0 517777 780009

51-77-77-78
(124.10)

**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**
**имени М.В.ЛОМОНОСОВА**

Вариант 11 класс

Выход 13:06-13:10

Место проведения г. Москва
город

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Ломоносов"
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Михайлова Егора Николаевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«29» марта (03) 2026 года

Подпись участника

51-77-77-78 (124.10)

№1.
ОДЗ:

Черновик

$4\sin x \geq 0 \Rightarrow x \in [0+2\pi k; \pi+2\pi k], k \in \mathbb{Z}$

$\cos x \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2}+\pi n, n \in \mathbb{Z}$

~~Т.к. обе части неотрицательны~~

возведём в квадрат:

$6(1-tg^2x) = 16\sin^2x$

Заметим, что:

$1-tg^2x = 1-\frac{\sin^2x}{\cos^2x} = \frac{\cos^2x-\sin^2x}{\cos^2x} =$

$= \frac{1-2\sin^2x}{1-\sin^2x} = 1-\frac{\sin^2x}{1-\sin^2x}$

$6\cdot\frac{1-2\sin^2x}{1-\sin^2x} = 16\sin^2x \quad | \cdot 1-\sin^2x \neq 0$ (согласно ограничениям)

$6(1-2\sin^2x) = 16\sin^2x(1-\sin^2x)$

Введём замену $\sin^2x = t$, $t \geq 0$, $\cancel{t \neq 1}$, $t \leq 1$.

$6-12t = 16t-16t^2 \quad |:2$

$3-6t = 8t-8t^2$

$8t^2-14t+3=0$

$\times\frac{14}{14}$, $56$, $14$, $196$ ; $\times\frac{24}{4}$, $96$

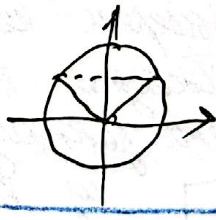
$D = 14^2-4\cdot8\cdot3 = 196-96 = 100 = 10^2$

$t_1 = \frac{14+10}{16} = \frac{24}{16}$ – не уд. условию замены

$t_2 = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$

Обр. замена:

$\sin^2x = \left(\frac{1}{2}\right)^2$



$\sin x = \frac{1}{2}$, т.к. $\sin x \geq 0$ из огр.

$x = \frac{\pi}{6}+2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

$x = \frac{5\pi}{6}+2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6}+2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{5\pi}{6}+2\pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$

чистовик

№2.

$\frac{x}{S(x)} \vdots 9$

$81 \times 11 = 891$, $81 \times 12 = 972$

Заметим, что числа, не кратные 9, не могут входить в данное множество. По признаку равноостаточности суммы цифр числа и самого числа, сумма цифр также кратна 9. Значит, в множество A входят числа, кратные 81. ~~Перечислим~~ Найдём такие трёхзначные числа:

$\frac{x}{S(x)} = 9k$

$x = 9 \cdot k \cdot S(x)$

т.е. $x \vdots 81$

$81\cdot2, 81\cdot3, 81\cdot4, 81\cdot5, 81\cdot6, 81\cdot7, 81\cdot8, 81\cdot9, 81\cdot10, 81\cdot11, 81\cdot12$

~~1) $\frac{162}{9} \vdots 81$ — верно~~

Заметим также, что сумма цифр 3-зн. числа не превышает $9\cdot3=27$, значит, для ~~среди~~ всех данных чисел $\frac{x}{S(x)} \vdots 9$, где $x$ — 3-значное и $x \in A$, $x \vdots 81$, ~~кратных 9~~.

При этом стоит отметить, что единственное 3-значное число с суммой цифр 27 — 999 — не кратно 81.

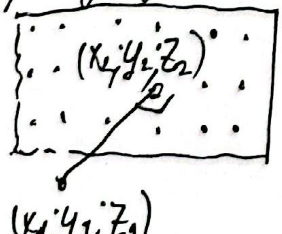
Искомая сумма: $81\cdot3 + 81\cdot7 + 81\cdot12 = 81\cdot22 = 1782$

$81 \times 22$: $162$, $162$, $1782$

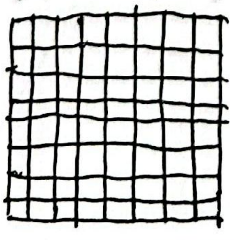
Искомые числа: ~~81·2, 81·3, 81·4, 81·5~~ $81\cdot i$, $i \in \mathbb{Z}$, $i \in [2;12]$.

