0 161454 300006

16-14-54-30
(129.10)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 3

Место проведения Краснодар
город

ДЕШИФР

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников "Ломоносов"
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Миронова Артёма Валерьевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«29» марта 2026 года

Подпись участника

Задача 1 $\sqrt{3\cdot(1-ctg^2x)} = 2\sqrt{2}\cdot\cos x$

чистовик

Возведем в квадрат:

$3\cdot(1-ctg^2x) = 8\cdot\cos^2 x$

$ctg^2x = \dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x}$:

$3\cdot\left(1-\dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\right) = 8\cos^2 x \;\Big|\cdot\sin^2 x$

$3\cdot(\sin^2 x - \cos^2 x) = 8\cdot\sin^2 x\cdot\cos^2 x$

Пусть $\cos^2 x = t$, $\sin^2 x = 1-t$

$3\cdot((1-t)-t) = 8(1-t)\cdot t$

$3\cdot(1-t\cdot 2) = 8\cdot t - 8t^2$

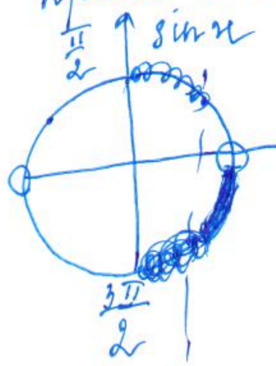
$8t^2 - 14t + 3 = 0.$

$D = 14^2 - 4\cdot 3\cdot 8 = 196 - 96 = 100 \Rightarrow$

ОДЗ:

$\begin{cases} \cos x \geq 0. \\ \sin x \neq 0 \\ 1-ctg^2x \geq 0 \end{cases}$ $ctg\, x \in [-1;1]$

Кроме того,



$x \in \left[\frac{\pi}{4}+2\pi k; \frac{\pi}{2}+2\pi k\right] \cup$
$\cup \left[\frac{3\pi}{2}+2\pi k; \frac{7\pi}{4}+2\pi k\right]$, $k \in \mathbb{Z}$

$t_{1,2} = \dfrac{14\pm 10}{2\cdot 8}$.

$t_1 = \dfrac{24}{16} = \dfrac{3}{2} > 1$

$\Rightarrow \cos^2 x = \dfrac{3}{2}$

$x \in \varnothing$.

$t_2 = \dfrac{1}{4} \Rightarrow$

$\cos^2 x = \dfrac{1}{4}$,

$\begin{cases} \cos x = \pm\frac{1}{2}. \\ \cos x \geq 0 \text{ (ОДЗ)} \end{cases} \Rightarrow$

$\cos x = \dfrac{1}{2}$.

$x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$

Ответ: $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$

чистовик

Задача 2] N - трёхзначное число,
S - сумма его цифр =>
по условию:
$\frac{N}{S} = 9 \cdot k$, k - натуральное число =>

$N = 9 \cdot k \cdot S$. Значит, $N \vdots 9$, но число
и сумма его цифр дают одинаковые остат.
при делении на 9 => $N \vdots 9 \Leftrightarrow S \vdots 9$

Т.к. N - трёхзначное число, то $1 \leq S \leq 27$ =>
$S \in \{9, 18, 27\}$.

1) $S = 9$: $N = 9 \cdot k \cdot 9 = 81 \cdot k$ =>
Все 3-значн. числа $\vdots 81$:
162, 243, 324, 405, 486, 567, 648, 729,
810, 891, 972. Из них: сумма цифр 9:
$\{162, 243, 324, 405, 810\}$.

2) $S = 18$: $N = 9k \cdot 18 = 162 \cdot k$.
Все 3-е числа, $\vdots 162$: 162, 324, 486, 648, 810,
972. Из них: сумма цифр 18: $\{486, 648, 972\}$

3) $S = 27$: $N = 27 \cdot 9 \cdot k = 243 \cdot k$.
3-е, кратные 243: 243, 486, 729, 972.
Ни одно из них не имеет сумму 27 (цифр)

Ответ:
$A \in \{162, \underset{2\text{-й}}{\underline{243}}, 324, 405, 486, \underset{6\text{-й}}{\underline{648}}, 810, \underset{\text{посл.}}{\underline{972}}\}$.

