0 086741 340001

08-67-41-34
(124.23)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 11 класс

Место проведения г. Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Ломоносов"
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Митина Сергея Сергеевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«29» марта 2026 года

Подпись участника

Митин

75 (целиком котл) ~~[illegible]~~

08-67-41-34 (124,23)

Задача 1. ~~Андреева~~

Чистовик

$\sqrt{6(1-tg^2x)} = 4\sin x$

При $\sin x \geq 0$.

$6 - 6tg^2x = \cancel{4\sin} 16\sin^2 x \quad | \cdot \cos^2 x \neq 0$.

$6(\cos^2x - \sin^2x) = (4\sin x \cos x)^2$

$6\cos 2x = (2\sin 2x)^2$

$6\cos 2x = 4\sin^2 2x \qquad 3\cos 2x = 2\sin^2 2x$

$3\cos 2x = 2 - 2\cos^2 2x$. ~~Пусть $\cos 2x = t$~~.

$2\cos^2 2x + 3\cos 2x - 2 = 0$

$\cos 2x = -2$, невозможно, $\cos 2x = \frac{1}{2}$

$2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z \qquad x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k$.

Учитывая ограничения $\sin x \geq 0, \cos x \neq 0$

$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$; $\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$; $\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z$.

Задача 2

~~Множество А состоит из чисел вида $81k, k \in N$: $81n$, где n - натуральное, то есть из арифметической прогрессии с первым членом 81 и знаменателем разностью 81. Докажем это.~~

Пусть N - наше число, $S(N)$ - сумма его цифр.

$N : S(N) = 9k$, k - натуральное.

$N = 9S(N) \cdot k$. Поэтому $N \vdots 9$ но тогда и $S(N) \vdots 9$, ~~правая часть~~ по свойству делимости на 9 правая часть делится на 81, поэтому и $N \vdots 81$.

Черновик

$6(1-tg^2x) = 16\sin^2x.$ $\sin x \geq 0.$

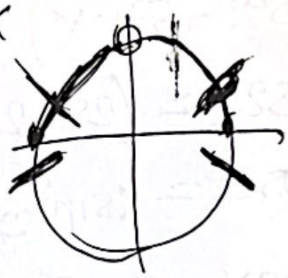
$6 - \frac{6\sin^2x}{\cos^2x} = 16\sin^2x$

$6(\cos^2x - \sin^2x) = 16\sin^2x\cos^2x$

$2t^2+3t-2=0$

-3 -4 $-\frac{4}{2}$ и $\frac{1}{2}$.

$\cos 2x = -2$; нет. $\cos 2x = \frac{1}{2}$.



2. $\overline{abc} \vdots a+b+c=9k$ $\overline{abc}=(a+b+c)9k.$

$\overline{abc} \vdots 81.$ $a+b+c \vdots 9.$ $a+b+c=9n.$

$\overline{abc}=81kn$

Если сумма $\vdots 9$. число делится на 81, сумма делится на 9.

162.

81. 162 : 2 81n.

243 81n. 324 81·5=405. 486

n=8. 648 n=7. 567 n=5 n=7. 729·512.

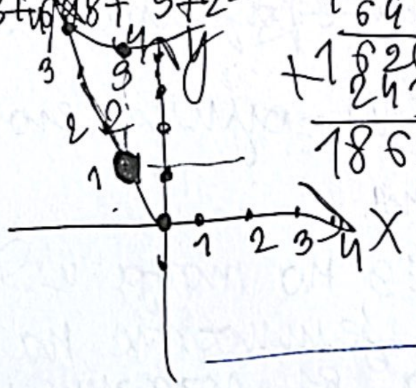
n=9. 81·9=729 n=11. 81·11=810+81=891

81·13 = 810+ 486 n=6. n=8. 648 ~~81·11=913~~ ~~729~~ 9 = 729

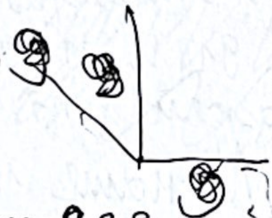
n=11. n=12. 810+162=972

243+648+972=

$$\begin{array}{r} 972 \\ +\ 648 \\ \hline 1620 \\ +\ 243 \\ \hline 1863 \end{array}$$



