0 293537 600007

29-35-37-60
(124.3)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 11 класс

Место проведения г. Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Ломоносов"
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Михеевой Дарьи Евгеньевны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«29» марта 2026 года

Подпись участника

Мир

 100(сто)

29-35-37-50 (1242)

Черновик

Бином Ньютона:

$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k$

$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

$tg x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$tg^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$

$\frac{1}{2}x^2 + 1 = -\frac{1}{2}x^2 + C$

$x^2 = C - 1$

-4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 - 9

$y = \sin 2x$

x	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$
y	0	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

$16\sin^2 x\cos^2 x =$

$= (4\sin x\cos x)^2 =$

$= (2\sin 2x)^2$ при $\sin x \neq 0$

$6 - \frac{6}{\cos^2 x} - 16 = 0$

$\frac{6}{\cos^2 x} - 10 = 0$

$6 - 10\cos^2 x = 0$

$\cos^2 x = \frac{6}{10}$

$\left[\begin{array}{l}\cos x = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{10}} \\ \cos x = -\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{10}}\end{array}\right.$

$81 \times 9 = 179$

26×36: 216, 108, 1296

$\frac{1}{2}x^2 = -\frac{1}{2}x^2 + 1 + C$

$x^2 = C + 1$

$79 \times 4 = 316$

$126 + 153 = 279$

$279 + 621 = 900$

$6\cos^2 x - 6\sin^2 x - (2\sin 2x)^2 = 0$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$6(\cos^2 x - \sin^2 x) - (2\sin 2x)^2 = 0$

$6\cos 2x - (2\sin 2x)^2 = 0$

$4\sin^2 2x$

~~4 - 4sin~~

$1 - \sin^2 2x =$

$= \cos^2 2x$

$6\cos 2x - 4\cos^2 2x = 0$

$2\cos 2x(3 - 2\cos 2x) = 0$

$\left[\begin{array}{l}\cos 2x = 0 \\ \cos 2x = \frac{3}{2}\ \varnothing\end{array}\right.$

~~$2x = \pi k$~~

~~$x = \frac{\pi k}{2}$~~

$2x = \frac{\pi}{2} + \pi k$

$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$

$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$R = \frac{3a\sqrt{3}}{2}$

$\frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{6}{\sqrt{3}} = 9$

$948 \times 179 = 1127$

297×210: 2970, 594, 62370

19×19: 171, 19, 261

$261 \times 5 = 1305$

Чистовик

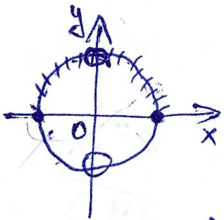
№1

$\sqrt{6(1-tg^2x)} = 4\sin x$

Ограничения:

1) $4\sin x \geq 0$

$\sin x \geq 0$



2) $\cos x \neq 0$

$\sqrt{6(1-tg^2x)} = 4\sin x \quad |^2$

$6(1-tg^2x) = 16\sin^2x$

$6 - 6tg^2x - 16\sin^2x = 0$

$6 - 6\dfrac{\sin^2x}{\cos^2x} - 16\sin^2x = 0 \quad |\cdot\cos^2x$

$16\sin^2x\cos^2x = (4\sin x\cos x)^2 = (2\sin 2x)^2 = 4\sin^2 2x$

$\cos 2x = \cos^2x - \sin^2x$

$6\cos^2x - 6\sin^2x - 16\sin^2x\cos^2x = 0$

$6(\cos^2x - \sin^2x) - 4\sin^2 2x = 0$

$\cancel{6\cos 2x - 2(1-\cos^2 2x) = 0}$

$6\cos 2x - 4 + 4\cos^2 2x = 0$

$4\cos^2 2x + 6\cos 2x - 4 = 0$

Пусть $\cos 2x = t,\ t \in [-1;1]$

$4t^2 + 6t - 4 = 0$

$D = 36 + 64 = 100 = 10^2$

$t_1 = \dfrac{-6+10}{8};\ t_1 = \dfrac{1}{2}$

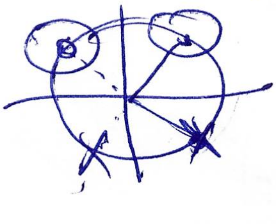
$t_2 = \dfrac{-6-10}{8};\ t_2 = -2$ – не удовл. огр.

$\cos 2x = \dfrac{1}{2}$

$\left[\begin{array}{l} 2x = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z \\ 2x = -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z \\ x = -\dfrac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z \end{array}\right.$ – ~~удовл. огр., т.к. $\sin x \geq 0$~~

Ответ: $\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z$;