$243 + 648 + 972 = \underline{1863}$.

16-14-54-30 (129,10)

Задача 3 | чистовик

Множество F состоит из точек с целыми координатами, удовлетвор. $|x|, |y|, |z| \le 5$

Всего таких точек: $11^3 = 1331$.

Прямоуг. Δ с катетами, паралл. осям координат, имеет прямой угол в вершине, из которой выходят 2 катета, каждый параллелен своей оси.
Для фиксированной вершины: $P = (x_0; y_0; z_0)$.
Кол-во способов выбрать точку Q: на оси Ox (отличную от P) $= 10$, на оси Oy: также 10.
Для пары осей (Ox, Oy) получаем: $1331 \cdot 10 \cdot 10 =$
$= 133100$ (треугольников)
Аналогично для пар $(x; z)$ и $(y; z)$. Получаем: всего треугольников: $3 \cdot 133100 = 399300$.

Ответ: 399300.

Задача 5 | $y = Cx^2$.

Пусть O - центр симметрии, A, B - две соседние вершины.
Из 6-ур. симм. вершины лежат в вершинах прав. 6-угольника.
Тогда расст. между соседними вершинами $= 1$. Для правильного 6-угольника, $OA = OB = AB = 1$.

Значит: $\frac{A\cdot\sqrt{3}}{2}$ $\sqrt{4}$ $\Rightarrow$ | чистовик |

$A\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$ Для $B\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$

Для $O:(0;0)$.

Рассмотрим дугу между A и B.

По симметрии: Ox - прямая - ее ось, поэтому уравнение этой параболы:

$b+a\cdot y^2=x$ В точке A угол шестиуг $=0$, значит, касательная к дуге в A совпадает с лучом A.

Аналогично в точке B кас. совпадает с OB.

у прямой OA: угловой коэф $= k_{OA}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow$

$k_{OA}=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Для параболы $x=ay^2+b$: $(2ay\cdot\frac{dy}{dx}=1$

$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2ay}$. В точке A, где $y=\frac{1}{2}$, dx вертик A: $.y=\frac{1}{a}\Rightarrow$

$\frac{1}{a}=\frac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow \underline{a=\sqrt{3}}$ Подставим

координаты (.) A: $\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}\cdot 1}{4}+b$

$b=\frac{\sqrt{3}}{4}$

получаем $x=\sqrt{3}\cdot y^2+\frac{\sqrt{3}}{4}$

$OB=\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Ось симметрии окружности:

ось симметрии совпад. с

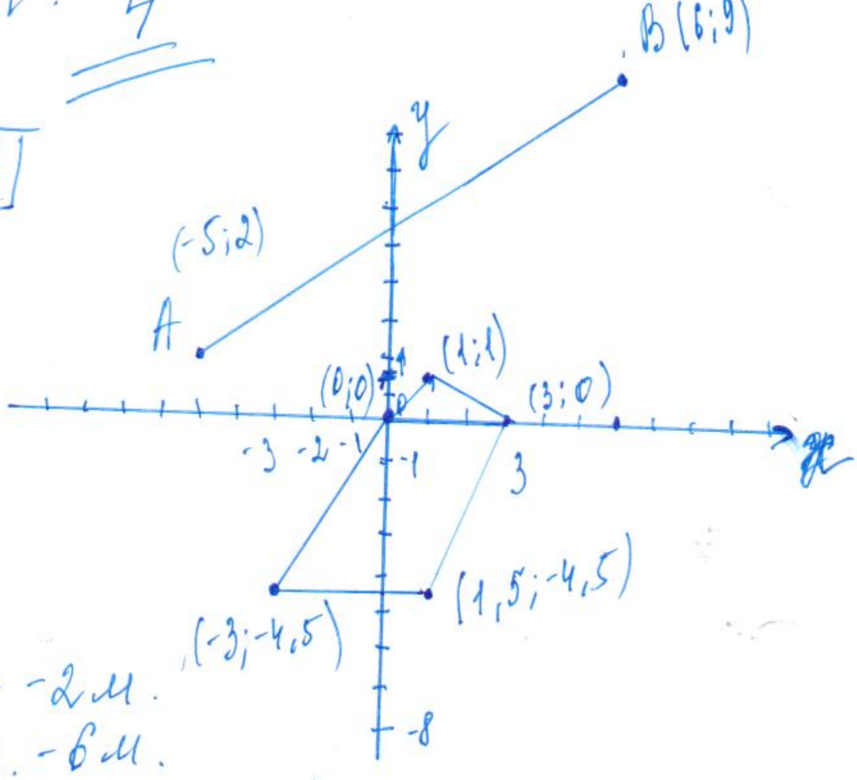
16-14-54-30 (129.10)

