0 174343 570008

17-43-43-57
(124.1)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 11 класс

Место проведения г. Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Ломоносов"
наменование олимпиады

по МАТЕМАТИКЕ
профиль олимпиады

Михайлова Петра Александровича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

+ 1 лист

Дата

«29» марта 2026 года

Подпись участника

75 (семьдесят пять) [illegible]

17-43-43-57 (124.1)

$\sqrt{3(1-ctg^2x)} = 2\sqrt{2}\cos x$.

Черновик

$1 - \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} =$

$= 3\left(\frac{1-2\cos^2 x}{\sin^2 x}\right) = \sqrt{3\,\frac{-\cos 2x}{\sin^2 x}}$

$\frac{\sqrt{3-6\cos^2 x}}{\sin x} = 2\sqrt{2}\cos x$

т.к. $\sin^2 x \geq 0$.

$3-6\cos^2 x = 2\sqrt{2}$

ОДЗ. $\sin^2 x > 0$.
$\sin^2 x \neq 0$.
$\cos 2x \leq 0$.

$\sqrt{3\left(\frac{-\cos 2x}{\sin^2 x}\right)} = \frac{1}{\sin x}\sqrt{3(-\cos 2x)} = 2\sqrt{2}\cos x$.

$\sqrt{-3\cos 2x} = \sqrt{2}\sin 2x$.

$\sin 2x \geq 0$.

$-3\cos 2x = 2\sin^2 2x$.

$2(1-\cos^2 2x) = -3\cos 2x$.

$\cos 2x = t$.

$2-2t^2+3t=0$.

$2t^2-3t-2=0$

$D = 9+16 = 25$.

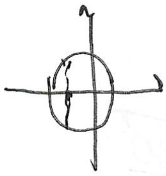
$t_{1,2} = \frac{3\pm 5}{4} = 2; -\frac{1}{2}$

$\left[\begin{array}{l} t = 2 \varnothing \\ t = -\frac{1}{2}. \end{array}\right.$

$\cos 2x = -\frac{1}{2}$.

$\left[\begin{array}{l} 2x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n \\ 2x = \frac{4\pi}{3} + 2\pi n. \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + \pi n \\ x = \frac{2\pi}{3} + \pi n. \end{array}\right.$



A

$\overline{abc} = \frac{100a+10b+c}{a+b+c} \vdots 9$.

$\frac{(a+b+c)+99a+9b}{a+b+c} = 1 + \frac{99a+9b}{a+b+c} =$

$= 1 + 9\left(\frac{11a+b}{a+b+c}\right) \in \mathbb{Z}$. $\equiv 9$.

1+ $9\left(\frac{11a+b}{a+b+c}\right) \equiv_9 -1$.

№4. $0 \le x \le 1$ $-1 \le y \le 1$ Черновик

$y = \sin k\pi x$.

$y = \sin 13\pi x = \sin \pi x$.