$\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z$



Дано: №3

$|F| \le 4$

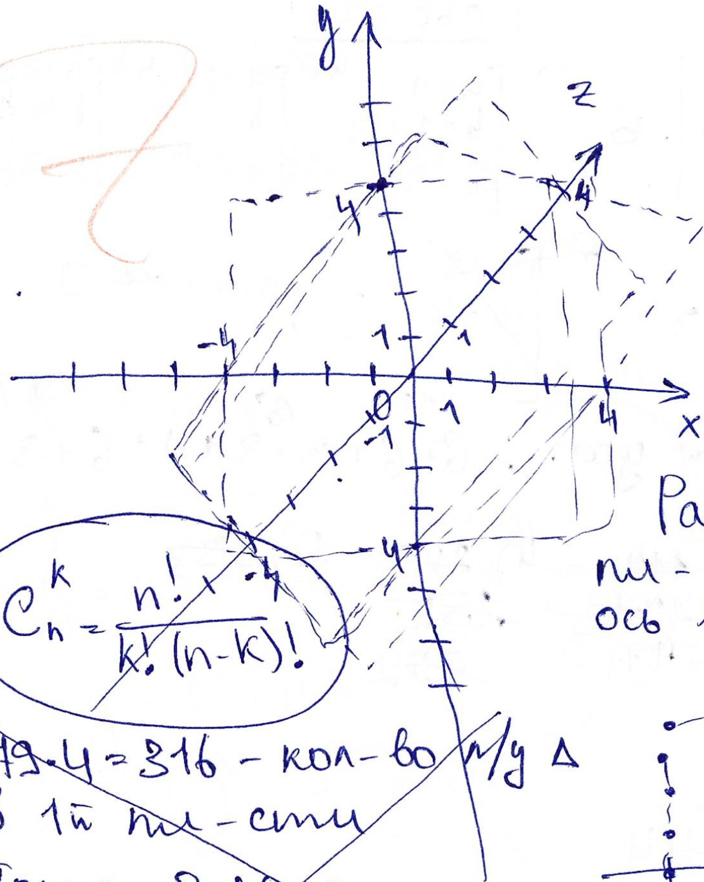
~~A(x; y; z) при~~

Решение:

$A(x; y; z)$ при $x, y, z \in \mathbb{Z}$

$x \in [-4; 4]$
$y \in [-4; 4]$ $9 \cdot 3 = 27$ ч.
$z \in [-4; 4]$

$9^3 = 179$ - кол-во точек с целыми координатами



$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

~~$179 \cdot 4 = 316$ - кол-во п/у Δ в 1й пл-сти~~
~~Тогда $316 \cdot 3 = 948$ - кол-во п/у Δ~~ ~~внутри~~ ~~в множестве F~~

$C_9^2 = \frac{9!}{2! \cdot 7!} = \frac{8 \cdot 9}{2} = 36$

$36^2 = 1296$; $1296 \cdot 4 = 5184$

~~$948 + 179 = 1127$~~

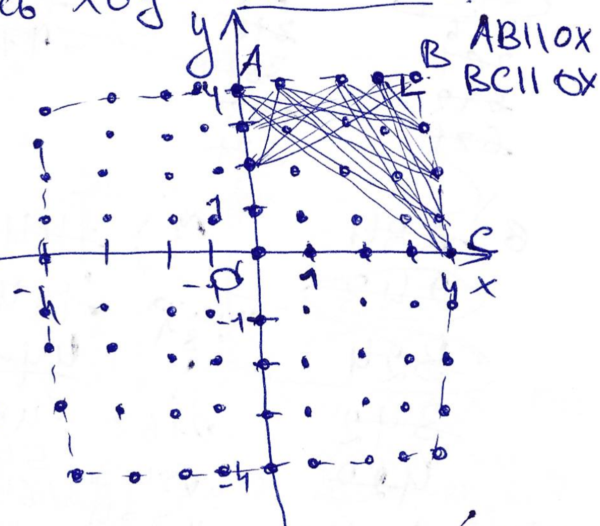
$5184 \cdot 3 \cdot 9 = 139\,968$

Ответ: 139968

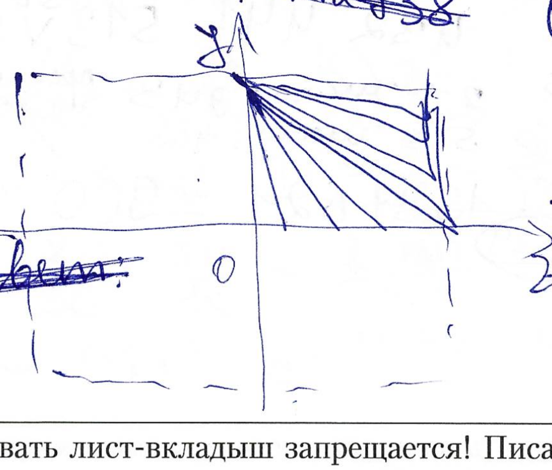
~~Ответ: 112438~~

Рассмотрим 1 из 3 пл-тей: назовем ось xoy - пл-ть a

AB ∥ ox
BC ∥ ox



~~пл-сть a содержит 81 т. Рассмотрим её I четверть:~~
~~кол-во Δ~~
~~(·4) по 4 в каждой единичной „строчке“:~~
~~(·3) по 3 в каждой двойной:~~
~~(·2) по 4 в каждой тройной~~
~~по 4 в каждой четверной:~~
~~$(4 \cdot 4 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 2 + 4) \cdot 2 - 1 =$~~
~~$= 80 - 1 = 79$~~



~~Ответ:~~

$$\begin{array}{r} \times\, 5184 \\ 27 \\ \hline 36288 \\ 10368 \\ \hline 139968 \end{array}$$

Чистовик

Дано: №2 $a+b+c=S$ Чистовик

Решение:

$\overline{abc} \vdots (a+b+c) = n$

$n \vdots 9$ $\overline{abc} = 9k \cdot S$

$\Rightarrow (a+b+c) \vdots 9 \Rightarrow$

$\overline{abc} \vdots 81$

1) $\left[\begin{array}{l} a=1 \\ b=2 \\ c=6 \end{array}\right| \cdot 6$ 2) $\left[\begin{array}{l} a=1 \\ b=3 \\ c=5 \end{array}\right| \cdot 6$ 3) $\left[\begin{array}{l} a=1 \\ b=1 \\ c=7 \end{array}\right| \cdot 3$ 4) $\left[\begin{array}{l} a=2 \\ b=2 \\ c=5 \end{array}\right| \cdot 3$ 5) $\left[\begin{array}{l} a=3 \\ b=3 \\ c=3 \end{array}\right|$

6) $\left[\begin{array}{l} a=4 \\ b=3 \\ c=2 \end{array}\right| \cdot 6$ 7) $\left[\begin{array}{l} a=4 \\ b=1 \\ c=4 \end{array}\right| \cdot 3$ ~~8) a=8, b=2~~ — кратные 9

