

83-57-71-53
(127.2)



Выход в Т. : 13.19
Выборы : 13.21

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 9

Место проведения Санкт-Петербург
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наименование олимпиады

по Математике
профиль олимпиады

Михайлова Сергей Станиславовича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«29» марта 2026 года

Подпись участника
[Подпись]

83-57-71-53
(127.2)

Чистовик ~~Иван~~ 16

ОДЗ:

$a \neq 0$

$$\frac{1}{a} + \frac{2x}{a^2} - \frac{3x^2}{a^3} \leq 0$$

\Leftrightarrow

$$\frac{a^2 + 2ax - 3x^2}{a^3} \leq 0$$

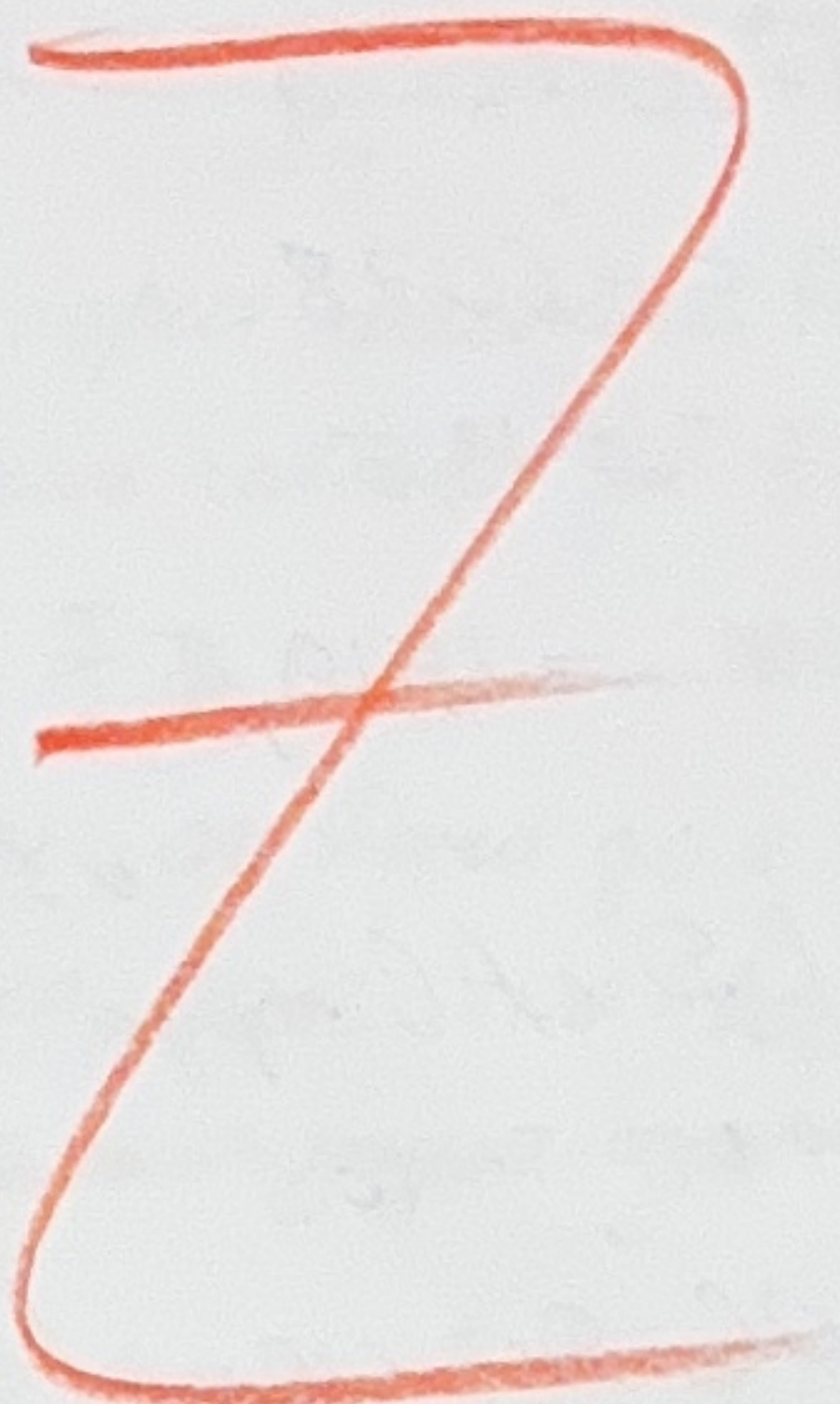
a^3

\Leftrightarrow

$$\frac{3x^2 - 2ax - a^2}{a^3} \geq 0$$

\Leftrightarrow

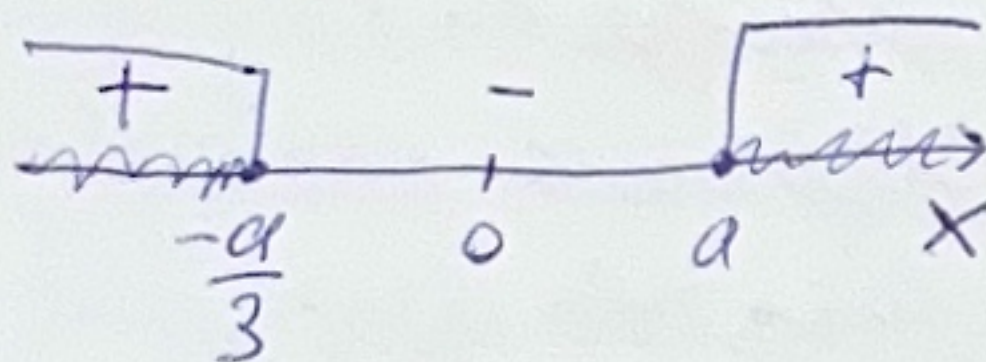
$$\frac{3(x-a)(x+\frac{a}{3})}{a^3} \geq 0$$



$a > 0$

тогда нер-во равносильно:

$$(x-a)(x+\frac{a}{3}) \geq 0$$



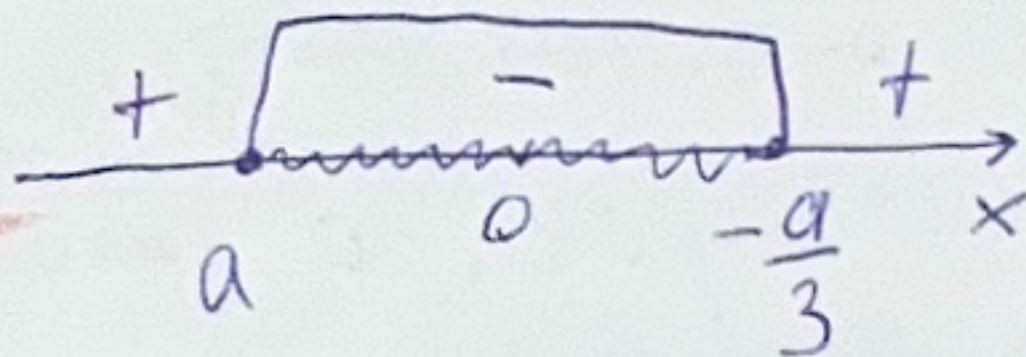
В таком случае нер-во имеет 2 бесконечных промежутка, что не удовл. условию задачи