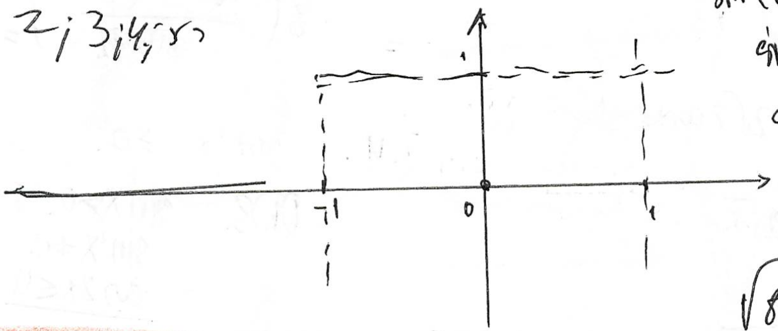
$-5; -4; -3; -2; -1; 0;$

$1; 2; 3; 4; 5$

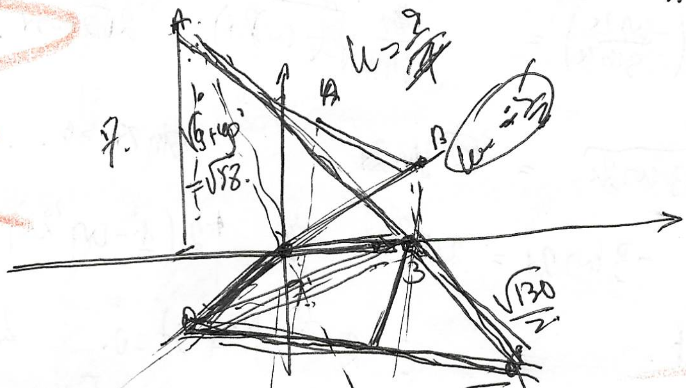
$\sin(6\pi + \pi x)$

$\sin(7\pi + \pi x)$

$\sin(8\pi + \pi x)$



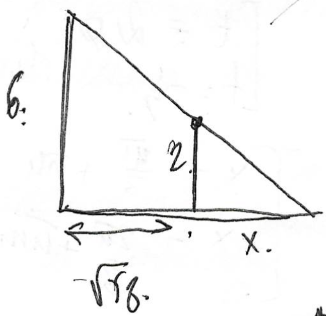
$\sqrt{81+49} = \sqrt{130}$

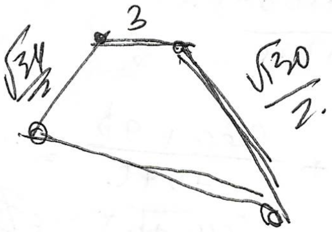


$\frac{x}{2} = \frac{x+\sqrt{58}}{6}$ =

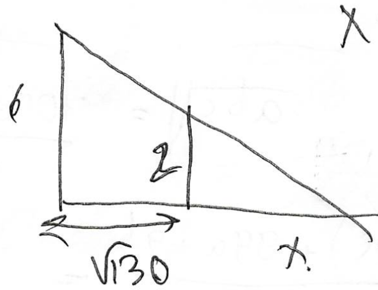
$3x = x + \sqrt{58}$

$2x = \sqrt{58} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{29}{2}}$

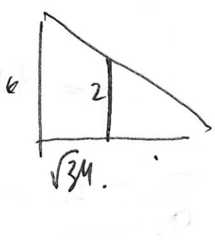




$x = \frac{\sqrt{130}}{2}$



$\times \begin{array}{r} 121 \\ 11 \\ \hline 121 \\ 121 \\ \hline 1331 \end{array}$



$x = \frac{\sqrt{34}}{2}$

17-43-43-57
(124.1)

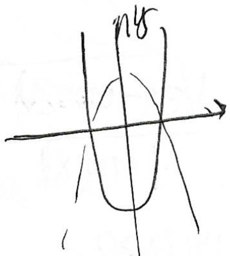
N $8x^2\log_a x - \log_x a - 2x \le 0$

Черновик

$a > 0$. $x > 0$

$a \ne 1$ $x \ne 1$.

$8x^2\log_a x - 2x - \log_x a \le 0$

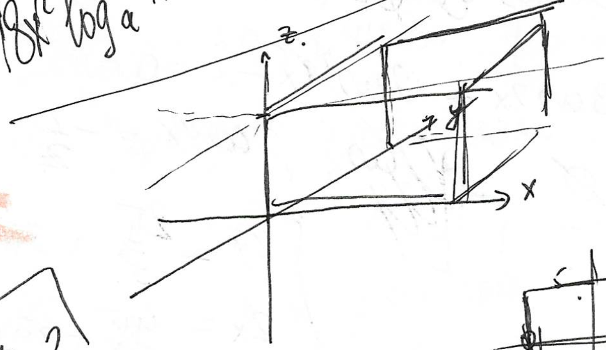


$8x^2\log_a x - \frac{1}{\log_a x}$ $x_B = \frac{1}{8}\log_a x$

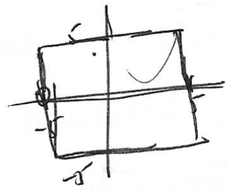
$\frac{1}{8\log_a x} - \frac{1}{4\log_a x} - \frac{1}{\log_a x} \le 0$

$8x^2\log_a^2 x - 2x\log_a x - 1$

$-\frac{1}{8\log_a x} - \frac{1}{\log_a x}$



$\frac{9\log_a x}{8\log_a^2 x} \ge 0$

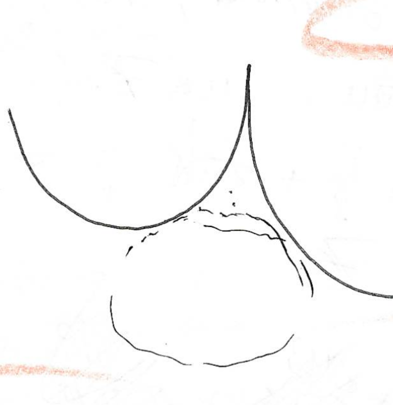


$\sqrt{100\cdot 81\cdot 10\cdot 3}$

$9\cdot 10\cdot 9$ 81 способ

выбираем. 3 шт. в одной

$\boxed{81\cdot 10\cdot 3}$



Чистовик.