кол-во чисел, удовл. усл.: 6+6+3+3+1+6+3 = ~~31~~ 28

1) ~~126~~ ~~162~~ ~~216~~ ~~261~~ ~~612~~ ~~621~~

2) ~~135~~ ~~153~~ ~~315~~ ~~351~~ ~~513~~ ~~531~~

3) ~~117~~ ~~171~~ ~~711~~

4) ~~225~~ ~~252~~ ~~522~~

5) ~~333~~

6) ~~234~~ ~~243~~ ~~324~~ ~~342~~ ~~423~~ ~~432~~

7) ~~144~~ ~~414~~ ~~441~~

числа $\vdots 81$

√162 √243 √324 √405

√486 564 √648 729

√810 891 √972

(√) — делятся на сумму цифр

~~Порядок возрастания:~~

117 126 135 144 153 162 171 216

225 234 243 252 261 315 324 333

342 351 414 ~~441~~ 423 432 441 513 522 531

612 621 711

2-е число: 243

5-е число: 486

предпосл. число: 810

~~2 + 5 + 27 = 126 + 153 + 621 = 900~~

243 + 486 + 810 = 1539

Ответ: ~~900~~ 1539.

29-35-37-60 (124.3)

Чистовик

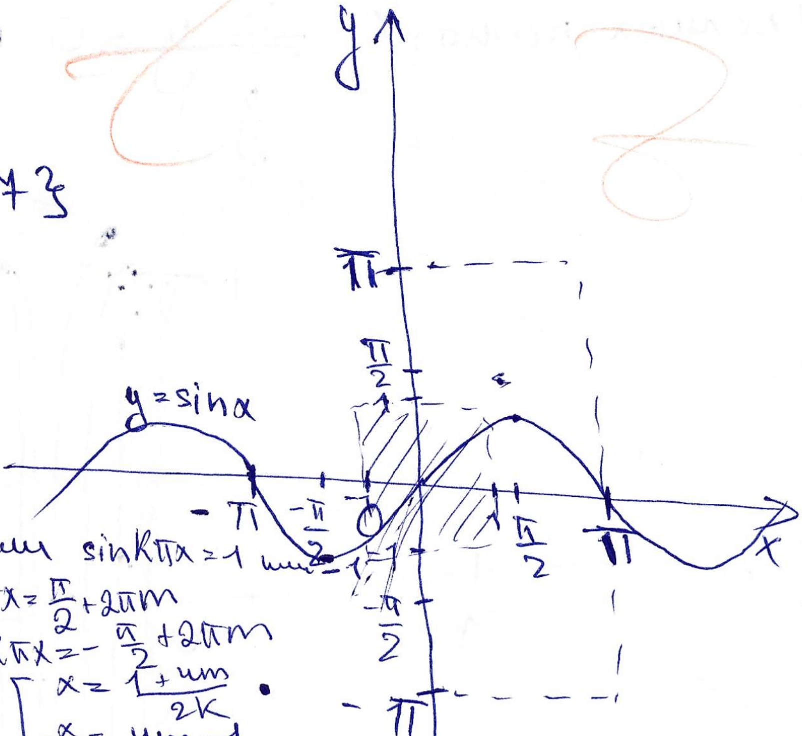
№4

$x \in [0;1]$

$y \in [-1;1]$

$y = \sin K\pi x$

$K \in \{13; 15; 17\}$



① $y = \sin 13\pi x$

② $y = \sin 15\pi x$

③ $y = \sin 17\pi x$

Если $\sin K\pi x = 1$ или -1

$\left[\begin{array}{l} K\pi x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m \\ K\pi x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi m \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x = \frac{1+4m}{2K} \\ x = \frac{4m-1}{2K} \end{array}\right.$

$y = \sin ax$

$a\uparrow \Rightarrow T$ ф-ции $\uparrow$

$a_1 = 13\pi \Rightarrow T_1 = 13\pi T$

$a_2 = 15\pi \Rightarrow T_2 = 15\pi T$

$a_3 = 17\pi \Rightarrow T_3 = 17\pi T$

$\sin 13\pi x = \sin 15\pi x$

$2\cos(14\pi x)\sin \pi x = 0$

$0 \le x \le 1$

$-1 \le y \le 1$

$\left[\begin{array}{l} 14x = \frac{1}{2} + n \\ x = 0, 1 \end{array}\right.$

$x = \frac{\frac{1}{2} + n}{14}$

14

1) Пусть $y = 1$ для ①

$1 = \sin 13\pi x \Rightarrow 13\pi x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$

$x = \frac{1}{26} + \frac{2k}{13}, k \in Z$

$y = 0$ для ①:

$\sin 13\pi x = 0$

$13\pi x = \pi k, k \in Z$

$x = \frac{k}{13}, k \in Z$

2) $y = 1$ для ②

$1 = \sin 15\pi x \Rightarrow 15\pi x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$

$x = \frac{1}{30} + \frac{2n}{15}, n \in Z$

$y = 0$

$15\pi x = \pi n, n \in Z$

$x = \frac{n}{15}, n \in Z$

3) $y = 1$ для ③

$1 = \sin 17\pi x \Rightarrow x = \frac{1}{34} + \frac{2l}{17}, l \in Z$

$x = \frac{l}{17}, l \in Z$

$T_1 = 2\left(\frac{1}{26} + \frac{2k}{13} - \frac{k}{13}\right) - 2\left(\frac{1}{26} + \frac{k}{13}\right) = \frac{2}{26} + \frac{2k}{13} = \frac{2+4k}{26}$

при $k = 1$ $T_1 = \frac{8}{26} = \frac{8}{13} \Rightarrow$ на $x [0;1]$ $y = \sin 13\pi x$ имеет 3 полн периода