3. 9



729 · 8 · 8 · 8

729 · $\frac{24 \cdot 16}{2}$

08-67-41-34 (124.23)

То есть $N=81n$, n — натуральное. Чистовик

~~С другой стороны все такие числа подхо~~

То Сумма ~~цифр~~ трехзначного числа вида $81n$ равна 9 или 18 (сумма $=27$ только для 999, которое не кратно 81)

Если она равна 9, то $N:S(N)=81n:9=9n$, условие выполняется.

Если она равна 18, $N:S(N)=81n:18=9n:2$, если n четное, то все в порядке точно но если n нечетное результат может быть нецелым.

~~(если при не~~

Проверим трехзначные числа вида $81n$ при нечетном n.

243; 405 — ~~в~~подходят. 567 — не подходит

729 — не подходит 891 — не подходит

Итог, числа это

162; 243; 324; 405; 486; 648; 810; 972.

Сумма ~~это~~ $243+648+972=1863$.

Ответ: числа это 162; 243; 324; 405; 486; 648; 810; 972. Сумма $=1863$.

Задача 3.

Всего точек $9^3=729$.

Выбрать вершину ~~в~~ прямого угла можно 729 способами.

Осталось выбрать ~~в~~ еще две вершины.

Первую вершину можно выбрать 24 способами. Ведь у нас есть три ~~прямые, проходящи~~ отрезка проходящи~~е~~ через вершину прямого угла параллельно осям, на каждом по восемь целых

Чистовик

точек, отличных от вершины прямого угла.
Вторую можно выбрать 16 способами (не берем точки на отрезке, на котором лежит первая вершина)

~~Всего 729 · 24 · 16 способов.~~

~~Однако~~ Всего выбрать ~~&~~ две вершины $\frac{24 \cdot 16}{2}$ ~~*~~ 8 способов, делим на два ведь порядок выбора здесь неважен.

Всего $\frac{729 \cdot 24 \cdot 16}{2} = 139.968$ треугольников.

Ответ: ~~139, 968.~~ 139968.

Задача 8.

~~$a>0, x>0$~~

Ограничения это $x>0, x \neq 1, a>0, a \neq 1$.

Перепишем неравенство.

$$\frac{8x^2 - \log_x^2 a - 2x\log_x a}{\log_x a} \geq 0$$

$$\frac{(2x - \log_x a)(4x + \log_x a)}{\log_x a} \geq 0$$

$$\frac{(x-1)^2}{(x-1)(a-1)}\left(x^{2x} - a\right)\left(x^{4x} - \frac{1}{a}\right) \geq 0$$

$$\frac{x-1}{a-1}\left(x^{2x} - a\right)\left(x^{4x} - \frac{1}{a}\right) \geq 0$$

$$\frac{x-1}{a-1}\left(x^{2x} - a\right)\left(x^{2x} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right)\left(x^{2x} + \frac{1}{\sqrt{a}}\right) \geq 0$$

$$\frac{x-1}{a-1}\left(x^{2x} - a\right)\left(x^{2x} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right) \geq 0$$

$a > \frac{1}{\sqrt{a}}$ при $a>1$, $a < \frac{1}{\sqrt{a}}$ при $a<1$.