1. $\sqrt{3(1-ctg^2x)} = 2\sqrt{2}\cos x$

$\sqrt{3\left(\frac{\sin^2x-\cos^2x}{\sin^2x}\right)} = 2\sqrt{2}\cos x.$ $\sqrt{3\left(\frac{-\cos 2x}{\sin^2x}\right)} = 2\sqrt{2}\cos x.$

ОДЗ: $\sin x \neq 0$, $\cos 2x \leq 0$, $\cos x > 0$ $\Rightarrow$

$\frac{\sqrt{3(-\cos 2x)}}{|\sin x|} = 2\sqrt{2}\cos x.$ 1. $\sin x \geq 0$ $\left[\begin{array}{l}\sqrt{-3\cos 2x} = \sqrt{2}\sin 2x.\\ \sin x \geq 0\end{array}\right.$

$\sin^2 2x = 1-\cos^2 2x.$

$\begin{cases}\sin 2x \geq 0\\ -3\cos 2x = 2\sin^2 2x.\end{cases}$

$\begin{cases}\sin 2x \geq 0\\ -3\cos 2x + 2\cos^2 2x - 2 = 0\end{cases}$

$\cos 2x = -\frac{1}{2}$

$\left[\begin{array}{l}\cos 2x = 2 \quad \varnothing\\ \cos 2x = -\frac{1}{2}\end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l}2x = \frac{2\pi}{3}+2\pi k\\ 2x = \frac{4\pi}{3}+2\pi n \quad \varnothing \ (\sin 2x<0)\end{array}\right.$ $k;n \in \mathbb{Z}.$

$x = \frac{\pi}{3}+\pi k$ Учитывая, что $\sin x \geq 0.$

$x = \frac{\pi}{3}+2\pi k.$

2. $\sin x < 0$ $\sqrt{3\cdot(-\cos 2x)} = -\sqrt{2}\sin 2x$

$\begin{cases}\sin 2x \leq 0\\ -3\cos 2x = 2(1-\cos^2 2x)\end{cases}$ $\left[\begin{array}{l}2x = \frac{2\pi}{3}+2\pi k \quad \varnothing \ (\sin 2x \geq 0)\\ 2x = \frac{4\pi}{3}+2\pi m.\end{array}\right.$ $k;m \in \mathbb{Z}.$

$x = \frac{2\pi}{3}+\pi m$ Учитывая, что $\sin x < 0$:

$x = \frac{5\pi}{3}+2\pi n$ $n \in \mathbb{Z}.$

Ответ: $x = \frac{\pi}{3}+2\pi k$; $x = \frac{5\pi}{3}+2\pi n$

$k;n \in \mathbb{Z}.$

№2. $\overline{abc}$ Чистовик $\frac{100a+10b+c}{a+b+c} \vdots 9$ $N = \frac{a+b+c+99a+9b}{a+b+c} =$

$= 1 + 9\left(\frac{11a+b}{a+b+c}\right)$

Чтобы число $1+9\left(\frac{11a+b}{a+b+c}\right)$ было целым нужно чтобы $\frac{11a+b}{a+b+c}$ ц.ч. При таком условии число N не будет делиться на 9 (число $9\left(\frac{11a+b}{a+b+c}\right)$ делится на 9 при $\forall$ целых значениях $\frac{11a+b}{a+b+c}$, а 1 не делится на 9. $\Rightarrow$ ~~такие~~ в множество 3-х значных чисел А входит 0

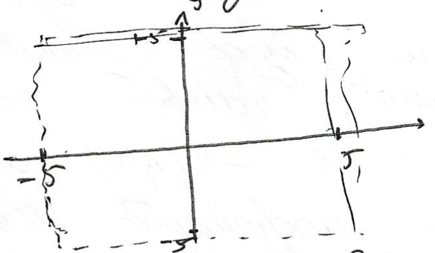
Ответ: нет решений.

№3. Возможны 3 ситуации:

1). катеты || осям x и y 2). катеты || осям y и z. 3). катеты || осям x и z.

Найдем кол-во вариантов для одного из случаев и умножим на 3

Рассмотрим ①.