№3.

Имеем куб $8\times8\times8$ с центром в начале координат (0;0), ~~вершины~~ Закодируем каждый такой прямоугольник при помощи его вершин. Выберем катет, параллельный одной из осей, зафиксируем его. Последняя вершина должна лежать в плоскости, перпендикулярной данному катету и пересекающей его в одной из вершин зафиксированного катета.




Тогда посчитаем искомое количество с учётом поворотов на 90° и отражений. Заметим, что каждый такой треугольник лежит в плоскости, параллельной одной из плоскостей $Oxy$, $Oxz$, $Oyz$.



Рассмотрим такую плоскость. ~~Эта~~ ~~Её~~ Сечение его куба — квадрат $8\times8$ (всего целых точек $9\times9$). Катеты параллельны его сторонам, а значит, всего способов выбрать 3 вершины равно кол-ву способов выбрать линии сетки, где точка пересечения будет

51-77-77-78 (124,10)

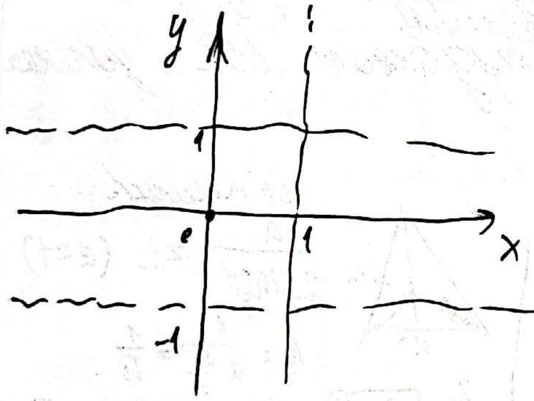
вершиной ~~прямого~~ чистовика угла, а любые 2 другие точки (по одной) на линиях сетки, не совпадающих с точкой пересечения – ~~верш~~ ост- углами гипотенузы. Имеем 9·9·8·8 способов, причём заметим, что каждая тройка вершин посчитана единственный раз. Всего пересечений ~~$9^2$~~ 9·3, значит, треугольников $9^3 \cdot 24 \cdot 8 =$

$= 9^3 \cdot 192 = 27^2 \cdot 192 = 729 \cdot 192 = 139968$

Ответ: 139968.

$$\begin{array}{r} \times\, 81 \\ 9 \\ \hline 729 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\, 729 \\ 192 \\ \hline 1458 \\ 6561\phantom{0} \\ 729\phantom{00} \\ \hline 139968 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\, 729 \\ 192 \\ \hline 1458 \\ 6561\phantom{0} \\ 729\phantom{00} \\ \hline 139968 \end{array}$$

№4.




$\sin^2(k\pi x) = 1$

$k\pi x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z} \ \Big|\cdot \frac{1}{k\pi}$ (если $n \vdots 2$, тогда $\sin(k\pi x) = 1$, иначе $\sin(k\pi x) = -1$)

$x = \frac{1}{2k} + \frac{n}{k}$ – ~~точки~~ абсциссы пересечения с прямыми $x=1$, $x=-1$.

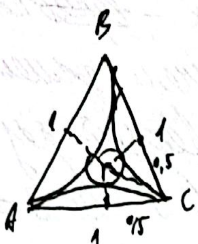
Отметим точки для каждого из $k$:

$k = 11$: $\left(\frac{1}{22}; 1\right)$; $\left(\frac{1}{22} + \frac{1}{11}; -1\right)$; $($

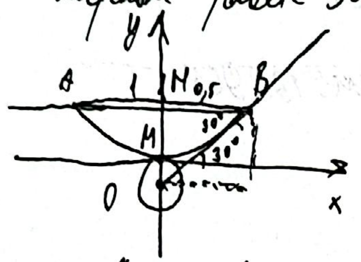
Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

5. Чистовик. Введём прямоуг. систему координат отн. AB с центром в середине AB.

