0 393825 670009

39-38-25-67
(121.6)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 7-8

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Михайлова Ивана Владимировича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«29» марта 2026 года

Подпись участника

№1

70 (семьдесят)

Дано:
$\omega(5, O)$
хорды AB, CD, EF;
$AB \cap CD = G$
$AG = BG$,
$CG = DG$

Найти:
минимум EF

Построение

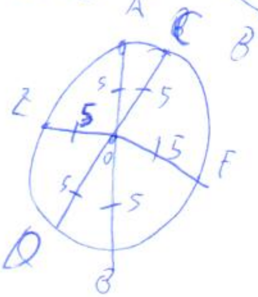
1. Заметим, что центр ω $O \in$ серпер хорды AB и $O \in$ серпер. хорды $CD \Rightarrow O =$ серпер $AB \cap$ серпер CD.

2. Так как хорды AB и CD пересекаются в G, а G - их ~~центр~~ середина, то пересечение серпера AB и серпера CD тоже будет в G: $\Rightarrow$
$\Rightarrow G = O$.

3. так как хорды пересекаются в центре, то EF (как AB и CD) - диаметр. $\Rightarrow EF = 5 \cdot 2 = 10$

(серпер → серединный перпендикуляр)

Ответ: наименьшая длина $EF = 10$.



~~№2~~

~~Составим уровение:~~

~~$(\overline{abcd})^2 = \overline{abcdefgh}$ или $(\overline{abcd})^2 = \overline{abcdefghi}$, т.к. $\overline{abcd}^2$ от 10^6 до~~

~~$99980001 = (9999^2)$~~

~~$\overline{abcd} \cdot \overline{abcd} = \overline{abcd} \cdot 10000 + \overline{efgh}$~~
~~$\vdots \overline{abcd}$ и $\vdots \overline{abcd} \Rightarrow \vdots \overline{abcd}$~~

~~$\overline{efgh} \vdots \overline{abcd}$, где $\overline{efgh} = 2a \cdot d \cdot 1000 + 2b \cdot c \cdot 1000 + c^2 \cdot 100 + d^2$~~

№2

Заметим, что 1000 подходит ($1000^2 = 1000000$), а 1001 - нет, ведь $1001^2 = 1002001$ $1002 > 1001$. $1002^2 = 1004004$ $1004 > 1002$.

Заметим, что если n^2 - ~~восьми~~ семи значное число, то ~~первые 4 цифры~~ число из первых 4 цифр квадрата будет больше, чем n, кроме $n = 1000$, потому что $\overline{abcd}^2 = \overline{abcd} \cdot a000 + \overline{abcd} \cdot b00 + \overline{abcd} \cdot c0 + \overline{abcd} \cdot d$. если $d \neq 0$ или $c \neq 0$ или $b \neq 0$ или $a > 1$, то эта сумма будет больше, чем $\overline{abcd9999}$. (т.к. $\overline{abcd} \geq 1000$, то если к $\overline{abcd} \cdot a000$ прибавить $\overline{abcd} \cdot k$, где $k \neq 0$, то мы прибавим число, больше 1000

№2 (продолжение)

и совершим переход через разряд тысяч ⇒ число тысяч станет больше, чем $\overline{abcd}$.

Случай, когда n^2 - восьмизначное.

~~подходит число $n = 9999$, ведь $9999^2 = 99980001$. А $9998^2 = 99960004$, $9996 < 9998$~~

Заметим, что если n^2 - восьмизначное, и меньше 9999, то число из первых 4 цифр будет $< n$, ведь $\overline{abcd}^2 = \overline{abcd} \cdot \overline{a000} + \overline{abcd} \cdot \overline{b00} + \overline{abcd} \cdot \overline{c0} + \overline{abcd} \cdot d$, что меньше, чем $\overline{abcd0000}$. Ведь $\overline{abcd0000} = \overline{abcd} \cdot 10000$, а $\overline{abcd}^2 = \overline{abcd} \cdot \overline{abcd}$. т.к. $\overline{abcd}$ - 4знач., то $\overline{abcd} < 10000$. ⇒ решений в n^2 - восьмизнач. нету.

Ответ: 1000.