Задачи

$a < 0$

тогда нер-во имеет вид при делении на a^3

$$(x-a)(x+\frac{a}{3}) \leq 0$$



чтобы a удовл. условию a должно быть меньше 2026 меньше чем $-\frac{a}{3}$

см. на след месте

Чистовик

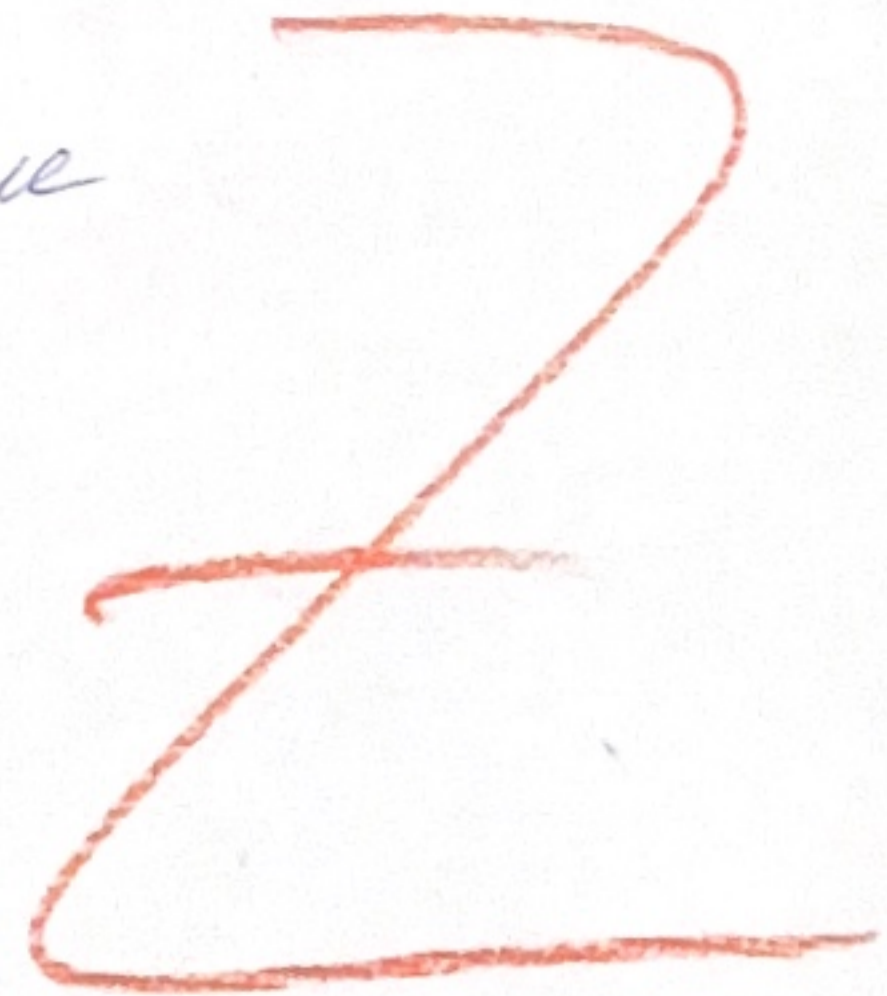
отсюда имеем ур-ие

$$a + 2026 = -\frac{a}{3}$$

$$3a + 6078 = -a$$

$$4a = -6078$$

$$a = -1519,5$$



Ответ: -1519,5

и I

тк BD и AC хорды

внутри окр-ти то:

$$AO \cdot OC = DO \cdot OB$$



тк $AO = OC$ и $DO = OB$ то

из рав-ва имеем что

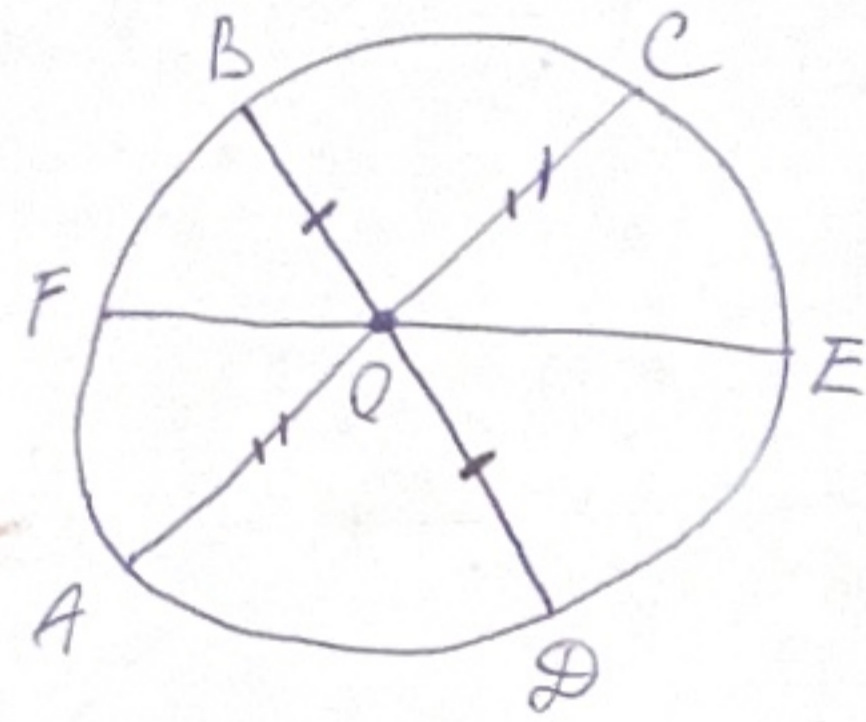
$$AO = OC = OD = OB$$



Дано $R_{окр} = 5$

$AO = OC; DO = OB$

мин FE - ?