центром окружности, касается каждой дуги ее вершине => искомый радиус:

$r = OB = \frac{\sqrt{3}}{4}$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{4}$

Задача №6



Высота забора - 2 м.
Высота свет. - 6 м.

=> коэф. подобия: $k = \frac{1}{3}$.

Из точки A получаем ~~[illegible]~~ крайние точки:
(2,5; 1); (7; 1) - 2 точки.

Из точки B: (-3; -4,5); (1,5; -4,5)

Получаем пятиугольник со следующими коорд: (0;0); (3;0); (1;1) (1,5; -4,5); (-3; -4,5).

$S = \frac{3 \cdot 4,5}{2} + 1,5 \cdot 4,5 + \frac{3,5 \cdot 5,5}{2} + \frac{(1,5+5,5) \cdot 1}{2} =$
$= \frac{213}{8}$

Ответ: $\frac{213}{8}$.

чистовик

Задача 4 Обозначим $G_k: y=\sin k\pi x$

Если новый график пересекает уже нарисов. фигуру в N точках, то он разбивает на $(N-1)$ кусков, значит, число областей увелич. на $(N-1)$. Сначала G_{11} $(k\in\{11, 15, 17\})$.

Он встречает границу полосы в точках:

$x=0; 1, \frac{2\cdot m+1}{22}$, где $m\in\{0,1,..10\}$, т.е.

Всего в 13 точках. Поэтому, после 1-го графика областей: $1+(13-1)=\underline{13}$.

② Теперь G_{15}: ~~всего~~ его граничных точек: 17.

Пересечение с G_{11} найдем из:

$\sin 11\pi x=\sin 15\pi x$, отсюда $x=0, \frac{1}{2}, 1$,

или $x=\frac{2m+1}{26}$, $m\in\{0, 1, \dots 12\}$.

Всего: 15 точек Из них: $0, \frac{1}{2}, 1$ – уже граничные. Значит, новых внутр. точек – 12.

И на G_{15} всего $17+12=29$ уже отмеченных точек. Поэтому он дает: $29-1=\underline{28}$ новых областей. $13+28=41$

③ $\underline{G_{17}}$: его граничн. точек – 19.

Пересечение с G_{11}: $\sin 11\pi x=\sin 17\pi x$.

$x=0; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 1$, или $x=\frac{2m+1}{28}$, $m\in$ $\in\{0, 1, \dots 13\}$. Всего: 18 точек. Из них $0; 1$ – граничные, значит, внутр. – 16.

Пересечения с C_{15}: $\sin 15\pi x = \sin 17\pi x$,
$x = 0, 1$; или $x = \frac{2m+1}{32}$, $m \in \{0, 1, \dots 15\}$.

Снова 18 точек, из них 16 - внутр.
Эти внутр. точки между собой не совпадают, значит, на C_{17} всего $19+16+16 = 51$ отмеч точк. $51 - 1 = 50$ новых областей.

$41 + 50 = 91$ новых областей всего.

