения. Ответ и решение совпадают с официальным.

В задаче №2 я обозначаю сумму цифр A через S(A). Затем получаю знание о кратности суммы цифр 9-ти через кратность A 9-ти. После этого рассматриваю возможные значения принимаемые A, после чего из них выбираю подходящие на основании делимости A на 9. После чего нахожу искомую сумму подходящих значений. Ответ и решение совпадают с официальными.

В задаче №3 рассматриваю кол-во значений, которые может принимать каждая координата и считаю сумму кол-ва этих значений. Далее делаю вывод о том, что поскольку катеты параллельны координатным осям, то так как сами катеты между собой перпендикулярны, следовательно, они параллельны двум различным осям. Далее считаю кол-во способов построить такой треугольник, после чего выбираю кол-во способов выбрать пару координатных осей, которым будут параллельны катеты. После этого, проанализировав другую вершину, считаю кол-во способов её выбрать. Аналогично считаю количество способов выбрать третью вершину. Далее, поскольку выбор каждой из перечисленных вершин независим, перемножаю полученные количества и получаю ответ. Ответ и решение совпадают с официальными.

В задаче №5 ввожу точки (обозначения) и прямоугольную систему координат с центром в точке, соответствующей симметрии рассматриваемой параболы. Далее, найдя координаты точек нахожу уравнения касательных ко всем рассматриваемым параболам и делаю вывод о том, что точки на ветвях парабол формируют правильный шестиугольник. Далее в силу симметрии нахожу точку пересечения всех касательных, т.е. центр шестиугольника, т.е. центр вписанной в изначальный шестиугольник окружности и подтверждаю это одинаковым расстоянием от нее до всех точек касания окружности с параболами.

Найди через тангенс значение неизвестного коэффициента "c" из уравнений касательных вычисляю радиус окружности и получаю ответ. Ответ и решение совпадают с официальными.

Подтверждаю, что я ознакомлена с Положением об апелляциях на результаты олимпиады школьников "Ломоносов" и осознаю, что мой индивидуальный предварительный результат может быть изменён, в том числе в сторону уменьшения количества баллов.

Дата: 22.04.26.

(подпись)