№3

Дано равенство

$$ТУК \cdot ТУК = \overline{ФАРТУК} \Rightarrow ТУК \cdot ТУК = ФАР \cdot 1000 + ТУК$$

$\vdots ТУК$ $\quad \vdots ТУК$ и $\quad \vdots ТУК$

т.к. $ТУК^2 \vdots ТУК$ и $ТУК \vdots ТУК \Rightarrow \overline{ФАР000} \vdots ТУК$

Если ФАРТУК - 6 знач. число и точный кв., то ~~ФАРТУК~~

$316 < ТУК < 1000$

$316^2 = 99728$ $\quad (999^2 = 998001)$

$317^2 = 100389$ $\quad 1000^2 = 1000000$

предположим, что $1000 \vdots ТУК \Rightarrow ТУК = 500$ (25)

остальные делители: (250, 125, 50, 25, 8, 5, 4, 2, < 316)

39-38-25-67 (121.5)

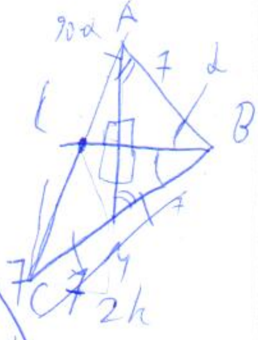
Черновик

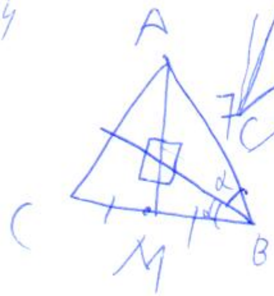
~~$9999^2 = 9999 \cdot 9000$~~

9999 × 9999 = 99979999

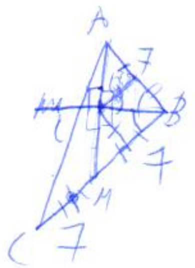
~~9998 × 9998 = 99996004~~

99990001
19997
99970004





9999^2



100000 =

$340^2 = 90000 + 12000 + 12000 + 400$

$330^2 = 90000 + 9000 + 9000 + 900$

$320^2 = 90000 + 6000 + 6000$

$315^2 = 90000 + 3000 + 3000 + 100 + 3100 + 25 = 99225$

$316^2 = 90000 + 6000 + 100 + 3162 + 36 = 99$

$(300+17)^2 = 90000 + 5100 \cdot 2 + 189 = 100389$

$316^2 = 90000 + 9800^2 + 128 = 99728$

$999^2 = 998001$

№3 (продолжение)

ТУК=500, но У≠К => не подходит.

~~ФАРТУК = ТУК·ТУК = $(100Т+10У+К)^2 = 10000Т^2+2000Т·У+200Т·К+100У^2+20У·К+К^2$~~

ФАР000 = ТУК·(ТУК−1) произв. 2 послед. чисел

: 1000 => ~~1~~ 1. a: 125, a−1: 8, ведь среди них ровно одно : 2

2. ~~a:250, a−1:4~~

и только 1 может быть : 5

Теперь надо найти 2 посл. числа, где одно :8, а другое — 125.

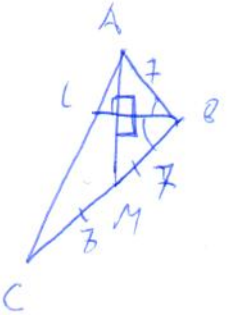
	ТУК	ТУК−1
<316	✗ 125	124
<316	✗ 250	249
	375	374 / 8 = 46, остаток 6 ✗ /8
у=к	✗ 500	
	✓ 625	624 ✓ 624 = 78·8
	750	749 - нечёт ✗
	875	874 = 8·109 + 2 ✗
	999 ✗ < 1000	

Подходит ТУК=625, ФАРТУК = 625^2 = 380625

Ответ: ФАРТУК = 380625

39-38-25-57
(12.5)

№ 4



Дано:
$\triangle ABC$
не р/б
Медиана AM
бисс. BL
$AM \perp BL$
$AB = 7$

Надо:
P_{ABC}

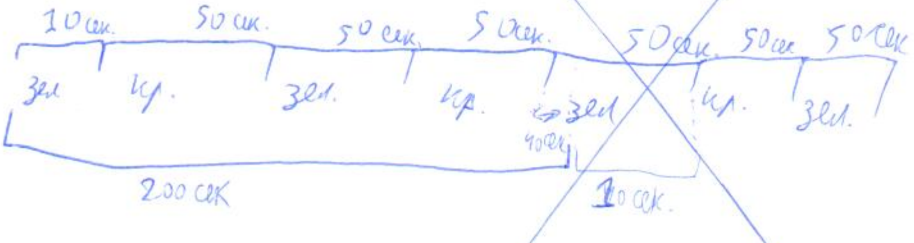
1. ~~$\triangle ABM$~~
в $\triangle ABM$ BC - бисс. и высота $\Rightarrow \triangle ABM$ р/б $\Rightarrow$
$\Rightarrow AB = BM = \cancel{\frac{1}{2}(CM)} \Rightarrow BC = 14$
$AB = BM = CM = 7$

2. по Нер-ву $\triangle$ (по неравенству треугольника):
$AC + 7 > 14 \Rightarrow AC > 7 \Rightarrow P_{ABC} > 28;$
$14 + 7 > AC \Rightarrow AC < 21 \Rightarrow P_{ABC} < 42.$
(р/б $\to$ равнобедренный)

Ответ: от 29 до 41 включительно.