$T_2 = \frac{2}{30} + \frac{2n}{15} = \frac{2+18n}{30}$ при $n = 1$ $T_2 = \frac{6}{30} = \frac{1}{5} \Rightarrow$

в $x \in [0;1]$ $y = 15\pi x$ проходит 3 полных периода

$T_3 = \frac{2+4\pi l}{34}$ при $l = 1$ $T_3 = \frac{8}{34} = \frac{34}{17} \Rightarrow$

на $x \in [0;1]$ $y = \sin 17\pi x$ имеет 4

полных периодов ~~$\Rightarrow y = 0$ при $x = 6$~~

$\sin 13\pi x = \sin 17\pi x$

$\sin(2\pi x)\cos(15\pi x) = 0$

$x = 0; \frac{1}{2}; 1$

$x = \frac{\frac{1}{2}+n}{15}$

15

$\sin 15\pi x = \sin 17\pi x$

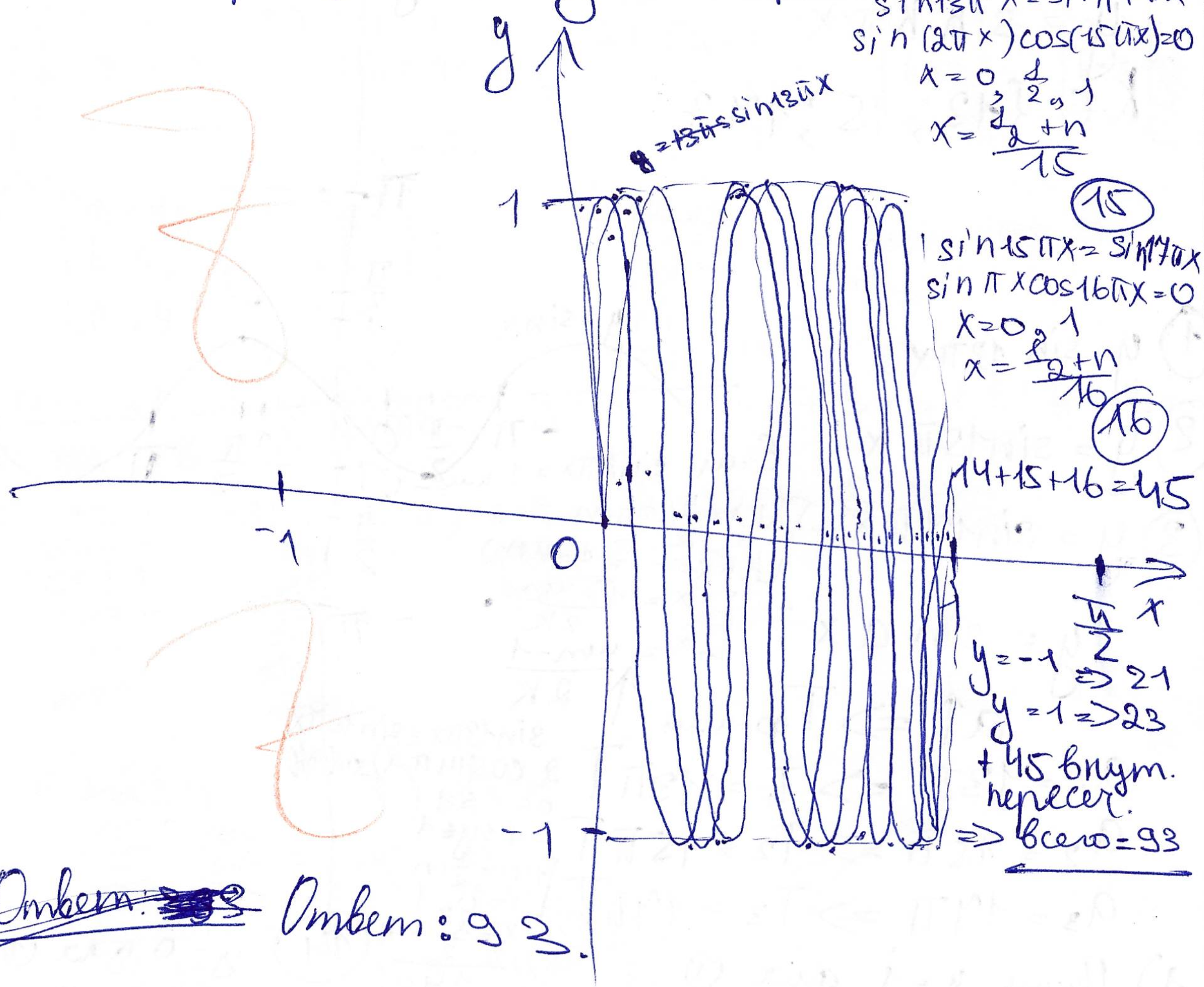
$\sin \pi x \cos 16\pi x = 0$

$x = 0; 1$

$x = \frac{\frac{1}{2}+n}{16}$

16

$14+15+16=45$



$y = -1 \Rightarrow 21$

$y = 1 \Rightarrow 23$

$+ 45$ внут. пересеч.

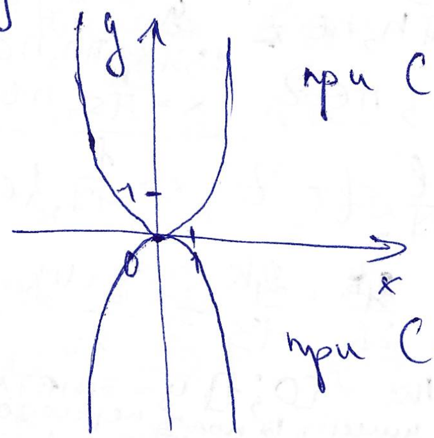
$\Rightarrow$ всего $= 93$

~~Ответ: 93~~ Ответ: 93.