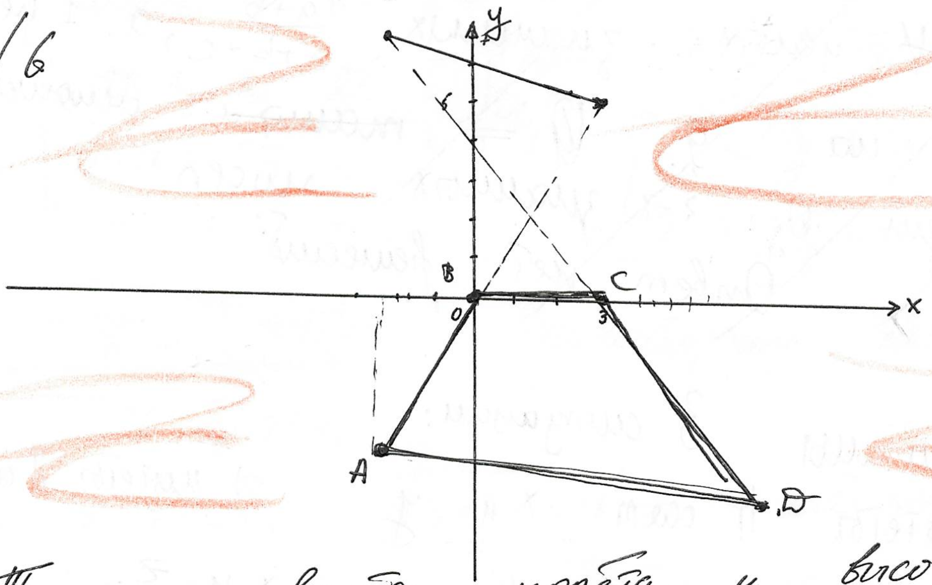


В одной плоскости у нас есть $11 \times 11 = 121$ вариант выбрать точку пересечения 2х катетов. для каждой такой точки можно выбрать 10 точек для одного катета и 10 точек для другого катета. Итого в одной плоскости можно получить $121 \cdot 100 = 12100$ точек. Чистовик

Таких плоскостей ∥ осям x и y можно выбрать 11 при $z \in [-5;5]$.
Т.е. для одного случая можно выбрать $12100 \cdot 11 = 133100$ способов!
~~Всего возмож~~ Учитывая, что у нас 3 случая ⇒ можно получить $3 \cdot 133100 = 399300$ прямоугольных треугольников!

Ответ: 399300.

№ 6



Так как высота полета и высота забора не изменяются ⇒ самое дальнее расстояние затемненной территории будет при освещении из крайних точек. Прямые на повороте будут лежать эти точки и будут являться максимально покрываемой теневой зоной.
Координаты точек B и C — (0;0) и (3;0) соответственно. Найдем координаты точек A и D.

Если рассмотреть плоскость вертикально.
то коэф. подобия треуг. полета и забора будет равен 3.