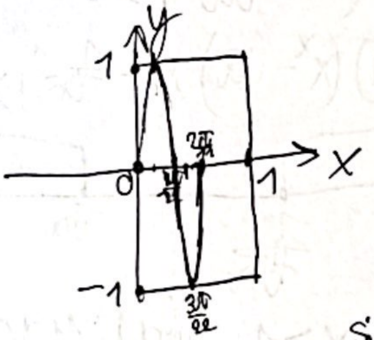
$$\frac{(x-1)}{a-1}\left(x^{x} - \sqrt{a}\right)\left(x^{x} + \sqrt{a}\right)\left(x^{x} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right)\left(x^{x} + \frac{1}{\sqrt{a}}\right) \geq 0$$

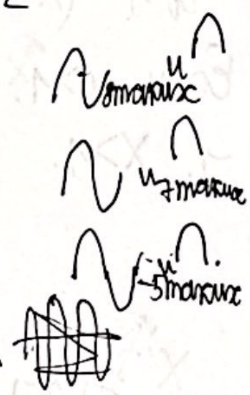
08-57-41-34 (124.23)

Черновик

$729 \cdot 64 \cdot 3 = 24 \cdot 8 = 729 \cdot 3 \cdot 64 = 729 \cdot 192$

$729 \times 192 = 1458 + 6561 + 729 = 139968$





$\sin 11\pi = 0.$

$y = \sin 11\pi x$

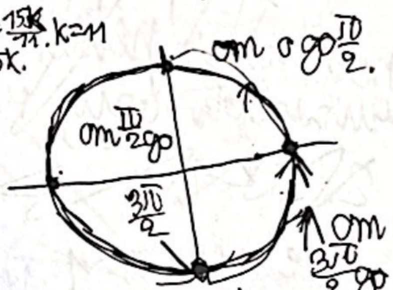
$y = \sin 15\pi x$

$y = \sin 17\pi x$

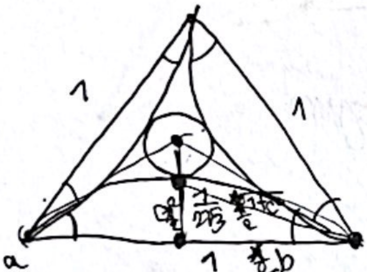
$11\pi x = 2\pi k$, $x = \frac{2}{11}k$, $11n = 15k$, $n = \frac{15k}{11}$, $k = 11$

$15\pi x = 2\pi k$, $x = \frac{2\pi}{15}n$

$\frac{3\pi}{22}$

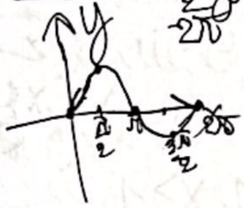


$\frac{1-c^2}{c}$



$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$

$x > 0$, $x, a > 0$, $x, a \neq 1$.



$$\frac{8x^{2} - \log_x^2 a - 2x\log_x a}{\log_x a} \geq 0.$$

$cx^2 + x$ $\quad x^2 + c^2x^4 = x^2(c^2x^2+1) = x\sqrt{c^2x^2+1} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4}c^2+1}$

$8a^2 - 2ab - b^2 = 0.$

$2b \quad -8b^2 \quad +\frac{6b}{8}$ и $\frac{2b}{8}$. $\quad a = \frac{b}{2};\ -\frac{b}{4}$ $\quad (2a+b)(4a+b) \geq 0.$

при

$$\frac{(2x - \log_x a)(4x + \log_x a)}{\log_x a} \geq 0$$

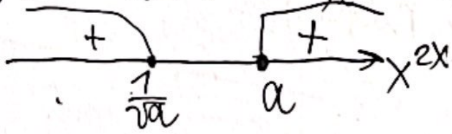
$2x$ $\log_x a > 0.$

$(2x - \log_x a)(4x + \log_x a) \geq 0$ при $a > 1$

$$\frac{(2x - \log_x a)(4x + \log_x a)}{(x-1)(a-1)} \geq 0.$$ $\quad x^{2x} \geq a$.

$$\frac{(2x - \log_x a)(4x + \log_x a)}{x-1} \geq 0$$

$\frac{(x-1)^2}{(x-1)}(x^{2x} - a)(x^{4x} - \frac{1}{a}) \geq 0$ $\quad \frac{x-1}{a-1}(x^{2x} - a)(x^{4x} - \frac{1}{a}) \geq 0$