N 5

Dano:

$y = Cx^2$



при $C > 0$

при $C < 0$

~~$\angle A \neq 180$~~

$0 < \angle A < 180$

N 9

если $AB = BC = CA = 1$

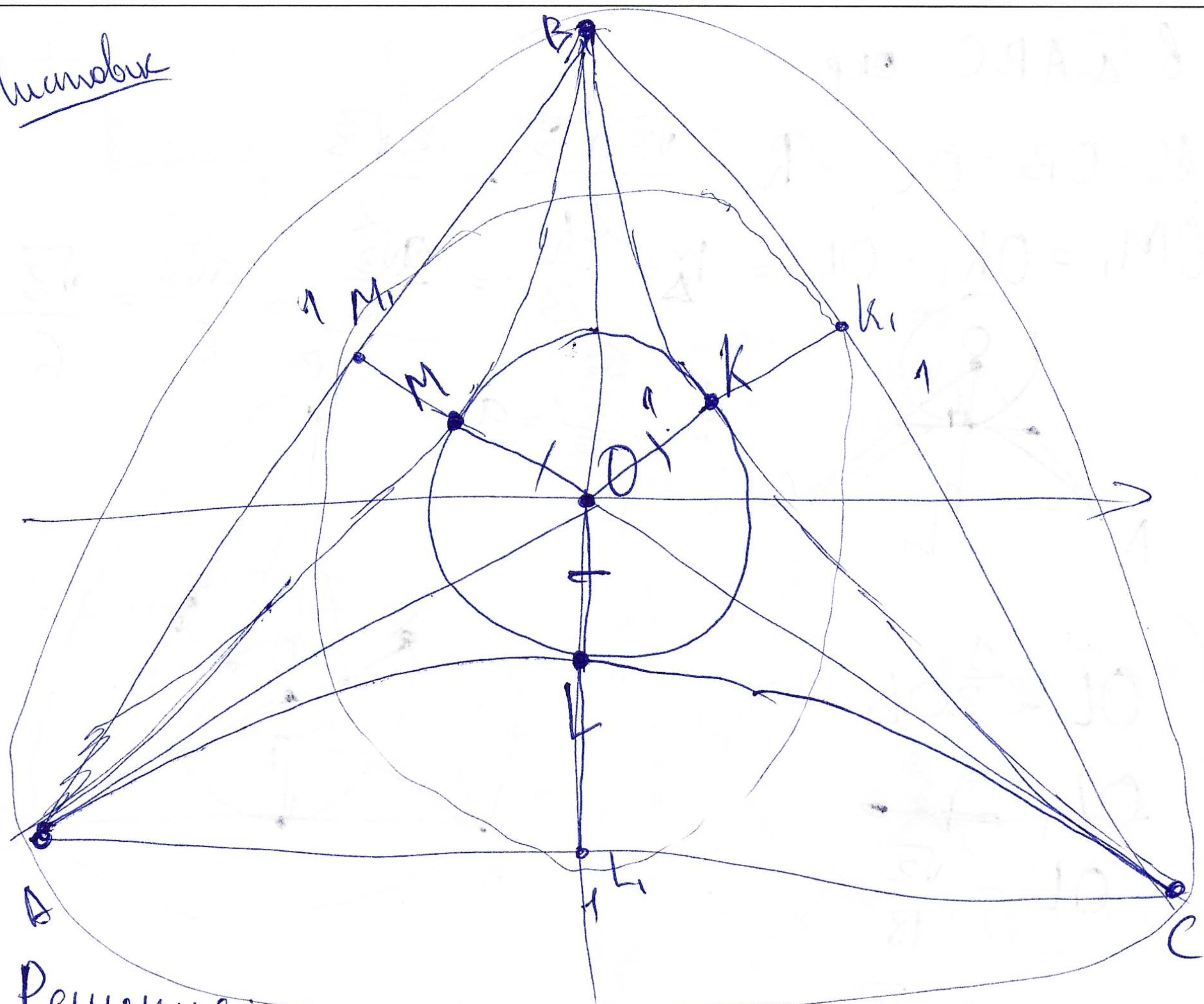
т. M – т. касания $\breve{AB}$ и $\omega(O; r)$

т. K – т. касания $\breve{BC}$ и $\omega(O; r)$

т. L – т. касания $\breve{AC}$ и $\omega(O; r)$

Чистовик

Чистовик



Решение:

1) $AB = BC = AC = 1$ (по усл.) $\Rightarrow \breve{AB} = \breve{BC} = \breve{AC}$

$\triangle ABC$ – р/с (по опр.) $\Rightarrow$ ~~$\angle ABC$~~ $\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$

Пусть $\triangle ABC$ – описанный, тогда дуги $\breve{AB}$, $\breve{BC}$, $\breve{AC}$ $\omega(O; R) = \frac{360}{3} = 180^\circ$

2) $OM = OK = OL$ (как радиусы)

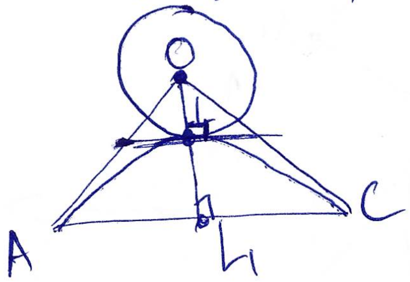
Пусть $OM \cap AB =$ т. M_1, $OL \cap AC =$ т. L_1, $OK \cap BC =$ т. K_1