Рассмотрим одну из парабол $y = Cx^2$;



Из условия по нулевой угол получаем, что угол между касательной из общей точки 2-х парабол (т.к. ABC-равносторонний) в т. B равен $30°$. Найдём тангенс угла наклона касательной при помощи производной и определим C:



$f'(x) = 2Cx$

$$tg\,30° = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow f'(0{,}5) = 2 \cdot C \cdot \frac{1}{2} =$$

$$= C = \frac{1}{\sqrt{3}}$$ (из уравнения касательной

$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$; $tg\,\varphi = f'(x_0)$). Тогда определим радиус как разность ~~радиуса вписанной~~ отрезка высоты от центра ~~окружности~~ ABC и значения $|f(x)|$ в точке B или A.

$$f(0{,}5) = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4\sqrt{3}}$$

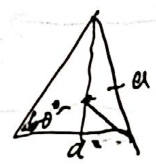
$$R(ABC) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$OH = \frac{1}{3}\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{3}\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$OH = \frac{1}{2\sqrt{3}}, \quad MH = f(0{,}5) = \frac{1}{4\sqrt{3}}$$

Значит, $r = OH - MH = \frac{1}{4\sqrt{3}}$.

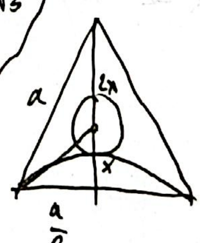
Ответ: $\frac{1}{4\sqrt{3}}$.



из т. синусов: $\frac{a}{2\sin 60°} = R$ $(a = 1)$

$$R = \frac{1}{2\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{2}{3} \cdot \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{2a}{3} \cdot \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{2a\sqrt{3}}{2 \cdot 3} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$



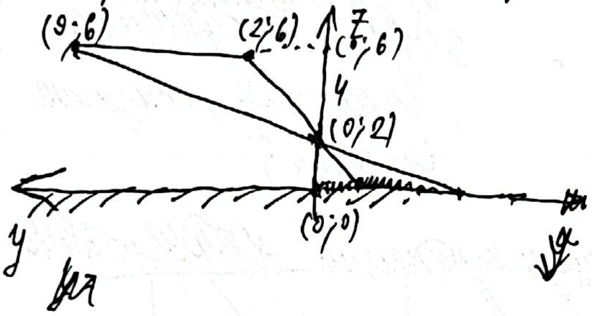
из св-ву медианы точка пересечения их делит $2:1$ (ABC-равносторонний)

Примечание: расчёты проведены из соображений того, что O-центр симметрии ABC, как следствие, центр впис, опис. окружностей

Чистовик

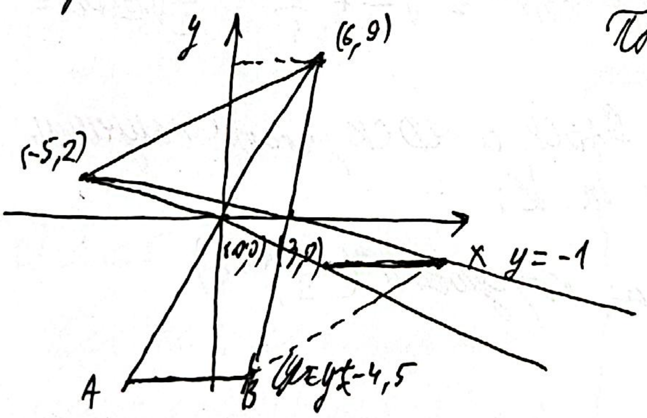
6. ~~Трудным~~ Заметим, что задача равносильна ситуации ~~в~~ с продолговатым источником освещения в виде ~~прямой линии соединяющей AB~~ отрезка AB. Значит, достаточно ~~при~~ посчитать размер тени + полутени путем рассмотрения выходящих лучей из т. A и B.
~~Т.к. вид сверху является проекцией картинки,~~

Проекция на плоскость Oyz:




Заметим, что все точки с координатой $y \in [0; k]$, где k - длина катета прямоуг. треугольника образованного пересечением Oy и прямой, соединяющей точки проекций (9;6) и (0;2), были затенены. Найдем k:
Из подобия получаем $\frac{4}{2} = \frac{9}{|k|} \Rightarrow |k| = 4,5 \Rightarrow k = -4,5$ (аналогично для произвольной точки)

Проекция на плоскость Oxy (условие задачи):




Получаем систему неравенств на координаты x, y затенённых точек:

$$\begin{cases} y \le \frac{3}{2}x \\ x \le 0 \\ y \le -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = 3k + b \\ 2 = -5k + b \end{cases}$$

$b = -3k$

$2 = -8k$

$k = -\frac{1}{4}$

Определим далее прямую, задающую ограничение в силу высоты забора.
$|y_0| = \frac{y}{2}$, где y - координата y светлячка; $y_0 = -\frac{y}{2}$ $(x_1, y_1)$

Далее, определим координаты т. A, т. B для произвольной ~~$(x_1, y_1)$~~, где $y_1 > 0$.