$a > \frac{1}{\sqrt{a}}$. $\quad a^{\frac{3}{2}} > a$ при $a > 1$

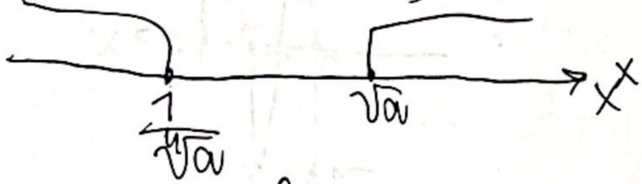
~~$(x-1)$~~ $x > 1.$

Чистовик

$$\frac{x-1}{a-1}\left(x^x-\sqrt{a}\right)\left(x^x-\frac{1}{\sqrt[4]{a}}\right)\geq 0$$

Если $a>1$. $(x-1)\left(x^x-\sqrt{a}\right)\left(x^x-\frac{1}{\sqrt[4]{a}}\right)\geq 0.$

1. $x>1$.



$x^x\geq\sqrt{a}$, при $x>1$ левая часть растет, поэтому решения это бесконечная часть числовой оси, не подходит.

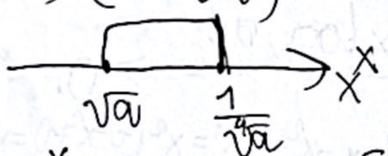
~~2) $x<1$~~

То есть $a>1$ уже не подходит.

Если $a<1$.

$(x-1)\left(x^x-\sqrt{a}\right)\left(x^x-\frac{1}{\sqrt[4]{a}}\right)\leq 0.$

1. $x>1$



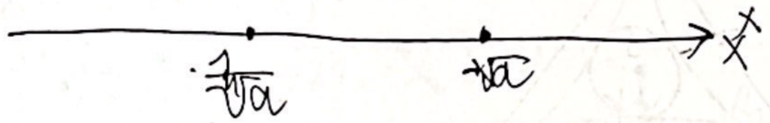
~~Так как x^x при $x<1$ убывает решения относительно x это отре~~ $x\in\left[\frac{1}{2}\log_x a; -\frac{1}{4}\log_x a\right]$

Задача 5.

Если AB — сторона треугольника, O — центр окружности, $\angle BAO=30^\circ$ в силу симметрии, касательная к $y=cx^2$ ~~у~~ образует угол 30° с осью ~~ор~~ ординат поэтому $c=\frac{1}{2}$ (или $-\frac{1}{2}$ но возьмем плюс).

Черновик

$a>1.\ \sqrt{a}>\frac{1}{\sqrt{a}}$, но



$x^x>\sqrt{a}$ при $x>1$

$x^x\in[\sqrt{a};\frac{1}{\sqrt[4]{a}}]\quad x\in[\log_x a^{\frac{1}{2}};\log_x a^{-\frac{1}{4}}]$

$x\in[\frac{1}{2}\log_x a;-\frac{1}{4}\log_x a]$

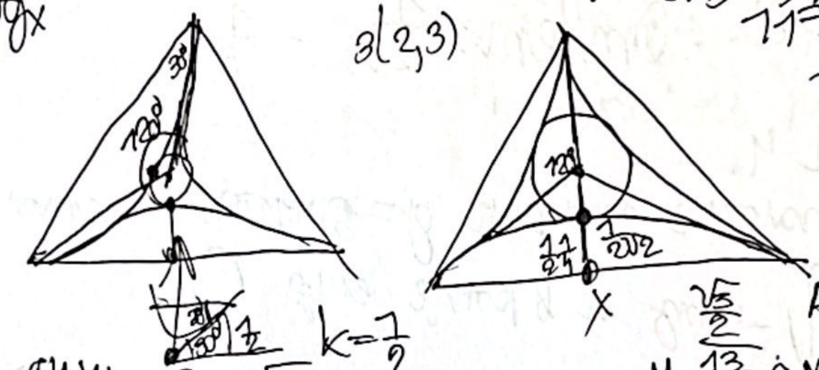
$-\frac{1}{4}\log_x$

$4+9=3\sqrt{13}=9\cdot13=90+27$

$117-16=101$

$\frac{\sqrt{101}}{2}$

3(2,3)