Докажем что точка O - центр окр-ти:

действительно тк ABCD - вписан в эту

окр-ть то ее центр равноудален от всех

ее сторон, но такое же свойство имеет

центр окр-ти, а тк для четырехугольника

есть всего одна описанная окр-ть то

точка O совпадает с центром окр-ти =>

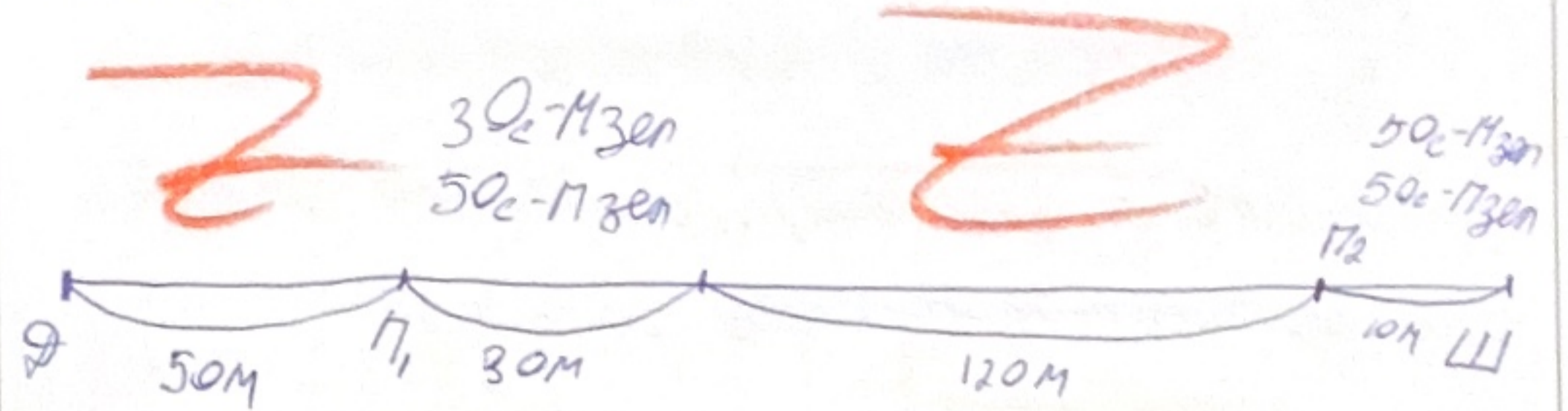
=> FE - диаметр, отсюда $FE = 2R_{окр} = 2 \cdot 5 = 10$

Ответ: 10

83-57-71-53
(127,2)

Чистовик

н 5



тк она выезжает когда сориет крайний то
50 м она должна проехать холм за 30с =>
ее скорость (v) $v \leq \frac{50}{30} = \frac{5}{3} \frac{м}{с}$

рассмотрим расстояние от Дома до 2 точек
перехода (P_2) оно равно $50 + 30 + 120 = 200 м$
значит она проедет его минимум за

$$\frac{200}{\frac{5}{3}} = 120 \text{ сек, но тк при выезде из дома там}$$

10с до кр. то след зметный будет $\frac{2}{3} 10 + 50 = 60с$
(она не успеет) или $\frac{2}{3} 10 + 50 + 50 + 50 = 160с$

значит она должна проехать не быстрее
чем $\frac{2}{3} 160с \Rightarrow$ ее скорость $v \leq \frac{200}{160} = \frac{5}{4} \frac{м}{с}$

а двигаясь с такой скоростью она
сумеет как быстро доехать до школы:
действительно до P_1 она поедет за

$$\frac{50}{\frac{5}{4}} = 40с \text{ (на переходе будет оставаться } 40с$$

зеленого) значит светофор там не переключит
сумеем, затем до P_2 она поедет за

продолжение см. на след. листе

$$\frac{200}{\frac{5}{4}} = 160 \text{ с (на 2 перекоде как раз)}$$

загорится зеленый) и очевидно за 50 с она сумеет проехать 10 метров

Ответ: $\frac{5}{4} \frac{м}{с}$

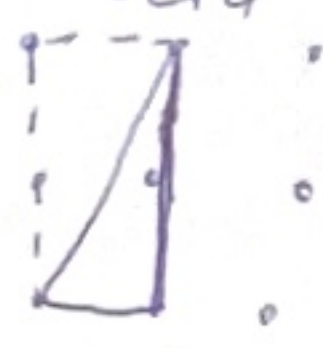
и 3

Найдем коор-во точек, каждая точка имеет координаты $(x_0; y_0)$ тк $x \in [1; 10]$ и $y \in [1; 10]$,

x, y - натуральные, то всего точек $10 \cdot 10 = 100$

тогда коор-во п/у треугольников это коор-во способов задать ипотенузу, тк далее есть всего 2 варианта как его достроить ^{вспомогательные отрезки}

Симметрично относ. ипотенузы
 например как на рисунке
 один Δ катетами перпендикуляр,
 другой с прямыми углами. Способов
 2 тк катеты должны быть параллельны осям.
 тогда для первой точки ипотенузы 100
 вариантов, а для второй - 81 тк нельзя брать
 точки с одной прямой тогда всего способов:



$$\frac{100 \cdot 81}{2} \cdot 2 \text{ (делаем на 2 тк без разницы}$$

порядок выбора, а умножаем ~~на~~ на 2

продолжение см на след. листе

тк есть 2 варианта достроить Δ

$$\frac{100 \cdot 81}{2} \cdot 2 = 8100$$

Ответ: 8100

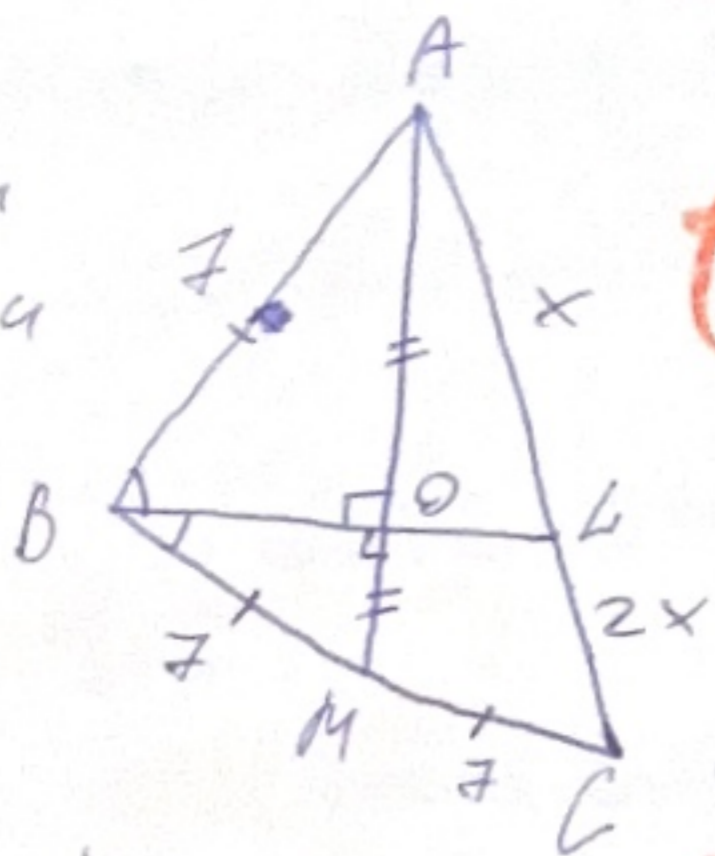
и 8

Первую клетку робот выбирает любым способом
 выбор второй клетки также разницы не имеет
 далее если он идет вверх ^{или вниз} или вниз
 клетки 2 ^{см. рисунок} ^{предполож.} ^{клетки}
 станет клетка слева от первой
 он не сможет закрасить центральную
 последнюю клетку, ну либо любая другая
 с которой он так же не нарисует черной
 квадрат, \Rightarrow он может пойти только
 направо с вер. $\frac{1}{3}$ далее он может пойти
 вверх или вниз (иначе будет сторона 4×3) с
 вероятн. $\frac{2}{3}$, далее выбор каждой клетки
 отсутствует если робот должен закрасить
 черной квадрат \Rightarrow он выбирает 4 клетки
 каждая с вероятностью $\frac{1}{3}$, далее
 с клетки 8 он должен пойти направо
 с вероятностью $\frac{1}{2}$, итого:

$$P = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{3}\right)^6 = \frac{1}{729}$$

Ответ: $\frac{1}{729}$

Чистовик №4
 тк в $\triangle ABM$ BO и высота и биссектр. то BO также и медиана, и также



$\triangle ABM$ р/б $\Rightarrow BM = 7$
 тк AM - медиана то и $MC = 7$

тк BL - биссектр то справедливо: $\frac{BC}{BL} = \frac{AB}{AL}$
 тогда пусть $AL = x$, значит $LC = 2x$.

тк BC всегда 14 то $\triangle ABM$ всегда р/б независимо от AC значит биссектр. BL всегда также будет высотой $\triangle ABM$, а значит будет выполняться условие перпендикулярности, значит осталось выполнить условие о не равнобедренности и пер-во $\triangle ABC$ из нер-ва для $\triangle ABC$ имеем:

$$AB + BC > AC \Rightarrow 21 > 3x$$

$$AB + AC > BC \Rightarrow 7 + 3x > 14$$

для стороны AB выполняется всегда отсюда:

$$\begin{cases} 3x < 21 \\ 3x > 7 \end{cases}$$

или как и у Листе

Дано:
 AC, BC - целые
 $AB = 7$
 AM - медиана
 BL - биссектр.

Найти: все P_{ABC}

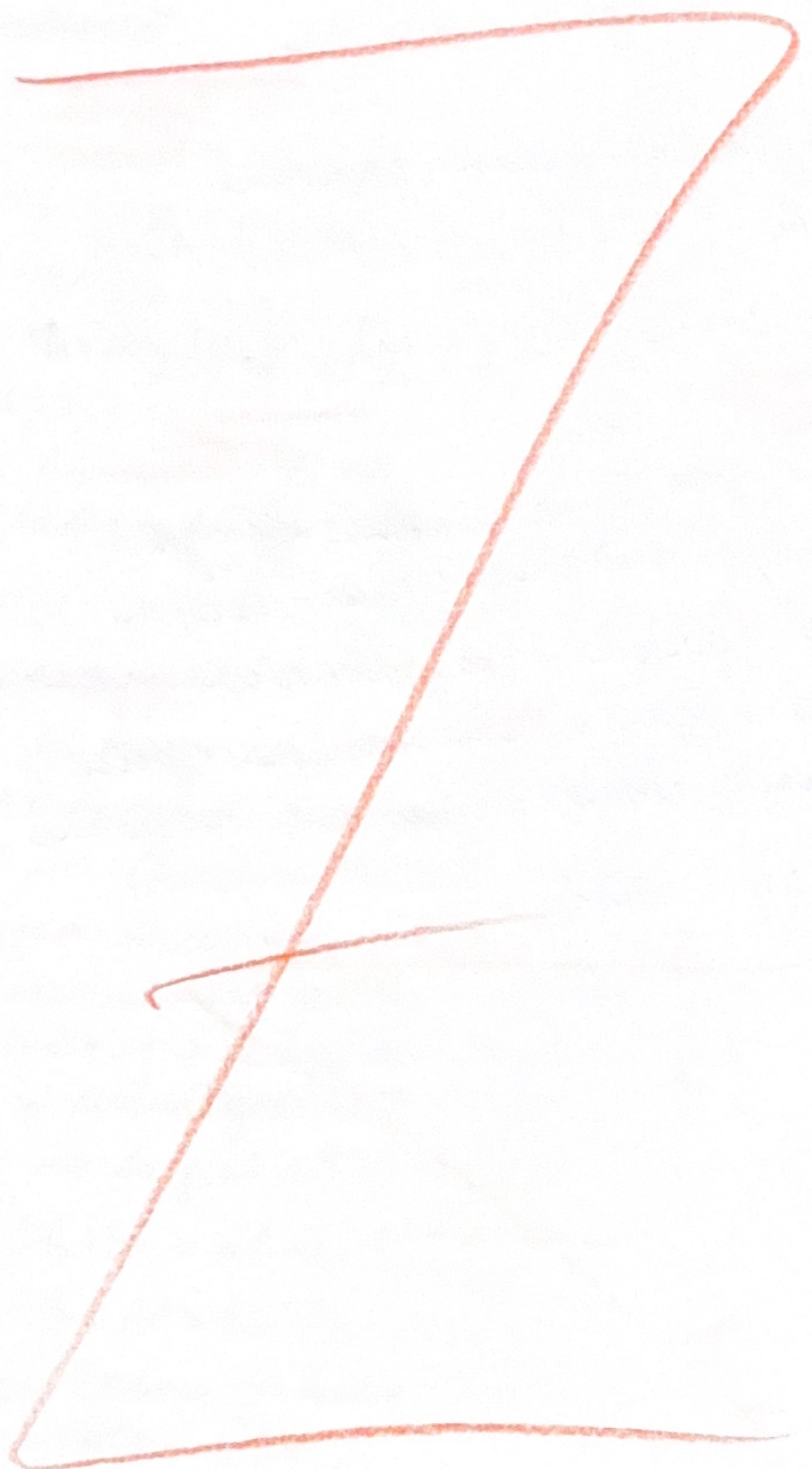
также из неравнобедренности Чистовик
 $AC \neq 14$
 тогда P_{ABC} принимает значения:

$$21 + AC; AC \in (7; 14) \cup (14; 21); AC \in \mathbb{N}$$

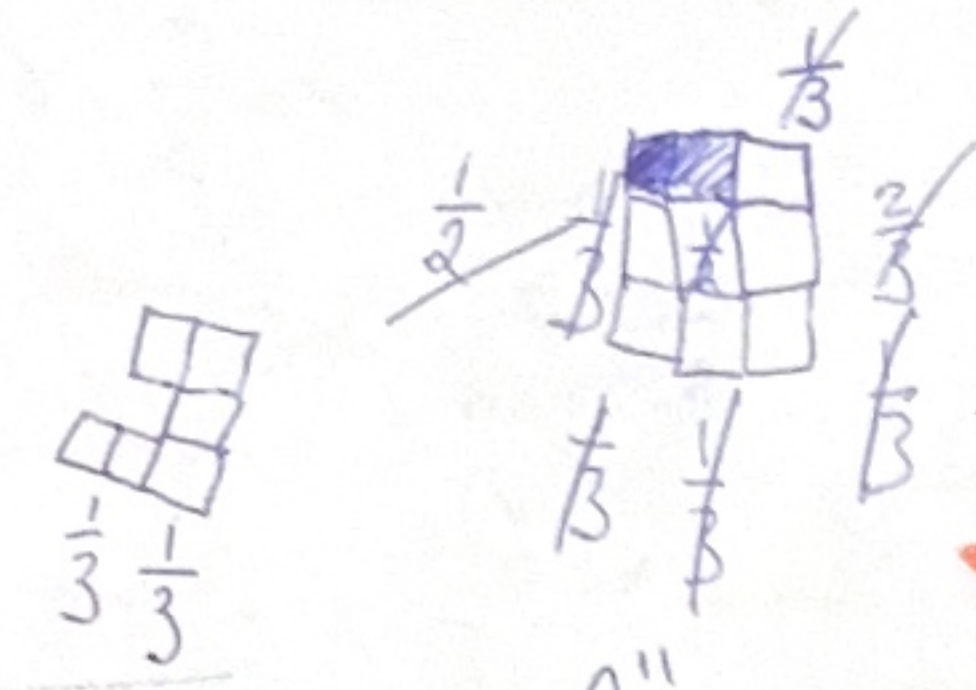
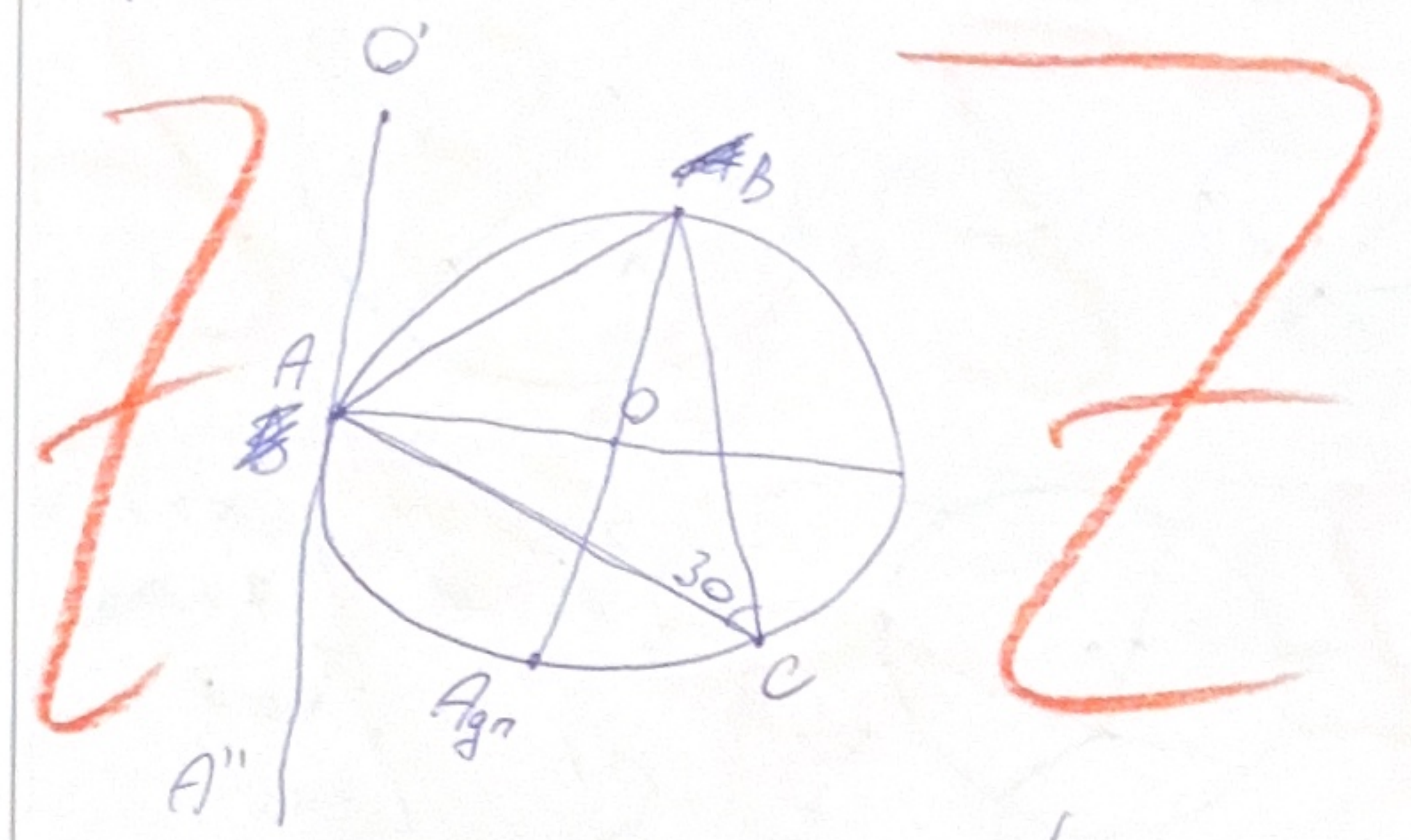
Ответ: $21 + AC; AC \in (7; 14) \cup (14; 21); AC \in \mathbb{N}$

№2
 первая цифра тк наименьшее беззна- четырехзначное число - 1000, то $1000^2 = 1000000$ - что удовлетворяет условию, а может и нужно было наименьшее и которое четырехзначное то есть 1000