$OM \perp AB$, $OL \perp AC$, $OK \perp BC$

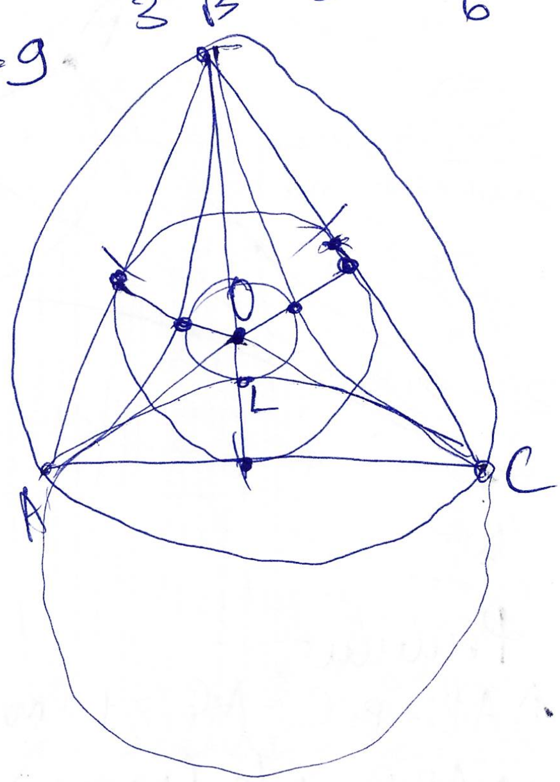
OB, OA, OC – радиусы окружности, описанной вокруг $\triangle ABC \Rightarrow \triangle AOB$, $\triangle BOC$, $\triangle AOC$ – р/б, равные (по 2м ст.), тогда OM_1, OK_1, OL_1 – медианы, бис-сы, высоты $\triangle AOB$, $\triangle BOC$, $\triangle AOC$ соответственно. OM_1, OK_1, OL_1 – также являются радиусами вписанной в ΔABC окр.

$AO = OB = OC = R = \frac{\sqrt{3}a^2 3}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

$OM_1 = OK_1 = OL_1 = r_\Delta = \frac{2h}{3} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{6}$



$\frac{R}{r} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{6}} = 9$



$OL - \frac{1}{3}OL_1 \Rightarrow$

~~$OL_1 = r$~~

$OL = \frac{\sqrt{3}}{18}$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{18}$

№6

Дано:

$A(-3;7)$

$B(3;5)$

$\overrightarrow{AB}$ – траектория полёта светлячка

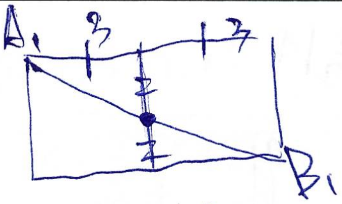
$h = 2м$ – длина забора

$h = \overrightarrow{CD}$

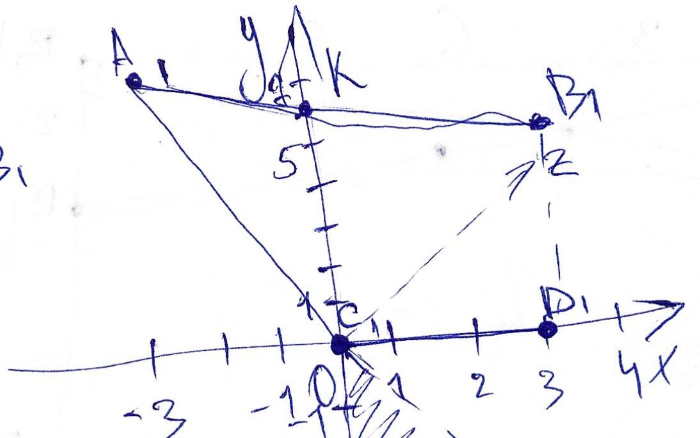
$C(0;0)$; $P(3;0)$

Чистовик

Изобразим полёт светлячка относительно забора на координатной пл-ти:



$K(0;6)$



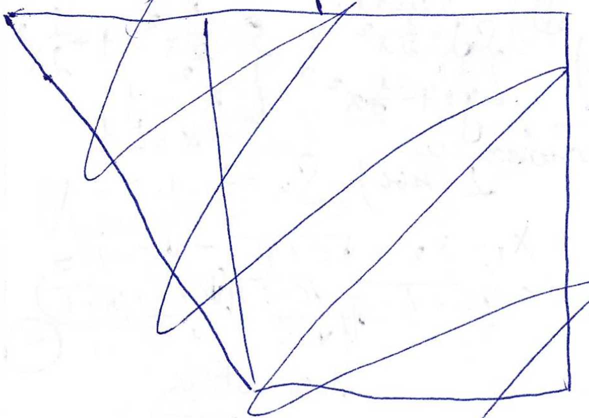
В системе координат:

AA_1 – перпендикуляр, опущенный из т. A на xoy.