$A_1M=3\sqrt{13}$

$A_1C_1=\frac{2}{3}A_1M=2\sqrt{13}$,

$C_1M=\frac{1}{3}A_1M.$

$\frac{\sqrt{5}}{2}$

$k=\frac{1}{2}$

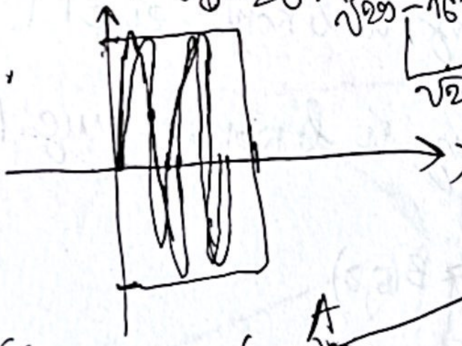
$64+4=68=2\sqrt{17}$

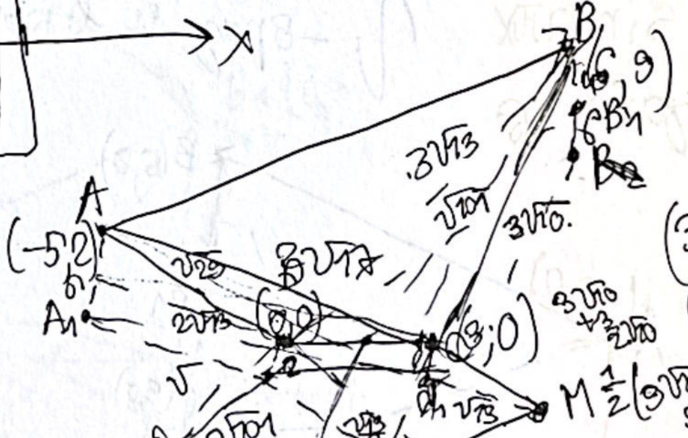
$\sqrt{29}-16=2\sqrt{13}$

$\cancel{CM=\frac{13}{3}}$

$\sqrt{68}-16=52=2\sqrt{13}$

4.





(3;9)

3(1,3)

$\frac{3\sqrt{10}+3\sqrt{10}}{2}$

$M\ \frac{1}{2}(9\sqrt{10}\cdot3\cdot2\sqrt{10}$

$90-16=84=2\sqrt{21},$

$3\sqrt{21}.$

(3,9)

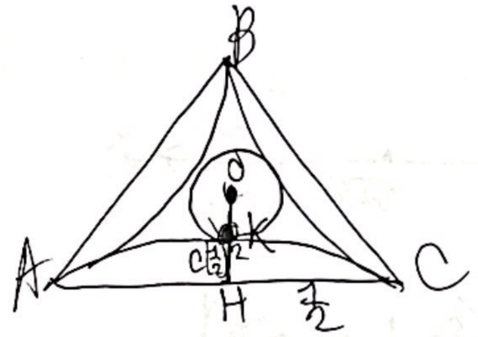
$-\frac{3}{2};-\frac{9}{2}$

$6+\frac{3}{2},\ 9+\frac{9}{2}=\frac{15}{2};\frac{27}{2}.$

$\frac{5}{2};\frac{3}{2}$

$\frac{1}{2}(8\sqrt{10})\quad\frac{90}{4}.$

Чистовик



$OH = \frac{1}{2\sqrt{3}}$ из равностороннего треугольника.