Ответ: 91.

№7 Обозначим $y - x^2 = u$
$v = y + x^2$

тогда линии сетки имеют вид:

$u = c$, $v = c$, где $c \in \{\mathbb{Z}\}$.

Значит, каждая клеточка задается двумя соседними целыми уровнями: $m \leq u \leq m+1$, $n \leq v \leq n+1$. То есть: $\begin{cases} m \leq y - x^2 \leq m+1 \\ n \leq y + x^2 \leq n+1 \end{cases}$

n и $m \in \mathbb{Z}$. Случай, когда $n = m$:
① клетка центральная, а ее вершины $y = x^2 + m$,
$y = -x^2 + m \Rightarrow$ $(0; m)$
$y = x^2 + m + 1$, $y = -x^2 + m + 1 \Rightarrow$
$(0; m+1)$
$y = x^2 + n$, $y = -x^2 + n + 1 \Rightarrow$ точки: $(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}; (n+1)\cdot\frac{1}{2})$

получившийся 4-уг. — ромб, где диагонали $d_1 = 1$, $d_2 = \sqrt{2}$, поэтому $S_0 = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

② $n - m = k \geq 1$.

получаются 2 симметр. клетки.

Правая; вершины: $A\left(\sqrt{\frac{k}{2}}; \frac{n+m}{2}\right)$; $B\left(\sqrt{\frac{k-1}{2}}; \frac{m+n+1}{2}\right)$; $C: \left(\sqrt{\frac{k}{2}}; \frac{m+n+2}{2}\right)$; $D\left(\sqrt{\frac{k+1}{2}}; \frac{m+n+1}{2}\right)$.

Тогда $AC = 1$, т.к. B и D на одной горизонтали, то $BD = \sqrt{\frac{k+1}{2}} - \sqrt{\frac{k-1}{2}}$

$BD = \sqrt{\frac{k+1}{2}} - \sqrt{\frac{k-1}{2}} \Rightarrow S_k = \frac{AC \cdot BD}{2} =$

$= \frac{\sqrt{\frac{k+1}{2}} - \sqrt{\frac{k-1}{2}}}{2}$. Оценим:

$\sqrt{\frac{k+1}{2}} - \sqrt{\frac{k-1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{k+1}{2}} + \sqrt{\frac{k-1}{2}}} \leq 1 \Rightarrow S_k \leq \frac{1}{2}$.

$S_k \leq \frac{1}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2} = S_0$.

Возьмем $m = 0$, тогда центр. клетка имеет вершины: $(0;0)$; $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{2}\right)$; $(0;1)$; $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{2}\right)$ — они лежат внутри страницы. У соотв. ромба внутри нет других проведенных линий. Соседн. 4-уг примыкают к нему только по сторонам и вершинам.

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

черновик

$y = \sin k\pi x$, $k \in \{11, 15, 17\}$. $\frac{5}{8}$

$\frac{5}{8}$. B

Oh, say, can't you see?

By the dawn's early light

L ...

regrets i've had a few but then.

A еще две задачки

My ~~loneliness~~ loneliness

Олимпиада «Ломоносов» 1 вар 15:2 = сделано. чистовик

6 задач 2 4 3

at least one task

What's the time?

$$\begin{array}{r} 1648 \\ + \; 891 \\ \hline \end{array}$$

Зачеркивание

$\frac{15}{15}$ 4,5·2 + 972 Всего

Я уже не у = 9

$$\begin{array}{r} 972 \\ \hline 1863 \end{array}$$

Ich

$Ay^2 + b$

tell me 7,5·2 = baby = 15

$$\begin{array}{r} 121 \\ \cdot \; 11 \\ \hline 121 \\ 121 \\ \hline 1331 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 121 \\ \cdot \; 11 \\ \hline 121 \\ 121 \\ \hline 1331 \end{array}$$

4,5·2·3 = = 9·2 = 27.

$$\begin{array}{r} 121 \\ 121 \\ \hline 1331. \end{array}$$

Артём

Артём

$\frac{12,5}{2}$ + 4,5·2 = = 9

$$\begin{array}{r} 121 \\ 121 \\ \hline 1331 \end{array}$$

предупредительный.