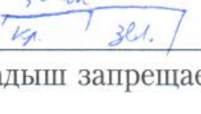
№ 5

1. Т.к. ~~АГ~~ АГР. не хочет останавливаться, то её скорость должна быть не больше $\frac{50}{30}$ м/с, чтобы не попасть на 1 светофор.
2. Теперь рассмотрим случай с $V = \frac{5}{3}$ м/с.
до 1 св. АГР. доедет за 30 сек и ровно, как она приедет, он загорится зелёным.
до 2 св. АГР. доедет за $\frac{50+30+100}{\frac{5}{3}} = 120$ сек, за это время:



За 10 сек. Агриппина успеет проехать только $10 \cdot \frac{5}{3} = \frac{50}{3} \approx 16.67$ м, ~~что~~ и попадёт на красный посредине ~~пер~~ зебры.
Чтобы попасть на следующий „зелёный" 2 светофора, ей надо проехать 200 м до него за ~~$\frac{200}{2}$~~ 260 сек - 310 сек, т.е. со скоростью от $\frac{200}{260} = \frac{10}{13}$ м/с до $\frac{200}{310} = \frac{20}{31}$ м/с.

3. Рассмотрим 1 свет. ~~т.к.~~ ~~е~~ если попасть на 1 зел., то надо ехать со скоростью от $\frac{50}{30}$ до $\frac{50}{80}$ м/с.



* Если двигаться со скоростью $\frac{10}{13}$ м/~~с~~ то

через МБ (продолжение)

~~по АТР. доедет 1 св. за $\frac{50+30}{\frac{10}{13}} = 104$ сек~~

~~до 1 св. 1 св.~~

~~50 метр 30 м.~~

30 50 30

кр зел кр

по АТР. доедет до 1 св. за $\frac{50}{\frac{10}{13}} = 65$ сек., но за 15 зеленого проедет только $15 \cdot \frac{10}{13} \approx 11$ метров из 30. ⇒

t:

30 50 30

кр. зел. кр.

15

⇒ АТР. должна попасть на 2 зеленый на 1-м светофоре. ⇒

V_A от $\frac{\cancel{30+50+} \; 50(м)}{30+50+30(сек)} = \frac{5}{11}$ м/с до $\frac{50(м)}{30+50+30+50(сек)} = \frac{5}{16}$ м/с

4. если $V_A = \frac{5}{11}$ м/с, то посмотрим на 2 св. До него она доедет за $\frac{200}{\frac{5}{11}} = 440$ сек:

10 50 50 50 50 50 50 50 50 50

зел кр зел кр зел кр зел кр зел кр

440

и попадёт на кр.

Чтобы попасть на зел., надо ехать со скоростью $\frac{200}{460} = \frac{5}{13}$ м/с

так с $V_A = \frac{10}{13}$ м/с, АТР посмотрим на 1 св.:

до него за: $\frac{50}{\frac{50}{13}} = 130$ сек.

30 50 30 50

130 70

№6

~~Т.к. мы делим число~~ $\frac{\overline{abc}}{(a+b+c)} = 9k \Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{abc} = 9k \cdot (\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}) \Rightarrow \overline{abc} \vdots 9 \Rightarrow (\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}) \vdots 9 \Rightarrow \overline{abc} \vdots 81.$

~~abc~~ если ~~ab~~ $\overline{abc} = 81m$

m	abc	9·k	(a+b+c)	
2	162	9·2	9	✓
3	243	9·3	9	✓
4	324	9·4	9	✓
5	405	9·5	9	✓
6	486	9·3	18	✓
7	567	9·3,5?	18	× $\frac{587}{18}$ – не целое
8	648	9·4	18	✓
9	729	9·4,5?	18	× $\frac{729}{18}$ – не целое
10	810	9·10	9	✓
11	891	9·5,5?	18	× $\frac{891}{18}$ – не целое
12	972	9·6	18	✓
13	1053	9·13	9	× $1053 > 999$
1	81	9·1	9	× $81 < 100$

Множество A, ~~трё~~ Ё х значные число = {162, 243, 324, 405, 486, 648, 810, 972}. $\sum(162, 648, 972) = 1782$

Ответ: 1782.