$HK = c\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}$. $OK = \frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{8}$ — искомый радиус. Ответ: $\frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{8}$.

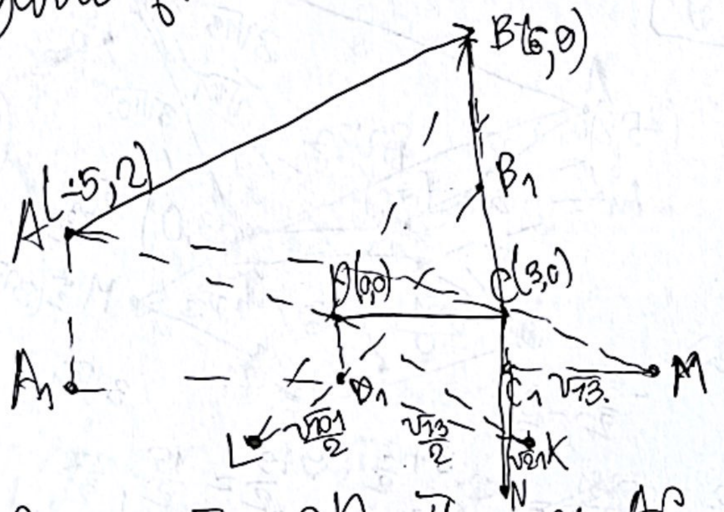
Задача 4.

На полоске график $y = \sin 11\pi x$ состоит из — 5 раз и в конце еще.

$y = \sin 15\pi x$ — 7 раз и в конце еще.

$y = \sin 17\pi x$ — 8 раз и в конце еще.

Задача 6



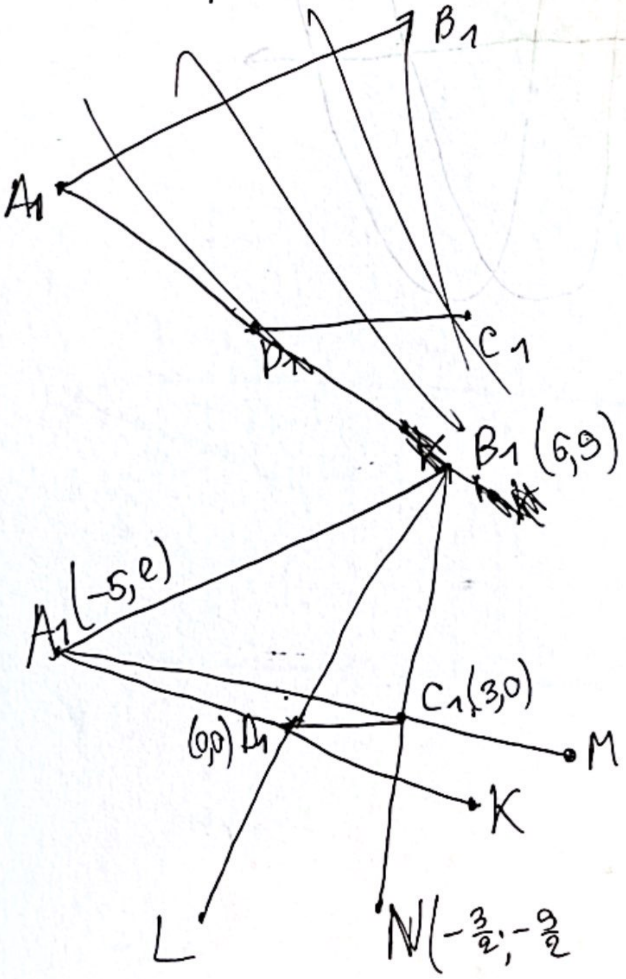
Назовем забор CD. Пусть AC пересекает пустырь в M. $C_1M = \sqrt{13}$. Пусть BD ~~пе~~ в пересекает пустырь в L. $LD_1 = \frac{\sqrt{101}}{2}$

Чистовик.