Черновик

$-\frac{7}{6}$

$(-7y)^2+(6x)^2=$ $\frac{49+36}{2}=\frac{85}{2}$

$\sqrt{49+36}=$
$=9$

$49y^2+36x^2=\frac{85}{2}$

$243 \mid 9$
$-18 \quad 27$
63

$3\sqrt{2}$

$\frac{7\sqrt{2}}{3}$

$\boxed{-\frac{7}{6}}$

$9+\frac{49}{2}=$

$\frac{49}{2}+18=$ $\frac{\times 81}{3}$ 243

$=\frac{18+49}{2}=$

$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$

$(x-x_1)(y_2-y_1)$

$(y-y_1)(x_2-x_1)=$ $(3\sqrt{2};0)$

$(3(1+\sqrt{2});0)$ 26

$3(1+\sqrt{2});\frac{7\sqrt{2}}{2}$

$k=($ $y=\frac{x(y_2-y_1)}{x_2-x_1}$

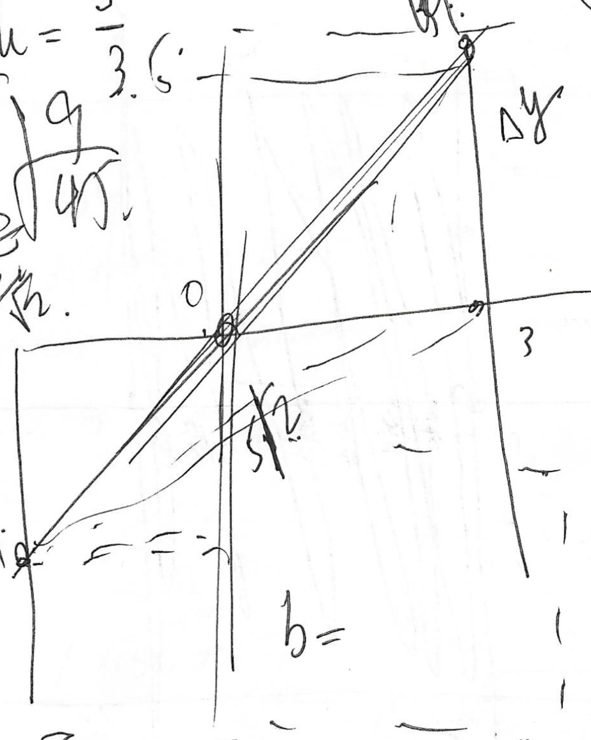
k

$(3(1+\sqrt{2});\frac{7\sqrt{2}}{2})$

$k=\frac{5}{3.6}$

$405 \mid 9$
$-36 \quad 45$

$\frac{45}{\sqrt{2}}$



$k=\frac{\Delta y}{\Delta x}=$

$b=$

$=\frac{-\frac{7\sqrt{2}}{2}-\left(-\frac{5}{\sqrt{2}}\right)}{3(1+\sqrt{2})-\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}\right)}=$

$=\frac{-\frac{7}{\sqrt{2}}+\frac{5}{\sqrt{2}}}{3+3\sqrt{2}-\frac{3\sqrt{2}}{2}\ \frac{3}{\sqrt{2}}}=\frac{-\frac{2}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}(3+3\sqrt{2})-3}=\frac{-2}{3\sqrt{2}+6-3}=$
$=-2/(3+3\sqrt{2})$

bk $\boxed{y = kx + b}$ Черновик

$$b = y - kx = -\frac{5}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}}\left(-\frac{2}{3+3\sqrt{5}}\right) =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(5 + \frac{3\cdot 2}{3+3\sqrt{2}}\right. \quad -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(5 + \frac{2}{1+\sqrt{2}}\right)$$

$$y = \left(-\frac{2}{3+3\sqrt{2}}\right)\cdot 3 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(5+\frac{2}{1+\sqrt{2}}\right)\right) =$$

$$-\frac{2}{\cancel{3}(1+\sqrt{2})}\cdot \cancel{3} - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{7+5\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right) =$$

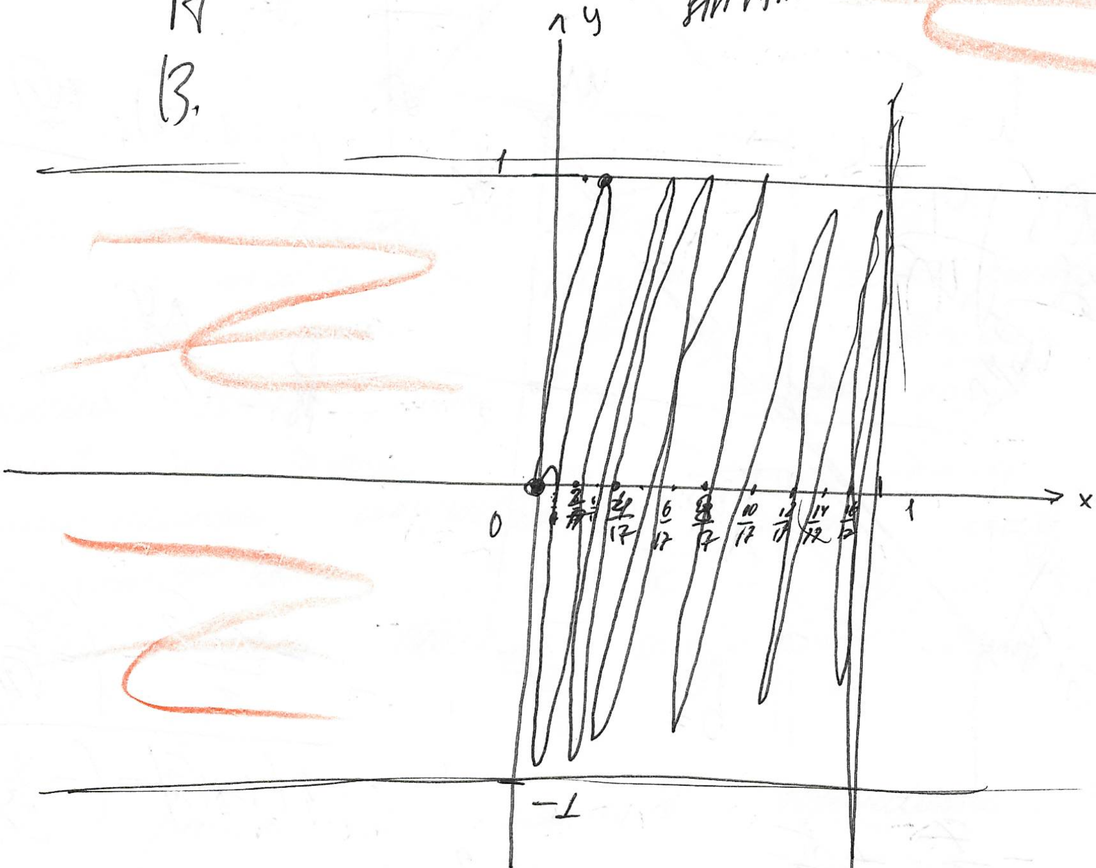
$$= \frac{-1}{1+\sqrt{2}}\left(2 + \frac{7+5\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) =$$