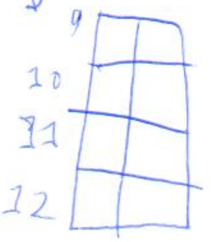
№7

Если сумма чисел $a, a+1, a+2, a+3$, то всего $4(a+1)+2$.

А сумма 9 чисел $= 4 \cdot 10 + 5 \Rightarrow$ 9-е число, которого нет в таблице вида $4k+3 \Rightarrow$ 3 или 7. 1) Если 3, то $4(a+1)+2 = 42$

$a+1=10$

$a=9$



~~$9 = 1+8$~~

~~$10 = 4+6$~~

~~$11 = 2+9$~~

~~$12 = \boxed{5+7}$~~

~~$9 =$~~

~~$10 = 7+$~~

~~$11 = 5+6$~~

~~$12 = \boxed{5+7}$~~

$12 = 5+7 \,/\, 4+8$ ($3+9$ нельзя, ведь нету 3)

$\boxed{5+7=12}$ $\boxed{4+8=12} \longrightarrow 6 \in \Sigma 10 / \Sigma 11$ ($9=3+6$ нельзя)

$\boxed{6+4=10}$ но 4 уже занято

$\boxed{6+5=11}$

из 1, 2, 7, 9 только $\boxed{1+9=10}$ ($1+9 \geq 10$, остальные пары <10)

$\boxed{2+7=9}$

$\boxed{№2}$

$6 \in \Sigma 10 / \Sigma 11$ ($9=3+6$ нельзя)

$\boxed{4+6=10}$

из 1, 2, 8, 9 только $2+9=11$, $8+9>11$, другие пары <11

$\boxed{1+8=9} \rightarrow \boxed{2+9=11}$

$\boxed{№1}$

$\boxed{6+5=11}$ но 5 уже занято.

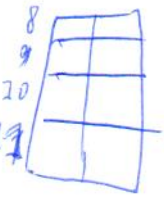
~~из 1, 2, 4~~

№7 (продолжение)

2) Если нет 7: $4(a+1)+2=38$

$4(a+1)=9$

$a=8$ →



$11 = 3+8 / 3+9$ (7+5 нельзя, нету 7)

$6 \in \Sigma 11 / \Sigma 9$ (10 = 4+6 нельзя)

$\boxed{6+5=11}$

из 1, 2, 3, 9 только

$8 = 2+6 / 3+5$ (1+7 нельзя, нету 7)

$\boxed{2+6=8}$

$9 = 1+8 / 4+5$ (3+6 и 2+7 нельзя, 2 и 6 заняты)

$\boxed{1+8=9}$

из 3, 4, 5, 9 нельзя составить $\Sigma 10$:

$\Sigma 10$:

$3+4=7$

$3+5=8$

$4+5=9$

$3+9=12$

$4+9=13$

$5+9=14$

из 1, 3, 8, 9:

~~только~~

$1+3=4$ ×

$1+8=9$ ×

$\boxed{1+9=10 \quad 3+8=11}$ ✓

$3+9=12$ ×

$8+9=17$ ×

$\boxed{№3}$

$\boxed{3+5=8}$

$9 = 1+8$ / ~~1+8~~ (345 заняты)

$\boxed{1+8=9}$

~~4+5=9~~ (2+7 нельзя, везде 7 — нету)

из 2, 4, 6, 9:

$2+4=6$ ×

$2+6=8$ ×

$\boxed{4+6=10 \quad 2+9=11}$ ✓

$4+9=13$ ×

$6+9=15$ ×

$\boxed{№4}$

Всего нам есть 4 набора: $\left\{ \begin{pmatrix} 1,8 \\ 4,6 \\ 1,9 \\ 3,7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2,7 \\ 1,9 \\ 6,5 \\ 4,8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2,6 \\ 4,5 \\ 1,9 \\ 3,8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3,5 \\ 1,8 \\ 4,6 \\ 2,9 \end{pmatrix} \right\}$.

в каждом случае 1 из чисел можно поместить в левую клетку, а другое можно в правую ⇒ для каждого набора есть $2^4=16$ расстановок. Итого $16 \cdot 4 = 64$ способа поставить 8 из 9 чисел в фигуру.

Ответ: 64.