Если ~~AC~~ ~~п~~ AD ~~по~~ пересекает пустырь в K, BC в N то $C_1N=\sqrt{21}$, ~~D_1~~ $D_1K=\frac{\sqrt{13}}{2}$.

Площадь затененного пустыря равна площади D_1LNKM, ведь ~~расстояние между прямыми~~ чем больше расстояние от точки забора до светлячка, тем длинее тень, а наибольшее расстояние до точек забора достигается из одного из концов пути светлячка, A или B.

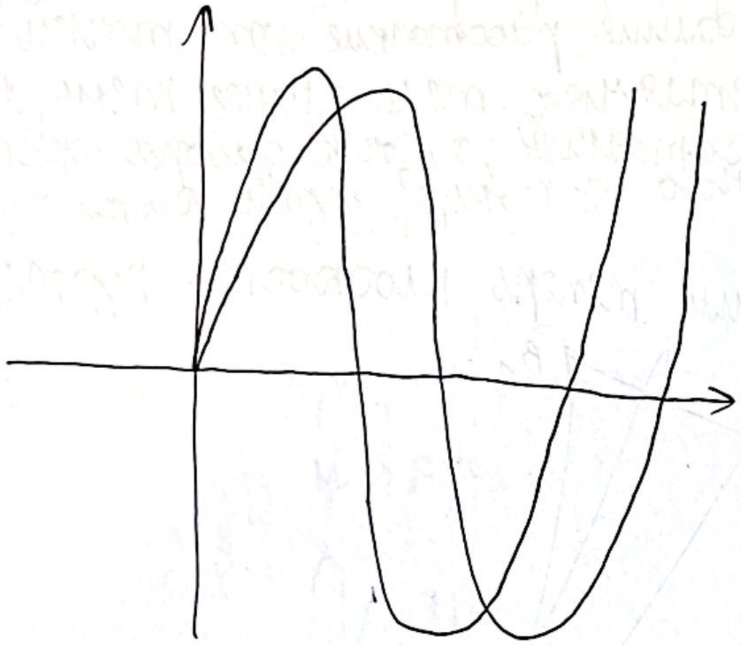
Рассмотрим теперь плоскость пустыря



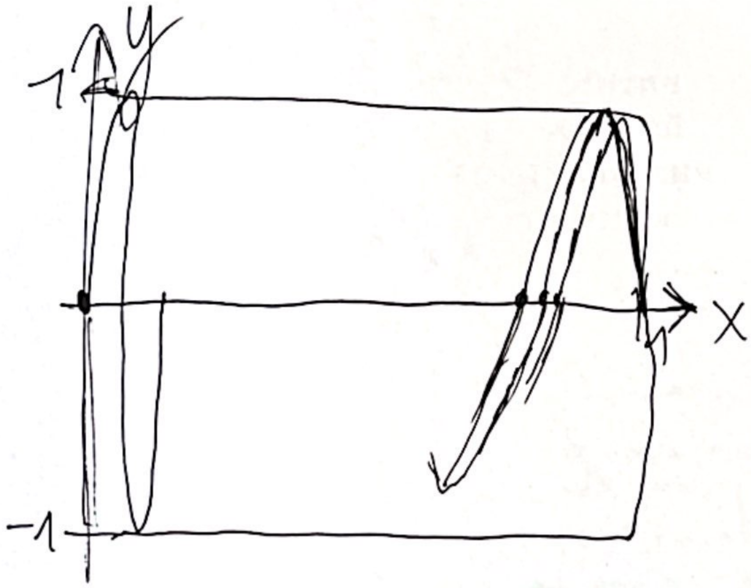
Чистовик

Задача 4.

Так функции имеют разную частоту на ~~каждом из~~ на каждом из пяти участков каждые две пересекутся два раза.



Черновик



$y = \sin 11\pi x$, $y = \sin 15\pi x$, $y = \sin 17\pi x$.