$$= \frac{-7}{\sqrt{2}} \; ??$$

sin 13πx.
sin 15πx.
sin 17πx.

17

13.



~~Тогда координаты точки~~ Чистовик

Тогда расстояние от забора до границы тени будет в 2 раза меньше, чем расстояние от забора до светильника. Тогда координаты будут меньше в $\sqrt{2}$ раз.

~~Коор~~ Таким образом координаты точки А:

$\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}; -\frac{5}{\sqrt{2}}\right)$. Координаты точки Д:

$\left(3+\frac{6}{\sqrt{2}}; -\frac{7}{\sqrt{2}}\right)$.

Найдем угловой коэф. прямой

$$k = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{-\frac{5}{\sqrt{2}} + \frac{7}{\sqrt{2}}}{-\frac{3}{\sqrt{2}} - 3 - \frac{6}{\sqrt{2}}} = -\frac{\frac{2}{\sqrt{2}}}{\frac{9}{\sqrt{2}}+3} = \frac{-2}{3(3+\sqrt{2})}$$

$$b = y - kx = -\frac{5}{\sqrt{2}} + \frac{2}{3(3+\sqrt{2})} \cdot \frac{-3}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(5+\frac{6}{9+3\sqrt{2}}\right)$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{45+15\sqrt{2}+6}{3(3+\sqrt{2})}\right) = -\frac{51+15\sqrt{2}}{3\sqrt{2}(3+\sqrt{2})}$$

$$y = \frac{-2}{3(3+\sqrt{2})} \cdot x - \frac{51+15\sqrt{2}}{3\sqrt{2}(3+\sqrt{2})} =$$

$$\Rightarrow 3(3+\sqrt{2})y = -2x - \frac{51+15\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$3(3+\sqrt{2})y + 2x + \left(\frac{51}{\sqrt{2}} - 15\right) = 0$$

$A = 3(3+\sqrt{2})$ $B = 2$ $C = \frac{51}{\sqrt{2}} - 15$

По ф-ле расстояния от точки до прямой от точки $C(3;0)$

$$\rho = \frac{|Ax+By+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{|6 + \frac{51}{\sqrt{2}} - 15|}{\sqrt{9(9+2+6\sqrt{2})+4}} =$$

$$= \frac{|-9+\frac{51}{\sqrt{2}}|}{\sqrt{103+54\sqrt{2}}}$$

Длина AD:

$$l = \sqrt{(x_0-x_1)^2+(y_0-y_1)^2} =$$

Чистовик

$$= \sqrt{\left(-\frac{3}{\sqrt2} - \left(3+\frac{6}{\sqrt2}\right)\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(-3-\frac{9}{\sqrt2}\right)^2 + 4} = \sqrt{13+4+\frac{81}{2}+27\sqrt2} =$$

~~Чер~~

$$S_1 = \frac12 \cdot \cancel{\sqrt{17+\frac{81}{2}+27\sqrt2}} \cdot \frac{\cancel{\ldots}}{\cancel{\sqrt{103+54\sqrt2}}} = \frac12\left(-9+\frac{51}{\sqrt2}\right)$$

$$-9+\frac{51}{\sqrt2}$$

Найдем $S_{\Delta ABC}$: $A\left(-\frac{3}{\sqrt2}; -\frac{5}{\sqrt2}\right)$. $C(3;0)$.

$$k = \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0} = \frac{\frac{5}{\sqrt2}}{3+\frac{3}{\sqrt2}} = \frac{5}{3(1+\sqrt2)}$$

$$b = y - kx = 0 - \frac{5}{1+\sqrt2} = -\frac{5}{1+\sqrt2}$$

$$y = \frac{5}{3(1+\sqrt2)}x - \frac{5}{1+\sqrt2} \Rightarrow 3(1+\sqrt2)y - 5x + 15 = 0$$