7,5. Ich war schon müde!

«Ломоносов»

черновик

товарищ, хватит жульничать!

$\sqrt{3}\cdot(1-ctg^2 x) = 2\sqrt{2}\cos x$

$\cos x$

$2\sqrt{2}\cos t \geq 0$ $t \leq 0$.

ОДЗ: $\cos x \geq 0$ $\cos x \geq 0$ $t \in \pi k$.

$\cos t \leq 0$

$3\cdot(1-ctg^2 x) = 4\cdot 2\cos x$

$(t-1)(t+1)$

$3\cdot(1-ctg^2 x) = 8\cos x$.

ОДЗ: $x > 0$, $x \neq 1$ $\cup \{1\}$

$0 \leq x \leq 1$. $0 \leq x \leq 1$ $|x| \leq 5$

ich habe alle

$x^2 \pm C$ $\pm x^2 + C$

$3 - 3ctg^2 x \geq 0$ $t - 2\pi n$

taking $3\cdot(1-ctg^2 x)$ it into account

ОДЗ: $\cos x \geq 0$ funktioniert nicht!

$\pm x^2 + C$ ОДЗ: $1 - ctg^2 x \geq 0$

$ctg^2 x \geq 0$

taking it into the consideration

$ctg^2 x - 1 \leq 0$

familiar

$(ctg x - 1)($ $1 - ctg^2 x = 2\sqrt{2}$

$(ctg x + 1)(ctg x - 1) \leq 0$

$ctg x \in [-1; 1]$.

$\frac{\cos x}{\sin x}$ cot

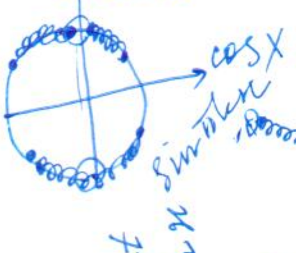
$8x^2 \cdot \log_a x - \log_x a - 2x \geq 0$

$8x^2 \cdot t - \frac{1}{t} - 2x \geq 0$

$8x^2 \cdot t - t - 2x > 0$. $\frac{t^3 \cdot 64}{9}$

$t = 2\cdot\pi$

$\frac{t-1}{t+1}$



$\sin k\pi x$

$3\cdot(1-ctg^2 x) = 8\cos x$.

funkt

$\frac{\sin t}{\sin x}$

$\frac{8-5\pi k}{2}$

$\frac{64}{9}t - \frac{t^3 \cdot 64}{9} =$ $ctg^2 x = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{\cos^2 x}{1-\cos^2 x} = -\cos^2 x$

$tg^2 x = \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$

ВД =

$2 - 2t^2 - 1$ $tg x = \pm 1$

$\frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x} - 1} = \frac{\cos^2 x}{1-\cos^2 x}$

what is happening?

$-\frac{t^3 \cdot 64}{9} + 2t^2 = \frac{64}{9}\cdot t$

$(1-t^2) - 1$

$1 - \frac{t^2}{1-t^2} = \frac{1-t^2-t^2}{1-t^2} = \frac{1-2t^2}{1-t^2} = \frac{1-2t^2+1-1}{1-t^2} =$

$\frac{64}{9}\cdot t\cdot(1-t^2) = 2\cdot(1-t^2) - 1$

$= \frac{2-2t^2}{1-t^2} = 2 - \frac{1}{1-t^2}$. $\frac{1-t^2}{2-t^2\cdot 2} =$

$\frac{64}{9}t - \frac{64}{9}t^3 = 2 - 2t^2 + 1$

$\frac{8}{3}\cdot t = 2 - \frac{1}{1-t^2}$ $\frac{64}{9}\cdot t = 2 - \frac{1}{1-t^2}$ $\cdot \frac{2 - 1}{1-t^2-t^2}$