$A\left(-\frac{x_1}{2}; -\frac{y_1}{2}\right)$ из подобия Δ-ов

$$\begin{cases} kx_1 + b = y_1 \\ 3k + b = 0 \end{cases}$$

$b = -3k$

$kx_1 - 3k = y_1$

$k = \frac{y_1}{x_1 - 3}$

$B\left(3 - \frac{x_1 - 3}{2}; -\frac{y_1}{2}\right)$ из системы ур-ний

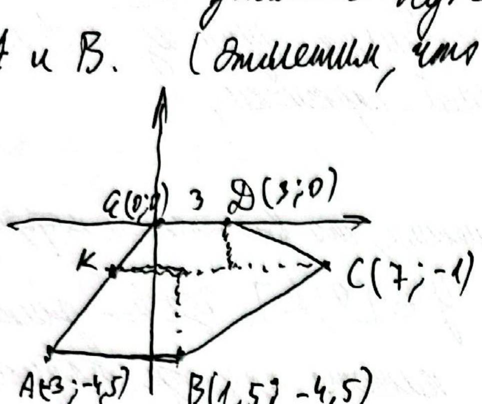
$-\frac{y_1}{2} = \frac{y_1}{x_1 - 3}x - \frac{3y_1}{x_1 - 3}$

$x = \frac{x_1 - 3}{y_1}\left(\frac{3y_1}{x_1 - 3} - \frac{y_1}{2}\right)$; тогда

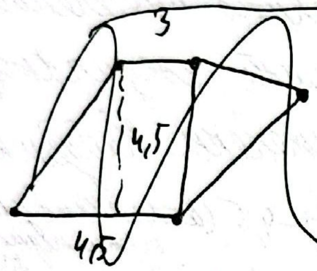
Заметим, что координаты точек (A; B) зависят линейно от $x_1, y_1$

Чистовик №6 (продолжение)

По этой причине достаточно посчитать площадь получившегося пятиугольника путём соединения крайних точек A и B. (Отметим, что любая точка, удовлетворяющая пересечениям для прямых, проходящих через края забора и конца светильника и находящихся выше $-\frac{y_1}{2}$, оказались затенены)




~~Сложим площадь трапеции ABDE и ABCD~~




$$S = S_{ABDE} + S_{BCD}$$

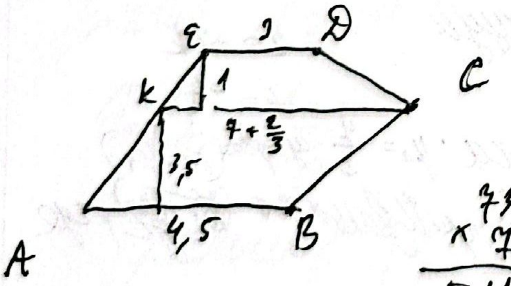
$$S_{ABDE} = \frac{7,5}{2}\cdot 4,5 = \frac{15}{4}\cdot\frac{9}{2} = \frac{135}{8}$$

$$BC = \sqrt{(7-1,5)^2+(3,5)^2} = \sqrt{5,5^2+3,5^2} = \sqrt{\frac{11^2}{4}+\frac{7^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{121+49} = \frac{1}{2}\sqrt{170}$$

Сложим площадь трапеции ABCK и EDCK, чтобы получить ответ. Найдём координату т. K:

$-1 = \frac{3}{2}x$ Итак, K имеет координаты $(-\frac{2}{3}; -1)$.