Расстояние от точки B до AC:

$$\rho = \frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{|\ldots\ 15|}{\sqrt{9(1+2+2\sqrt2)+25}} =$$

$$= \frac{15}{\sqrt{52+18\sqrt2}}$$

$27+25$

Длина AC: $l_2 = \sqrt{\left(-\frac{3}{\sqrt2}-3\right)^2+\frac{25}{2}} = \sqrt{\left(\frac{-3-3\sqrt2}{\sqrt2}\right)^2+\frac{25}{2}} =$

$$= \sqrt{\frac{9+18+18\sqrt2+25}{2}}$$

$$S_2 = \frac12 \rho \cdot l_2 = \frac12 \cdot 15 \cdot \frac{1}{\sqrt2} = \frac{15}{2\sqrt2}$$

$$S = S_1 + S_2 = \frac{15}{2\sqrt2} + \frac{1}{2\sqrt2}(51-9\sqrt2)$$

Ответ: $\frac{15}{2\sqrt2}+\frac{1}{2\sqrt2}(51-9\sqrt2)$

Чистовик

№2. $N = \frac{100a + 10b + c}{a+b+c} = \frac{a+b+c + 99a + 9b}{a+b+c} =$

$= 1 + 9\left(\frac{11a+b}{a+b+c}\right)$ – данное число должно

быть целым и $\vdots 9$. Т.к.

При $a+b+c \not\vdots 9$ решений нет. (в таком случае число N будет давать остаток 1 при делении на 9 $\Rightarrow$ $a+b+c \vdots 9$)

а $11a+b$ дают остаток -1 при делении на 9.

Переберем все возможные значения a и подберем под них b и c.

$a = 1$: $b = 6$ $c = 2$. $\overline{abc} = 162$

$a = 2$: $b = 4$ $c = 3$. $\overline{abc} = 243$

$a = 3$: $b = 2$ $c = 4$ $\overline{abc} = 324$

$a = 4$ $b = 0$. $c = 5$ $\overline{abc} = 405$

$a = 5$ $b = 7$ $c = 6$. $\overline{abc} = 576$

$a = 6$ $b = 5$ $c = 7$. $\overline{abc} = 657$.

$a = 7$ $b = 3$. $c = 8$. $\overline{abc} = 738$

$a = 8$ $b = 1$. $c = 0$ $\overline{abc} = 810$

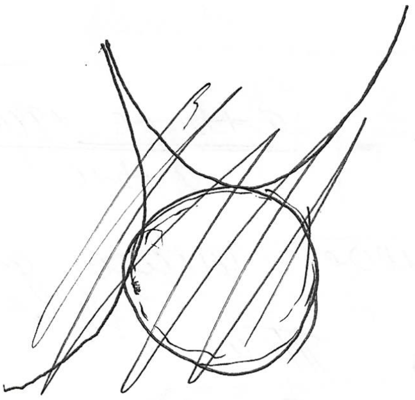
$a = 9$ $b = 8$. $c = 1$. $\overline{abc} = 981$

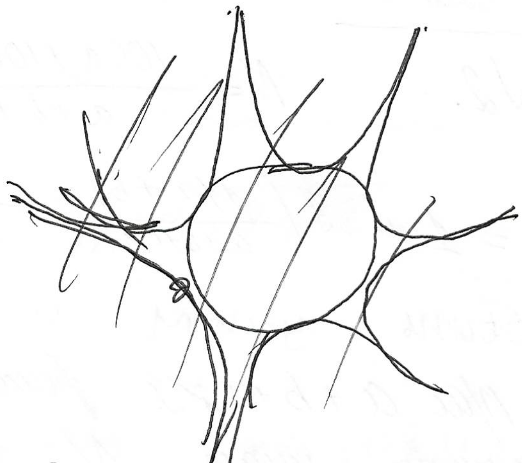
Сумма второго, пятого и предпоследнего:

$243 + 576 + 810 = 1629$.

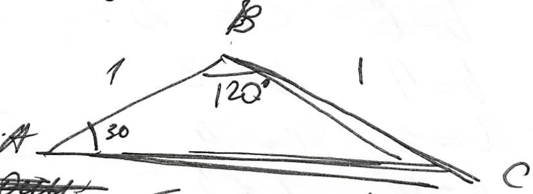
Ответ: $A \in \{162; 243; 324; 405; 576; 657; 738; 810; 981\}$ сумма: 1629.

№57 Чистовик.