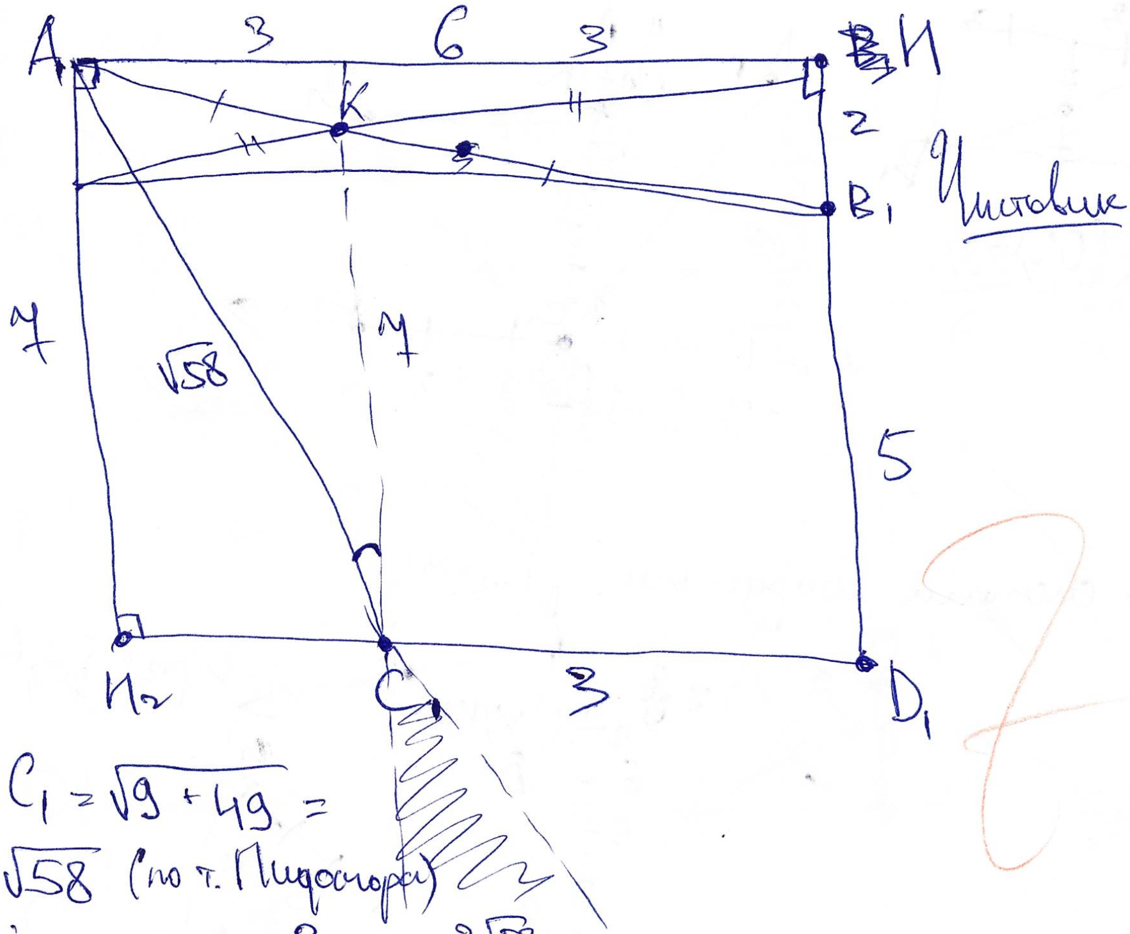
BB_1 – перп., опущенный из т. B на xoy.

CC_1, DD_1 – соответственно.

Рассмотрим $A_1B_1C_1D_1$.



Черновик



$A_1C_1 = \sqrt{9+49} =$
$= \sqrt{58}$ (по т. Пифагора)

$\sin\angle A_1C_1K = \frac{3}{\sqrt{58}} = \frac{3\sqrt{58}}{58}$

$\angle C_1$ - смежный $\Rightarrow$ $\sin\angle C_1 = \frac{3\sqrt{58}}{58}$

S за $\angle C_1$ — S „затемн." $\Rightarrow$

$S = \frac{3\sqrt{58}}{58}$ Sобщ

Ответ: $\frac{3\sqrt{58}}{58}$

№7

Дано:

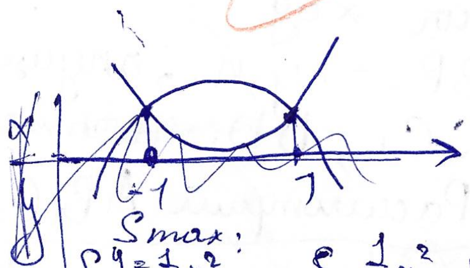
$y = \pm\frac{x^2}{2} + c$ - парабола

при $c \in \mathbb{Z}$

$a \times b = 210 \times 297$ (мм)

a - высота листа

b - ширина листа



Smax:

$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 \\ y = 1 - \frac{1}{2}x^2 \end{cases}$; $\begin{cases} \frac{1}{2}x^2 = 1 - \frac{1}{2}x^2 \\ x^2 = 1 \\ x = \pm 1 \end{cases}$

(диагонали ⊥-ны) $S_ч = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1$

$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 \\ y = -\frac{1}{2}x^2 + 1 + c \end{cases}$

$x_1 = \sqrt{c+1}$ (см. черт.)

$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 + 1 \\ y = -\frac{1}{2}x^2 + c \end{cases}$