Ответ: 1000

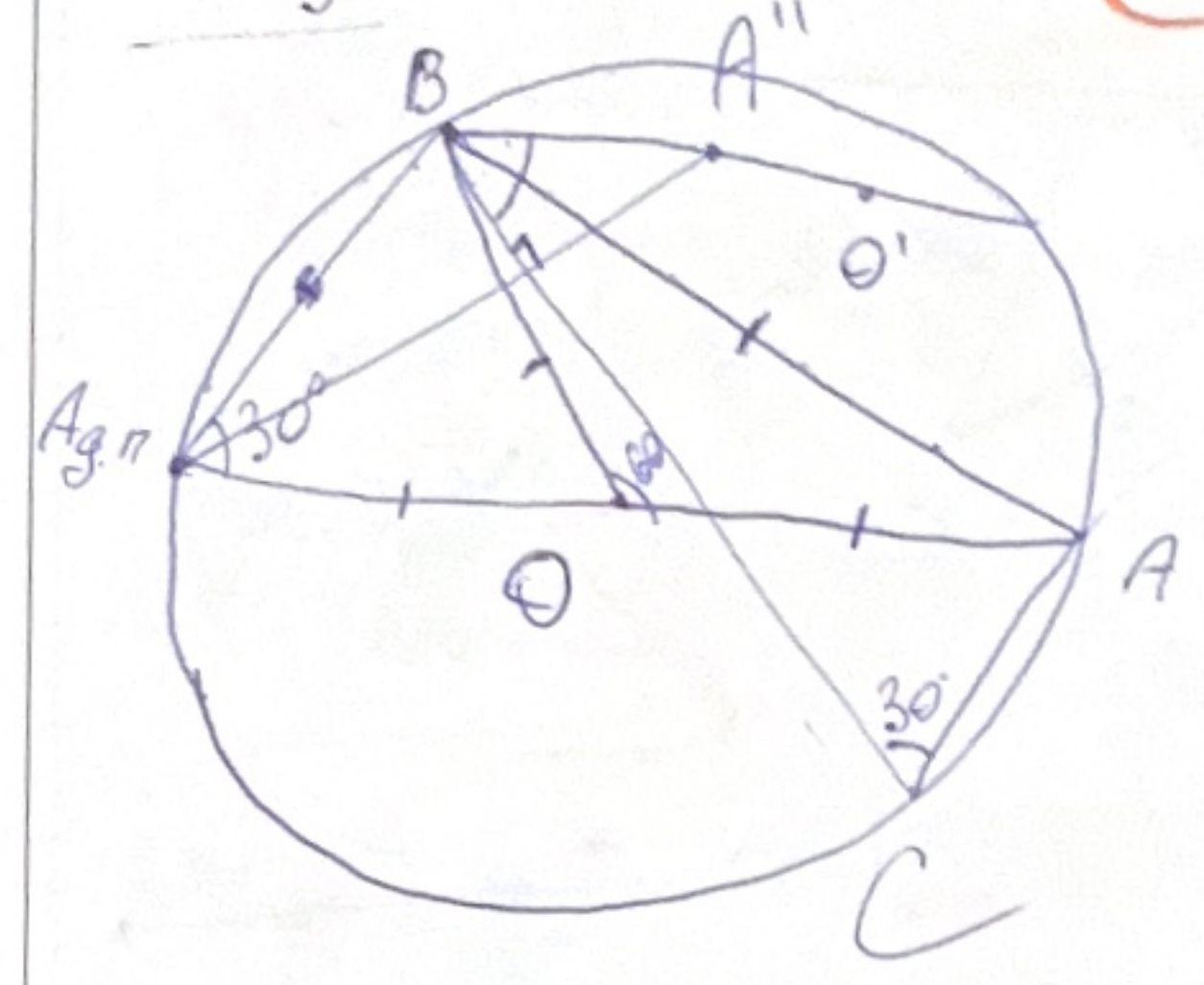


Черновик

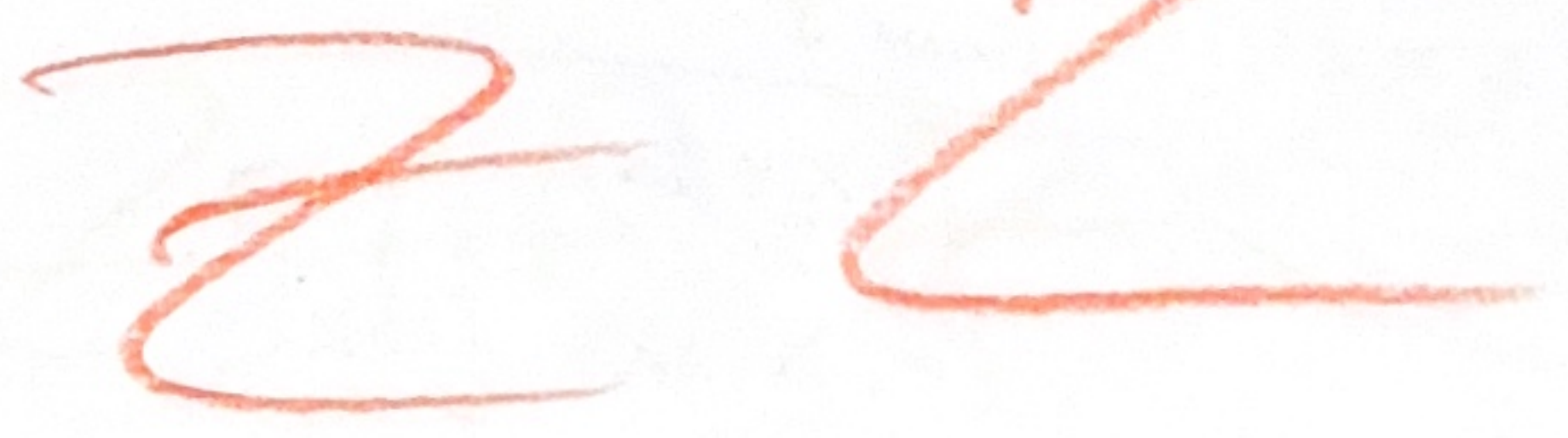


$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$$

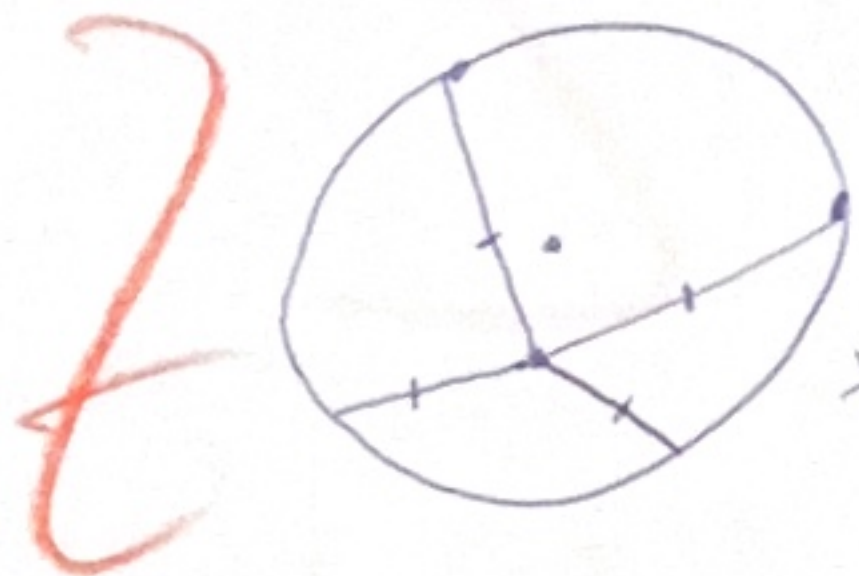
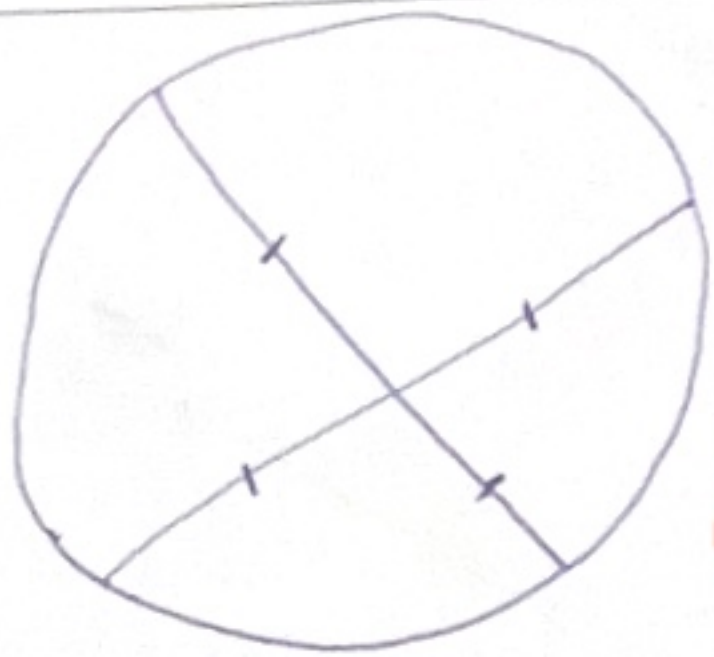
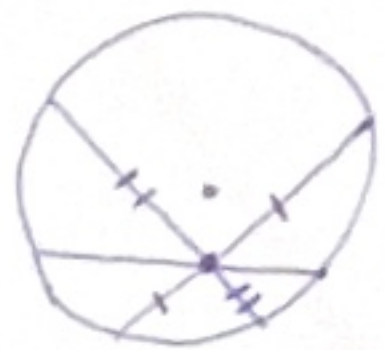
$$\left(\frac{1}{3}\right)^6 = \left(\frac{1}{9}\right)^3$$



$$\begin{array}{r} 81 \\ + 3 \\ \hline 243 \end{array} \quad \begin{array}{r} 81 \\ + 9 \\ \hline 729 \end{array}$$



Черновик



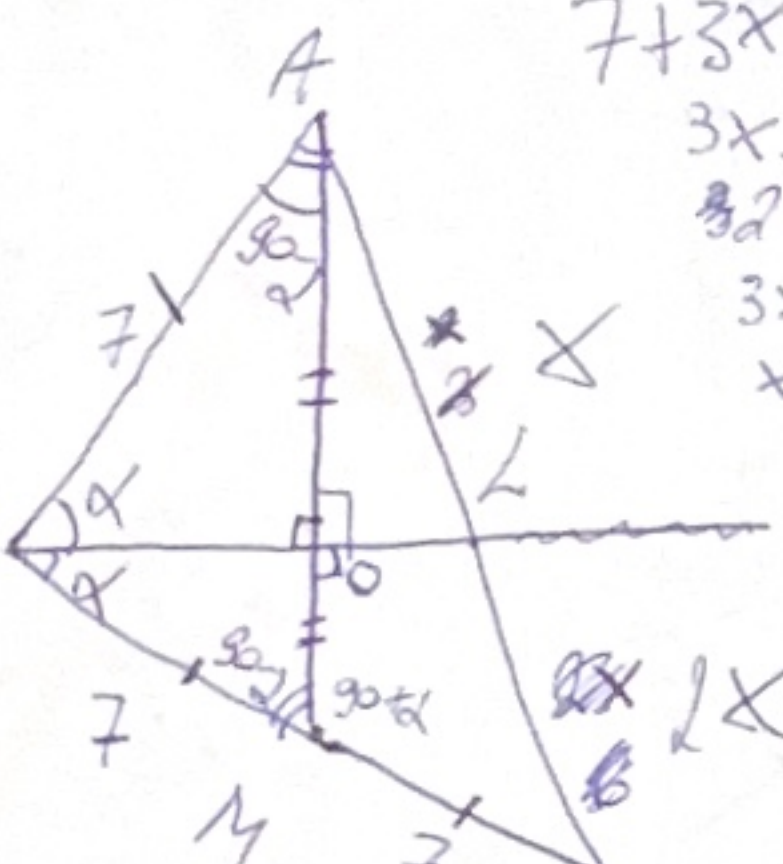
$$\begin{cases} 7+3x > 14 \\ 21 > 3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x > 7 \\ 7 > x \end{cases}$$

$$x \in \left[\frac{8}{3}, 6 \right]$$

$$\begin{cases} x \geq \frac{8}{3} \\ x \leq 6 \end{cases}$$

$$x = \frac{8}{3}, 6$$

1000
x 1000
1000000



$$\begin{cases} 7+3x > 14 \\ 3x > 7 \\ 21 > 3x \\ 3x < 21 \\ x < 7 \end{cases} \quad x \in$$



$$\begin{cases} 7+3x > 14 \\ 3x > 7 \\ 21 > 3x \\ 3x \in [8; 20] \end{cases}$$

$$\sqrt{14 \cdot 7 - 2x^2} \Rightarrow 49 > x^2$$

$$(7-x)(7+x) > 0$$

$\frac{a_1 a_2 a_3 a_4}{x a_1 a_2 a_3 a_4}$

lim 9

$$\begin{cases} 3x+7 > 14 \\ 21 > 3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x > 7 \\ 3x < 21 \end{cases}$$