Т.к. шестиугольник равносторонний, то у обычного шестиугольника получается бы угол $\frac{(6-2)\cdot 180}{6} = 120^\circ$. Рассмотрим один из треугольников, где 3 точки ~~в вершине~~ шестиугольника

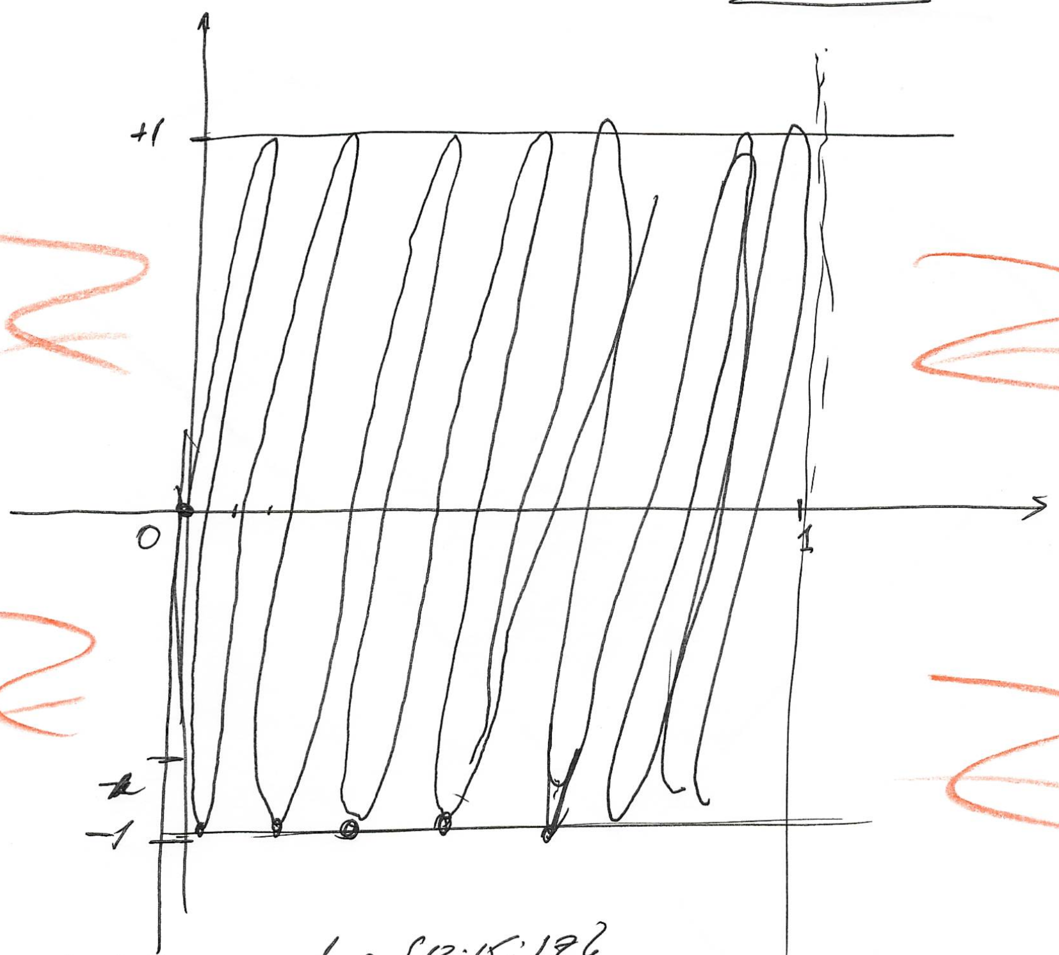


~~По теор-ме косин~~

Т.к. $\triangle$ равнобедренный $\Rightarrow \angle BAC = \angle BCA = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ$. ~~По теор-ме синусов~~ для $\triangle ABC$ данная в условии окружность является описанной. По теор-ме синусов для $\triangle ABC$: $2R = \frac{BC}{\sin\angle BAC} = \frac{1}{1/2} = 2 \Rightarrow R = 1$

Ответ: 1.

№4. Чистовик



$\sin k\pi x$. $k \in \{13; 15; 17\}$

Т.е. у нас есть графики: $\sin 13\pi x$ (1) $\sin 15\pi x$ (2) $\sin 17\pi x$ (3)

Их: Периоды (1) $x = \frac{2\pi}{13} + \frac{2k}{17}$ (2): $x = \frac{2}{15} + \frac{2k}{17}$ (3): $x = \frac{2}{17} + \frac{2k}{17}$ $k \in \mathbb{Z}$

На отрезке от 0 до 1 будет следующее кол-во периодов (1): 6 периодов. (2): 7 периодов (3): 8 периодов. ~~Графики~~ Всего получится $2(13+15+17)+$ + 3 области пересечений. Итого: $S = 2(45)+3 =$ $= 93$ области

Ответ: 93 области.