$x_2 = \sqrt{c-1}$

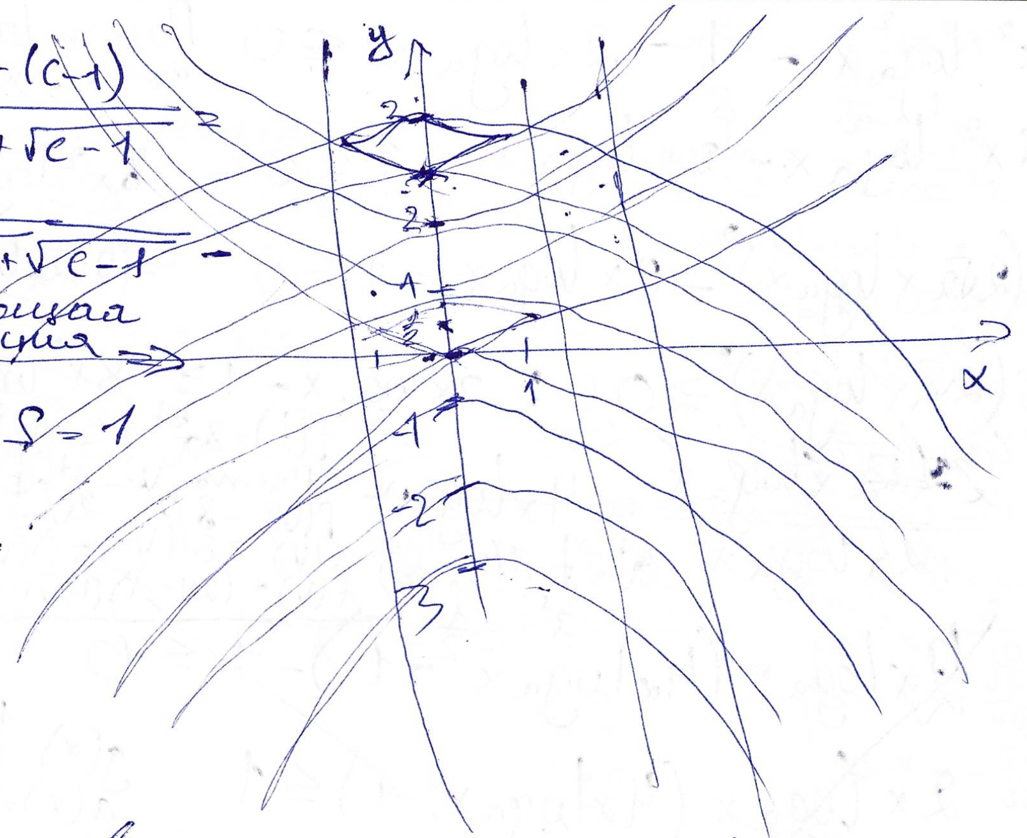
$x_1 - x_2 = \sqrt{c+1} - \sqrt{c-1} = \frac{(\sqrt{c+1} - \sqrt{c-1})(\sqrt{c+1} + \sqrt{c-1})}{\sqrt{c+1} + \sqrt{c-1}} =$

Чистовик

$= \dfrac{(c+1)-(c-1)}{\sqrt{c+1}+\sqrt{c-1}} = \dfrac{2}{\sqrt{c+1}+\sqrt{c-1}}$ –

убывающая фо-ция $\Rightarrow$

$S_{max} = S = 1$



$S_{листа} = 21{,}3 \cdot 29{,}7 = 623{,}7$ (см)

$a = y = 21$ см $\Rightarrow 21 - 2 = 19$ – кол-во парабол с „+" и с „–"

$b = x = 29{,}7$ см

каждые 2 параболы ~~·~~ делят

пл-ть на 5 частей.

$19 \cdot 19 = 261$ – кол-во пересеч. парабол.

$261 \cdot 5 = 1305$ – „клеток"

~~Ответ: 1305~~. Ответ: 1

реш. $\in (c; b); \{d\}$

№8

$8x^2 \log_a x - \log_x a - 2x \le 0$

$8x^2 \log_a x - \dfrac{1}{\log_a x} - 2x \le 0 \quad | \cdot \log_a x$

Ограничения:

$\left.\begin{array}{l} x>0 \\ a>0 \\ a \ne 1 \\ x \ne 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \log_a x \ne 0 \\ \log_x a \ne 0 \end{array}$

Чистовик

$8x^2 \log_a^2 x - 1 - 2x\log_a x \le 0$ Пусть $\log_a x = t$ тогда, $x = a^t$

$8x^2 \log_a^2 x - 2x\log_a x - 1 \le 0$

$\cancel{8x^2 \log_a^2 x =}$ $= (2\sqrt{2}x\log_a x)^2$

$(2\sqrt{2}x\log_a x)^2 - 2x\log_a x - 1 \le 0$

$(2\sqrt{2}x\log_a x)^2 \ge 0$; $2x\log_a x - 1 \ge$ $\cancel{8x^2\log_a^2 x}$

$f(t) = 8a^{2t}t^2 - 2a^t t - 1$

Пусть $v = a^t \cdot t$

$f(v) = 8v^2 - 2v - 1$

$f(v) = 8(v - \frac{1}{2})(v + \frac{1}{4}) \Rightarrow$

$f(v) = (2v-1)(4v+1)$

$\cancel{\frac{4\,8\,2\sqrt{2}\,x^2\log_a x^2}{2x\log_a x}} = 4x\log_a x$

$a^t \cdot t \nearrow (0; +\infty)$

$a^t t = \frac{1}{2}$

$\cancel{2x\log_a x(4x\log_a x^2 - 1) - 1 \le 0}$

$\cancel{2x\log_a x(4x\log_a x - 1) \le 1}$

$g(x) = \log_x a$

$g(x) = \frac{1}{\log_a x}$

$g'(x) = -\frac{1}{a\ln x}$

$\cancel{f(x) = 8x^2\log_a x - \log_x a - 2x \le 0}$

$\cancel{f(x) \le 0}$

$+ \quad - \quad +$

$-\frac{1}{4} \qquad \frac{1}{2}$

$(\infty; 0)$ min в $-\frac{1}{\ln a} \Rightarrow$

$\cancel{F'(x) = 16x\log_a x + 8x^2 \cdot \frac{1}{a\ln x} - \frac{1}{x\ln a} - 2}$

$\Rightarrow -\frac{1}{e\ln a}$ $\exists!$

корень $t > 0$

$\cancel{16x\log_a x + 8x^2 \cdot \frac{1}{a\ln x} = \frac{1}{x\ln a} + 2}$

$\cancel{16x\log_a x + 8x^2 \cdot \frac{1}{a\ln x} = \frac{1}{2a\ln x} = 2}$

$a = e^{\frac{4}{e}}$

$a^t t = -\frac{1}{4}$; $e\ln a = 4$

$\exists!$ корень

Ответ:

$a = e^{\frac{4}{e}}$

Одз.

$$\begin{cases} x > 0 \\ a > 0 \\ x \ne 1 \\ a \ne 1 \end{cases}$$

Чистовик