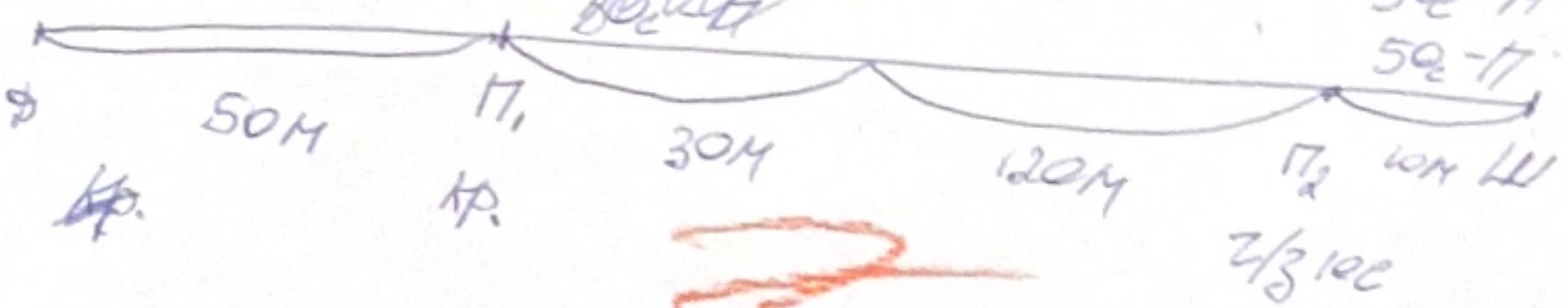
Черновик



50c-17
30c-14

50c-17 зем.
30c-14 зем.

1200c.
900c.



17m не быстрее 30c $V = \frac{S}{t}$

$$V \geq \frac{30}{50} = \frac{3}{5} \frac{m}{c}$$

10000
12000000
9999
+ 9999
9981

$$V \leq \frac{50}{30} = \frac{5}{3} \frac{m}{c} =$$

$$\leq \frac{50}{130} = \frac{5}{13}$$

$$\frac{50}{5} = 40c$$

$$10 + 50m + 50m + 50m = 160c$$

$$\frac{900}{160} = \frac{70}{16} = \frac{7}{1.6}$$

$$V \leq \frac{10}{160} = \frac{12}{16} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$\frac{a_1 a_2 a_3 a_4}{a_1 a_2 a_3 a_4}$



$$V \leq \frac{5}{4} \frac{m}{c}$$



Черновик

$$3(x^2 + \frac{ax}{3} - ax - \frac{a^2}{3})$$

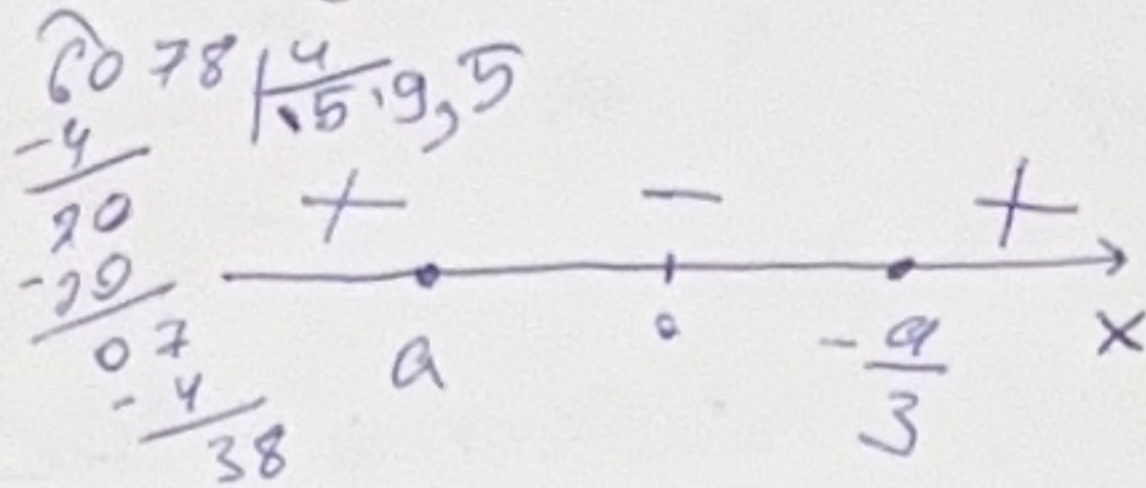
$$\frac{1}{a} + \frac{2x}{a^2} - \frac{3x^2}{a^3} \leq 0$$

$$3x^2 - 2ax - a^2$$

$$\frac{a^2 + 2xa - 3x^2}{a^3} \leq 0 \quad \times \frac{2026}{6078} \quad a < 0$$

$$(x-a)(x+\frac{a}{3}) \leq 0$$

$$\frac{3x^2 - 2xa - a^2 \geq 0}{a^3}$$



$$D = 4a^2 + 12a^2 = 16a^2$$

$$x_1 = \frac{2a + 4a}{6} = a$$

$$a + 2026 = -\frac{a}{3}$$

$$x_2 = \frac{2a - 4a}{6} = -\frac{2a}{6} = -\frac{a}{3}$$

$$3a + 6078 = -a$$

$$4a = -6078$$

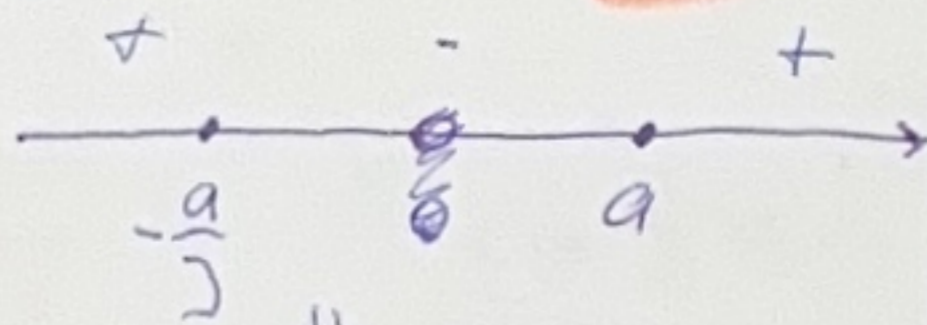
a =

$$\frac{3(x-a)(x+\frac{a}{3})}{a^3} \geq 0$$

$$(x-a)(x+\frac{a}{3}) \geq 0$$

a > 0

$$\frac{(x-a)(x+\frac{a}{3})}{a^3} \geq 0$$



не пох.

a >= 0 a < 0

$$\times \frac{15195}{6078,0} \Rightarrow a = -1519,5$$