$x = -\frac{2}{3}$ Тогда:




$$\begin{array}{r} \times\, 73 \\ 7 \\ \hline 511 \end{array}$$

$$S = \frac{7+\frac{2}{3}+4,5}{2}\cdot 3,5 + \frac{7+\frac{2}{3}+3}{2}\cdot 1 =$$

$$= \left(\frac{7}{2}+\frac{1}{3}+\frac{9}{4}\right)\cdot\frac{7}{2} + \left(\frac{7}{2}+\frac{1}{3}+\frac{3}{2}\right) =$$

$$= \frac{42+4+27}{12}\cdot\frac{7}{2} + \frac{21+2+9}{6} =$$

$$= \frac{(46+27)7}{24} + \frac{32}{6} =$$

$$= \frac{73\cdot 7}{24} + \frac{16}{3} = \frac{73\cdot 7+16\cdot 8}{24} =$$

$$= \frac{511+128}{24} = \frac{639}{24}$$

Ответ: $\cancel{\frac{739}{24}}$ $\frac{639}{24}$.

Чистовик №8:

$8x^2 \log_a x - \log_x a - 2x \geq 0$

Преобразуем на ОДЗ:

ОДЗ: $\begin{cases} a>0 \\ a\neq 1 \\ x>0 \\ x\neq 1 \end{cases}$

~~8x2~~ $8x^2 \cdot \log_a x - \frac{1}{\log_a x} - 2x \geq 0$

$\frac{8(x\cdot\log_a x)^2 - 2x\log_a x - 1}{\log_a x} \geq 0 \mid :8>0$

$8t^2 - 2t - 1 = 0, \; t = x\log_a x$

$D = 4 - 4\cdot 8\cdot(-1) = 4 + 4\cdot 8 = 4\cdot 9 = 6^2$

$t_1 = \frac{2-6}{16} = -\frac{4}{16} = -\frac{1}{4}$

$t_2 = \frac{2+6}{16} = \frac{1}{2}$

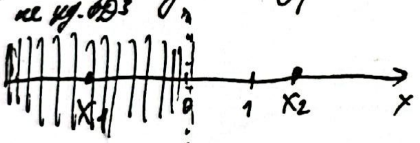
$\frac{(x\log_a x + \frac{1}{4})(x\log_a x - \frac{1}{2})}{\log_a x} \geq 0$

$\log_a x^x = -\frac{1}{4} \quad x^x = a^{-\frac{1}{4}}$

Т.к. при искомых $a$ решение должно ~~быть~~ состоять из полуинтервала и точки, получаем, что данной точкой может быть решение $x\log_a x = \frac{1}{2}$ или $x\log_a x = -\frac{1}{4}$

Разберём случаи ~~$\log_a x$~~ $a>1$ и $a<1$ ($\log_a x$ - возр. функция или убывающая соответственно)

1) $a>1$, $\log_a x$ - возр.




2) $a<1$, $\log_a x$ - убыв.

При $x<1$, $a<1$ получаем:

$(x\log_a x + \frac{1}{4})(x\log_a x - \frac{1}{2}) \geq 0$

Решения аналогично случ. 1 единственные. Тогда $x\log_a x$ при $x<1$ $a<1$ положителен $\Rightarrow$ существует решение $x_2$ для уравнения

При $x \overset{>}{<} 1$ $\log_a x \overset{>}{<} 0$, при этом неравенство равносильно:

$(x\log_a x + \frac{1}{4})(x\log_a x - \frac{1}{2}) \geq 0$

Т.к. $f(x) = x\log_a x$ - возр., то решения $x\log_a x = -\frac{1}{4}$, $x\log_a x = \frac{1}{2}$ единственны. При этом для $x>1$, $a>1$, $x\log_a x > \log_a x > 0$, значит, отметим ~~$x_1$ - решение $x\log_a x = -\frac{1}{4}$~~ и $x_2$ - решение $x\log_a x = \frac{1}{2}$. При этом учтём, что при $a>1$, $1>x>0$ $x\log_a x < 0$ для оценки положения $x_2$ ~~при отрицательных~~

Решением данного нер-ва является $[x_2; +\infty) \Rightarrow$ случай не удов. условию, т.к. ~~при~~ $x > 1$, решением яв- $a>1$ ляется луч

Отметим, что из ОДЗ $x\log_a x = -\frac{1}{4}$ не им. решений, т.к. $x$, $\log_a x$ одного знака.